

M1: Modelagem Estatística para Risco Operacional.



XXI SINAPE NATAL 2014

Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística
20 a 25 de julho de 2014

Praiamar Hotel - Natal-RN

PROMOÇÃO E REALIZAÇÃO



PATROCÍNIO



ORGANIZAÇÃO



Embratur:
20.008452.89.0001-6

Carlos Diniz
Débora Delbem
Guaraci Requena

Modelagem Estatística para Risco Operacional.

21° SINAPE - Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.

Natal, 20 a 25 de julho de 2014.

Prefácio

Em uma breve descrição etimológica do termo *risco operacional*, *risco* se refere à incerteza de se perder, ou de se ganhar e *operacional* se refere à atividade, à uma operação qualquer. Na realidade, risco operacional é definido de diferentes formas em diferentes trabalhos. O Brasil aceita à definição dada no Basileia, que considera como risco operacional a possibilidade de ocorrência de perdas resultantes de falha, deficiência ou inadequação de processos internos, pessoas e sistemas, ou de eventos externos.

Neste texto apresentamos o risco operacional nas instituições financeiras sob o ponto de vista do Acordo de Basileia II, a característica da presença de dependência estocástica entre as variáveis aleatórias em questão, a ferramenta para modelagem de tal dependência (teoria de cópulas) e a alocação de capital regulatório. Como o método usual para alocação de capital regulatório sugerido pelo Acordo de Basileia II superestima tal capital por considerar que as variáveis perdas são perfeitamente dependentes, propomos uma metodologia alternativa, baseada em teoria de cópulas, para o caso bivariado. Tal metodologia modela a dependência entre duas perdas e ainda inclui a opinião de especialistas da área no modelo final. Apresentamos também dois métodos alternativos, método da convolução e método da correlação não-perfeita, e fazemos um estudo de simulação para analisar o comportamento dos métodos abordados no texto.

O presente material é fundamentado em duas dissertações de mestrado, defendidas no Programa de Pós-graduação em Estatística da UFSCar. Trata-se das dissertações de Débora Delbem, intitulada *Risco Operacional: o cálculo do capital regulatório usando dependência* e de Guaraci Requena intitulada *Dependência entre perdas em risco operacional*, ambas orientadas pelo Prof. Carlos Diniz.

O texto é composto por 5 capítulos. No Capítulo 1 introduzimos o risco operacional e eventos que o caracteriza, discutimos alguns aspectos do Acordo de Basileia II e apresentamos outros tipos de riscos financeiros. No Capítulo 2 discutimos a técnica *Loss Distribution Approach*, construímos a função de distribuição da perda operacional agregada e apresentamos o método do somatório para cálculo do capital regulatório. No Capítulo 3 apresentamos ferramentas estatísticas para a modelagem de dependência estocástica e apresentamos métodos de estimação e escolha de cópulas. No Capítulo

4 apresentamos e discutimos uma nova proposta de um método alternativo para o cálculo do capital regulatório e apresentamos duas alternativas ao método do somatório, o método da convolução e o método da correlação não-perfeita. Um estudo de simulação é apresentado no Capítulo 5.

Agradecemos aos colegas de Departamento Teresa Cristina Martins Dias e Márcio Luis Lanfredi Viola pela leitura minuciosa e sugestões que contribuíram para o enriquecimento do texto. Agradecemos também à Associação Brasileira de Estatística (ABE) e à Comissão Organizadora do 21^º SINAPE pela oportunidade que nos foi proporcionada para ministrarmos este minicurso.

São Carlos, 27 de junho de 2014.

