MAE 5835 - Estatística Avançada II

1o semestre de 2014 - Lista de Exercícios 2

1. Utilizando a desigualdade de Bernstein, encontre um limitante superior para $P(|\overline{X}_n - \theta| > \varepsilon)$ se X_i tem f.d.p. dada por

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Suponha uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $\{X_i,\ i \geq 1\}$, com $E(X_1) = \mu$. Defina o estimador

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

   (a) Mostre formalmente que se $E(X_1^2) < +\infty$ e $\sigma^2 = E(X_1^2) - \mu^2$, então $s_n^2 \xrightarrow{q.c.} \sigma^2$.

   (b) Considere o coeficiente de variação definido por $\nu^2 = \sigma^2/\mu^2$, $\mu \neq 0$. Mostre que $V_n = s_n^2/\overline{X}_n^2$ converge quase certamente para ν^2.

3. Um sistema é composto por dois componentes conectados em série, isto é, o sistema falha se ao menos um dos componentes falha. Suponha que cada componente tem tempo de vida distribuído segundo uma exponencial com média $1/\theta$.

   (a) Qual é a distribuição do tempo de vida do sistema?

   (b) Suponha que existem n cópias deste sistema e que seus tempos de vida são denotados por $Y_1, \ldots, Y_n$. Mostre que a média $\overline{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i/n$ converge quase certamente para uma constante e encontre essa constante.

   (c) Se o sistema tem dois componentes em paralelo, verifique a convergência quase certa e encontre o limite.

4. Considere a função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\beta-1} I(x \geq \alpha),\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

   (a) Mostre que para esta densidade, a função geradora de momentos $M(t)$ não existe para qualquer $t > 0$.

   (b) Verifique se, para $\beta > 1$ a Lei Forte dos Grandes Números de Khintchine se aplica para amostras desta distribuição.

5. Suponha uma seqüência $\{X_n,\ n \geq 1\}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição de Bernoulli e $\mathbb{E}(X_i) = \pi,\ 0 < \pi < 1$. Para cada seqüência de tamanho n, vista como uma amostra de uma população conceitual, um estimador para π é a média amostral $T_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$. Mostre, usando Borel-Cantelli e a desigualdade de Bernstein, que

$$T_n \xrightarrow{q.c.} \pi.$$

6. Seja $\{X_n;\ n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $\mathrm{E}(X_j) = \mu_j < +\infty$, para $j \geq 1$. Mostre que se, para algum $\delta \in (0, 1]$ vale

$$\frac{1}{n^{1+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\Big(|X_j - \mu_j|^{1+\delta}\Big) \longrightarrow 0, \quad \text{para } n \to +\infty,$$

   então

$$\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad \text{para } n \to +\infty.$$

7. Seja $\{X_n,\ n \geq 1\}$ sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ e $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \sigma^2$. Também, suponha que $\mathbb{E}(X_n - \mu)^4 < \infty$. Usando o lema de Borel-Cantelli, mostre que

$$\overline{X}_n \xrightarrow{q.c.} \mu, \text{para } n \to \infty.$$

8. Prove:

   - a desigualdade de Hájek-Rènyi.
   - $\mathbb{E}|X| < \infty$ se e somente se $\sum_{k \geq 1} kP\{k \leq |X| < k+1\} < +\infty$.
   - A equivalência de Khintchine.