MAE 5835 - Estatística Avançada II
1o semestre de 2014 - Lista de Exercícios 1

1. Para as sequências de números reais a_n e b_n a seguir, verifique se $a_n = O(b_n)$ ou se $a_n = o(b_n)$.

   (a) $a_n = n$ e $b_n = n^2$

   (b) $a_n = n^{-1}$ e $b_n = 1$

   (c) $a_n = n^2$ e $b_n = 6n^2 + n$

   (d) $a_n = 3n$ e $b_n = n^2$

2. Para a_n, b_n, c_n e d_n sequências de números reais, prove que

   (a) Se $a_n = o(b_n)$, então $a_n = O(b_n)$

   (b) Se $a_n = O(b_n)$ e $c_n = O(d_n)$, então $a_n + c_n = O(\max(|b_n|, |d_n|))$.

   (c) Se $a_n = o(b_n)$ e $c_n = o(d_n)$, então $|a_n|^s = o(|b_n|^s)$, para todo $s > 0$.

   (d) Se $a_n = O(b_n)$ e $c_n = o(d_n)$, então $a_n c_n = o(b_n d_n)$

3. Sejam $\{X_n;\ n \geq 1\}$, $\{Y_n;\ n \geq 1\}$ sequências de v.a.'s e $\{b_n;\ n \geq 1\}$, $\{a_n;\ n \geq 1\}$ sequências de números reais (ou variáveis aleatórias). Prove os seguintes resultados.

   (a) Se $X_n = o_p(a_n)$ então $X_n = O_p(a_n)$.

   (b) Se $X_n = O_p(a_n)$ e $Y_n = O_p(b_n)$ então $X_n Y_n = O_p(a_n b_n)$.

   (c) Se $X_n = o_p(a_n)$ e $Y_n = o_p(b_n)$ então $X_n + Y_n = o_p(\max\{|a_n|, |b_n|\})$.

   (d) Se $X_n = O_p(a_n)$ e $Y_n = o_p(b_n)$, então $X_n Y_n = o_p(a_n b_n)$.

4. Seja $\{\mathbf{X}_n; n \geq 1\}$ uma sequência de vetores aleatórios p-dimensionais e $\{b_n;\ b \geq 1\}$ uma sequência de números reais. Prove que

$$\mathbf{X}_n = O_p(b_n) \text{ se e somente se } X_{nj} = O_p(b_n), \text{ para } j = 1, 2, \ldots, p.$$

5. Seja $\{X_n;\ n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade dada por

$$P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

   Prove que $X_n = o_p(1)$.

6. Seja $\{X_n;\ n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $X_i \sim \exp(\lambda)$. Defina a sequencia $\{Y_{n:1};\ n \geq 1\}$, em que $Y_{n:1} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Prove que $Y_n = O_p(1/n) = o_p(n^{\alpha})$, $\forall \alpha > -1$.

7. (Para a solução deste exercício é interessante ler a Definição 1.3.1 e Teorema 1.3.2 nas páginas 19 a 22 do livro do 9o. SINAPE - Métodos Assintóticos em Estatística). Sejam f_1, f_2, g_1, g_2 e g funções reais de variável real e $x_o \in \mathbb{R}$. Mostre que:

   (a) Se $f_1(x) = O(g(x))$ e $f_2(x) = O(g(x))$ quando $x \to x_o$ $(\pm\infty)$, então $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$ quando $x \to x_o$ $(\pm\infty)$.

   (b) Se $f_1(x) = o(g(x))$ e $f_2(x) = o(g(x))$ quando $x \to x_o$ $(\pm\infty)$, então $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$ quando $x \to x_o$ $(\pm\infty)$.

   (c) Se $f_1(x) = O(g_1(x))$ e $f_2(x) = O(g_2(x))$ quando $x \to x_o$ $(\pm\infty)$, então $f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$ quando $x \to x_o$ $(\pm\infty)$.

   (d) Se $f_1(x) = o(g_1(x))$ e $f_2(x) = o(g_2(x))$ quando $x \to x_o$ $(\pm\infty)$, então $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$ quando $x \to x_o$ $(\pm\infty)$.