Carlos Diniz, Débora Delbem e Guaraci Requena

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Sumário | 5 |
| 1 Introdução ao Risco Operacional | 1 |
| 1.1 Fatos históricos e os principais riscos financeiros | 1 |
| 1.2 Risco operacional | 7 |
| 1.3 Acordo de Basileia II | 10 |
| 2 O LDA e o Método do Somatório | 19 |
| 2.1 <i>Loss Distribution Approach</i> – LDA | 19 |
| 2.1.1 Frequência | 21 |
| 2.1.2 Severidades | 28 |
| 2.1.3 Perdas operacionais agregadas - POAs | 34 |
| 2.2 Método do somatório | 42 |
| 2.2.1 Perda inesperada marginal | 42 |
| 2.2.2 Apresentação do método | 46 |
| 3 Modelando dependência | 51 |
| 3.1 Algumas considerações sobre dependência | 51 |
| 3.2 Tipos, estruturas e medidas de dependência | 53 |
| 3.2.1 Tipos de dependência | 54 |
| 3.2.2 Medidas de dependência | 56 |
| 3.2.3 Estruturas de dependência | 59 |
| 3.3 Cópulas | 59 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.3.1 | Teorema de Sklar | 63 |
| 3.3.2 | Famílias de cópulas | 65 |
| 3.4 | Estimação e bondade de ajuste | 68 |
| 3.4.1 | Estimação de cópulas | 69 |
| 3.4.2 | Bondade de ajuste de um modelo de cópula | 71 |
| 4 | Método para Alocação de Capital | 73 |
| 4.1 | Método da convolução | 73 |
| 4.1.1 | Descrição do método | 74 |
| 4.1.2 | Caso multivariado | 77 |
| 4.2 | Método da correlação não-perfeita | 79 |
| 4.3 | Método proposto | 83 |
| 4.3.1 | Pressupostos | 83 |
| 4.3.2 | Construção | 87 |
| 4.3.3 | Aplicação – Estudo do comportamento teórico do método | 92 |
| 5 | Estudo de Simulação | 99 |
| 5.1 | Comparação entre os métodos | 99 |
| 5.2 | Estimando uma cópula | 103 |
| 6 | Conclusões | 113 |
| | Referências Bibliográficas | 117 |

Capítulo 1

Introdução ao Risco Operacional

Neste capítulo introduzimos o risco operacional, fatos históricos que causaram grandes impactos nas instituições financeiras no que diz respeito a este tipo de risco e eventos que o caracteriza, discutimos alguns aspectos do Acordo de Basileia II, criado pelo principal órgão responsável pela tomada de decisões no que diz respeito ao sistema financeiro internacional e, finalizamos, apresentando outros tipos de riscos financeiros, tais como os de crédito e de mercado.

1.1 Fatos históricos e os principais riscos financeiros

A fragilidade do mercado financeiro mundial se agravou a partir da década de 1970 quando começou a enfrentar uma alta volatilidade e se deparou com algumas crises. Como é argumentado na Análise de Desempenho 4T07 do Banco do Brasil¹, em 1973 o mercado financeiro mundial vivia um momento de intensa volatilidade com o fim do Sistema Monetário Internacional, baseado em taxas de câmbio fixas. A liberação das taxas exigia medidas que minimizassem o risco do sistema. A fragilidade alcançou um nível crítico em 1974, com o registro de distúrbios nos mercados internacionais, como a falha na liquidação de contratos de câmbio ocasionada pela insolvência do *Bankhaus Herstatt*, da Alemanha.

Impulsionados pela presença eminente de uma crise financeira, um grupo de bancos do G10²,

¹Disponível em <http://www.bb.com.br/docs/pub/siteEsp/ri/pt/dce/dwn/AnaliseDesemp4T07.pdf>.

²Conhecido como G10, mas são 11 países-membros: Alemanha, Bélgica, Canadá, EUA, França, Itália, Japão, Holanda, Reino Unido, Suécia e Suíça.

no final de 1974, criou o Comitê de Regulamentação Bancária e Práticas de Supervisão (Comitê de Basileia, ou simplesmente, Comitê), situado no Banco de Compensações Internacionais (BIS). Este comitê é de suma importância por discutir os problemas, soluções e diretrizes do mercado financeiro mundial, como, por exemplo, crises mundiais, tais como, México (1982), Asiática (1997) e Econômica Mundial (2008).

Como o próprio BIS alega, “a missão do BIS é servir os bancos centrais na busca de estabilidade monetária e financeira, para promover a cooperação internacional nessas áreas e para atuar como um banco para os bancos centrais.”³ Já o principal objetivo do Comitê de Basileia é assegurar um nível adequado de capital para proteger e garantir a solidez do sistema financeiro internacional. Como o Banco Central do Brasil reforça, o Comitê de Basileia tem a função de estabelecer recomendações para a padronização das práticas de supervisão bancária em nível internacional⁴.

