

MAE 514 - Introdução à Análise de Sobrevivência e Aplicações

2a. Lista de Exercícios - 1o. Semestre de 2014

1. Suponha que T representa o tempo até a ocorrência de um evento, medido de forma absolutamente contínua, com função densidade de probabilidade $f(t)$.

(a) Se $S(t)$ é a função sobrevivência associada a T , mostre que

$$S(t) = \int_t^{+\infty} f(s)ds.$$

(b) Se $\alpha(t)$ é a função taxa de falha (ou função de risco) associada a T , mostre que

$$\alpha(t) = f(t)/S(t).$$

(c) Mostre ainda que

$$S(t) = \exp\{-A(t)\},$$

em que $A(t) = \int_0^t \alpha(s)ds$ é a função taxa de falha acumulada (ou risco acumulado).

2. Supondo a mesma estrutura do exercício anterior, a vida média residual para indivíduos que sobrevivem a t é definida como

$$\text{vmr}(t) = \frac{\int_t^{\infty} (u - t)f(u)du}{S(t)}$$

(a) Mostre que

$$\text{vmr}(t) = \frac{\int_t^{\infty} S(u)du}{S(t)}$$

(b) Qual é a interpretação da vida média residual para $t = 0$?

3. Seja T uma variável aleatória relacionada ao tempo de sobrevivência em uma certa situação. Assume-se que T tem distribuição de Gompertz(1825), cuja função de taxa de falha é dada por

$$\alpha_T(t) = \lambda\gamma^t, \quad \lambda > 0, \gamma > 0.$$

- (a) Encontre expressões para a função densidade de probabilidade e para a função de sobrevivência.
- (b) Construa o gráfico da função de risco com duas curvas, uma para $\gamma > 1$ e outra para $\gamma < 1$. Discuta algumas situações práticas em que seria adequado utilizar essa distribuição, para cada uma das curvas do gráfico. *Sugestão: Considere a função hgomperz da biblioteca eha no R*
4. Você deverá simular dados exponenciais representando tempos de sobrevivência, na presença de censuras exponenciais. Inicialmente você deverá responder de forma clara e com os desenvolvimentos necessários os itens (a) e (b). Posteriormente, com a metodologia proposta nestes itens você deverá escrever um programa (na linguagem que lhe for conveniente) para responder aos itens restantes.
- (a) Discuta como você pode fazer para gerar dados pseudo-aleatórios com distribuição exponencial.
- (b) Suponha que os dados estarão sujeitos a censuras aleatórias, também exponenciais. Admita que as censuras são não-informativas e independentes. Como você faria para que, em média, a proporção de censuras fosse igual a p , ($0 < p < 1$)?
- (c) Utilizando (a) e (b), escreva um programa para gerar dados censurados com distribuição exponencial. Como parâmetros de entrada você deverá fornecer:
- O tamanho de amostra
 - O tempo médio de sobrevivência teórico
 - A porcentagem de censura
- Com o programa desenvolvido, gere amostras de tamanhos $n = 30, 50$ e 300 e porcentagens de censuras iguais a 0% , 30% , 50% e 90% .
- (d) Para cada combinação de tamanho de amostra e porcentagem de censura considerada no item anterior, obtenha os estimadores de máxima verossimilhança para:
- i. O tempo médio de sobrevivência (com o correspondente erro padrão)

- ii. O tempo mediano de sobrevivência (com o correspondente erro padrão)
- iii. Construa gráficos do estimador de máxima verossimilhança para a função de sobrevivência

Organize os resultados em tabelas e gráficos. Procure construí-los de forma a organizar convenientemente os resultados obtidos e facilitar os próximos itens.

- (e) Comente o efeito do aumento da censura, para cada tamanho de amostra, nas estimativas obtidas (tempo médio, mediano e função de sobrevivência) no item anterior.
- (f) Comente o efeito do tamanho de amostra, para cada porcentagem de censura, nas estimativas obtidas (tempo médio, mediano e função de sobrevivência) no item (d).