Por meio de documentos e acordos, o Comitê de Basileia formaliza suas recomendações para o sistema financeiro mundial. Em 1988, o Comitê, através do Acordo de Basileia I (conhecido como Basileia I), definiu e levou o sistema financeiro internacional à utilização de um capital econômico, denominado capital regulatório (CR), provindo das instituições financeiras (IFs) para suportar perdas oriundas do risco de crédito (ver definição no final desta seção). Este capital deve ser alocado pelas IFs junto aos seus respectivos órgãos reguladores⁵. Power (2005) ressalta que a intenção do CR, além de cobrir perdas inesperadas relativas aos riscos assumidos pelas IFs, é a defesa contra risco sistêmico⁶. O Basileia I visava também igualizar a competitividade entre as IFs internacionalmente ativas, minimizando as diferenças entre regras de alocação do capital regulatório de instituição financeira para instituição financeira.

O evento que evidenciou o termo “risco operacional” e que se tornou famoso no cenário mundial foi a falência do *Banco Barings*, em 1995. Como descrito em Cruz (2002), tal falência trouxe pela primeira vez ao público o termo “risco operacional”, passando então a gerar interesse de pesquisadores e gestores do mercado financeiro, haja visto que este risco passaria a se relacionar diretamente com eventuais perdas financeiras consideráveis não associadas a risco de crédito e de mercado. O *Banco*

³Retirado do website <http://www.bis.org>.

⁴Retirado do website <http://www.bcb.gov.br>.

⁵No Brasil, o órgão regulador é o Banco Central do Brasil (BACEN), que é membro efetivo do Comitê de Basileia.

⁶É o risco de uma instituição criar falhas em outras instituições no sistema financeiro, devido à correlação entre as transações bancárias.

Barings, fundado em 1762, foi o banco mais antigo de Londres, Inglaterra. Em 1989 Nicholas Leeson foi contratado pelo banco e seis anos mais tarde seria o principal responsável pela sua falência (Körnert, 2003; Pressman, 1997). Leeson começou a fazer operações fraudulentas em 1992 quando sofreu várias perdas devido a contratos futuros e, logo depois, perdeu milhões de dólares devido a diversas quedas na bolsa de valores de Tóquio. Em 1995, as perdas se acumularam em cerca de 1,6 bilhões de dólares, levando o *Barings* à falência (Körnert, 2003). Como veremos nas definições de risco operacional (denotado por RO), fraudes são exemplos de eventos de RO e, por esta razão, a falência do *Banco Barings* fez com que o mercado financeiro começasse a se preocupar com tal risco.

Uma das maiores fraudes já ocorridas no sistema financeiro ocorreu no Banco Société Générale. O trader Jérôme Kerviel foi responsável por uma fraude recorde de US\$ 7 bilhões. De acordo com um artigo publicado pela Diamond Management & Technology Consultants, o Société Générale falhou em três componentes básicos da gestão de RO, isto é, falhou em ter processos automatizados, cultura de controles internos e controles robustos de acesso a sistemas (Ueno, 2010). Manchetes no mundo todo declararam que essa foi a maior fraude bancária de todos os tempos⁷.

Alguns outros acontecimentos chamaram atenção para o risco operacional e são apresentados na Tabela 1.1.

A maioria dos grandes escândalos envolvendo risco operacional ocorreu na década de 1990 (Tabela 1.1). Segundo Guimarães (2003), essa incidência deve-se provavelmente a três fatores: globalização, competição no sistema financeiro e avanços tecnológicos. Estes fatores ficarão mais claros quando definirmos, na próxima seção, risco operacional. O que podemos adiantar é que perdas resultantes de falhas, em geral, são casos de RO.

Até 1996, o capital regulatório, CR, era recomendado somente para o risco de crédito. Oito anos após o lançamento do Basileia I, em uma emenda adicional, julgou-se necessário a extensão do conceito de CR para o risco de mercado. Mesmo após a falência do *Banco Barings*, o Comitê de Basileia não trouxe recomendações para o RO. No entanto, nessa emenda, houve um avanço muito importante para as IFs e para a modelagem estatística de riscos financeiros: a possibilidade das IFs utilizarem modelos com seus dados internos na mensuração dos riscos (até então o de crédito e de mercado) desde que aprovados pelos respectivos órgãos reguladores. Antes de tal emenda, o CR era determinado através

⁷Ver <http://abcnews.go.com/Business/story?id=4205767>.

Tabela 1.1: Algumas ocorrências em destaque na comunidade financeira internacional.

| Instituição | Evento | Ano | Perda US\$ milhões |
|----------------------------|---|--------------|--------------------|
| Daiwa Bank, New York | Negociação não autorizada de <i>bonds</i> devido à falha em controles gerenciais. | 1984-1995 | 1 100 |
| Sumitomo Corp, London | Negociação não autorizada, fraude e falsificação. | 1986-1996 | 1 700 |
| UK Life-insurance industry | Falta de controle internos | 1988-1994 | 18 000 |
| Standard Chartered , India | Irregularidades no Bombay Stock Exchange | 1992 | 400 |
| Credit Lyonnais | Falta de controle de empréstimos | 1980s, 1990s | 29 000 |
| US banks, retailers | Fraudes em cheques | 1993 | 12 000 |
| London Stock Exchange | Cancelamento do sistema TAURUS | 1993 | 700 |
| Kidder Penbody | Falta de controles internos | 1994 | 200 |
| Morgan Grenfell | Falsidade ideológica | 1990s | 640 |
| Orange Country | Falta de supervisão gerencial | 1994 | 1 700 |
| Barings, Singapore | Controle inadequado das operações futuras | 1995 | 1 600 |
| Deutsche Bank, London | Investimentos sem autorização | 1996 | 600 |
| eBay | Leilões na internet, falha tecnológica | 1999 | 5 000 |

Fonte: [Marshall \(2001\)](#).

de uma taxa fixa chamada Razão de BIS e após a publicação da emenda, uma medida se difundiu amplamente em riscos, a medida VaR (Value-at-Risk) ([Power, 2005](#)), definida no ambiente de RO mais adiante.

Seguindo a ordem cronológica, 2004 foi o ano em que se fez necessária a alocação de capital regulatório para RO pelo Comitê de Basileia. Foram necessários alguns anos desde, a falência do *Barings* e também de diversos outros acontecimentos, para que o Comitê reavaliasse o Basileia I e publicasse, em junho de 2004, o Acordo de Basileia II (conhecido como Novo Acordo, ou simplesmente de Basileia II). Ocorreram também algumas mudanças no mercado financeiro mundial fazendo com

que o Comitê julgasse necessário a publicação deste novo acordo. Jorion et al. (2010) destaca algumas dessas mudanças como: a interrupção da trajetória de unificação econômica e monetária na Europa devido à crise do Sistema Monetário Europeu, em setembro de 1992; no desastre dos títulos de 1994, o Federal Reserve Bank, depois de manter as taxas de juros baixas por três anos, iniciou uma série de seis aumentos consecutivos, o que fez desaparecer um capital global de US\$ 1,5 trilhão; a crise asiática de 1997 e a inadimplência da Rússia, em 1998. Além da recomendação e formalização da preocupação com o RO e o CR para tal, o Basileia II renovou os conceitos de risco de crédito e de mercado, principalmente no que diz respeito à flexibilidade aos modelos internos para o cálculo do CR. Os principais pontos apresentados no Basileia II envolvendo risco operacional são discutidos na Seção 1.3. É importante salientar que esse livro está baseado nos conceitos apresentados no Basileia II.

Na realidade, um pouco antes de 2004, o Comitê já começou a se preocupar com o RO e lançou alguns documentos que também serviram de base para o Basileia II. Dentre estes documentos, destacamos o “Operational Risk”⁸, de 2001, em que o Comitê define RO e exhibe alguns comentários a respeito desse risco (retomando tal definição no Basileia II, como descrito na próxima seção).

Devido ao que foi discutido até aqui, é evidente que o RO deve ser levado em consideração no que diz respeito a sua mensuração, mitigação e proteção. O RO, diferentemente do risco de crédito e de mercado, só traz o aspecto da perda. Não há retorno financeiro do RO com a sua exposição.

Até agora, neste capítulo, comentamos sobre os riscos de crédito, de mercado e, o operacional. Há, no entanto, diversos outros tipos de riscos que merecem preocupação das IFs. Mostramos a seguir alguns desses tipos de risco que devem ser gerenciados pelas IFs para sua proteção. As descrições dos riscos foram dadas pelo BACEN (disponíveis no website <http://www.bcb.gov.br/>) e pelo documento do Comitê de Basileia “Core Principles for Effective Banking Supervision”, de 1997. Descrevemos também, brevemente, com base no BACEN e no Comitê, o risco de crédito e de mercado, os quais já foram mencionados no que diz respeito à alocação de capital recomendada pelo Comitê em 1988 e em 1996, respectivamente.

- **Risco de Crédito:** segundo o BACEN, é o risco de que a contraparte na transação não honre sua obrigação nos termos e condições do contrato. O risco de crédito está presente

⁸Disponível em <http://www.bis.org/publ/bcbsca07.pdf>.

nas chamadas operações de crédito, como empréstimos e financiamentos, em qualquer outra modalidade representada por instrumentos financeiros que estejam no ativo da instituição, seja nas contas patrimoniais, seja nas de compensação.

- **Risco País e Transferência:** risco de país é conceituado, segundo o Comitê, como o risco associado ao ambiente econômico, social e político do país de origem do tomador. Já o risco de transferência é um componente do risco país que surge quando a obrigação do tomador não está denominada na moeda local. A moeda da obrigação pode estar indisponível para o tomador, independentemente de sua condição financeira particular.
- **Risco de Mercado:** segundo o BACEN, é o risco de desvalorização de instrumento financeiro ou de carteira de instrumentos financeiros, decorrente de variação nas taxas de juros, nas taxas de câmbio, nos preços de ações ou nos preços de mercadorias. O risco de mercado está presente nas operações ativas e passivas. Também está ligado aos derivativos, uma vez que se trata de instrumentos financeiros de transferência de risco e proteção contra a volatilidade do mercado.
- **Risco de Taxa de Juros:** segundo o Comitê, refere-se à exposição de uma condição financeira de um banco a movimentos adversos nas taxas de juros. Este risco afeta tanto os ganhos de um banco quanto o valor econômico de seus ativos, obrigações e instrumentos fora do balanço.
- **Risco de Liquidez:** segundo o BACEN, é o risco da instituição tornar-se incapaz de honrar suas obrigações ou de garantir condições para que sejam honradas. Pode ser separado em dois tipos: risco de liquidez de financiamento, que se refere à capacidade de ajustar desequilíbrios no fluxo de caixa por meio de novas captações de recursos e risco de liquidez de mercado, que se refere à capacidade de liquidação de posições abertas em tempo hábil, na quantidade suficiente e a preço justo.
- **Risco Legal:** segundo o BACEN, é o risco de que uma parte sofra uma perda, porque as leis ou regulações não dão suporte às regras do sistema de liquidação de valores mobiliários, à execução dos arranjos de liquidação relacionados aos direitos de propriedade e outros interesses que são mantidos pelo sistema de liquidação. O risco legal também surge se a aplicação das leis ou regulações é pouco clara.

- **Risco Reputacional:** segundo o Comitê, advém de falhas operacionais, falhas para se conformar a leis relevantes e regulamentos, ou outras fontes. Risco reputacional é, particularmente, danoso para bancos, visto que a natureza de seus negócios requer manter a confiança dos seus depositários credores e do mercado em geral.

Omitimos a descrição do risco operacional, pois esse será definido, discutido e exemplificado na próxima seção. Como o próprio Comitê ressalta no *Core Principles for Effective Banking Supervision*, os supervisores bancários precisam entender esses riscos e estar convencidos de que as IFs estão, de fato, os medindo e os gerenciando adequadamente. Os riscos listados acima (incluindo o RO) são, segundo o Comitê, os principais enfrentados pelas IFs.

É evidente que há diversas relações e interseções entre os riscos financeiros. Um terremoto (uma das causas do RO) pode influenciar, e geralmente influencia, fortes quedas nas bolsas de valores, fazendo com que o RO esteja em interseção com diversos outros riscos, como os listados acima.

Outros exemplos de grandes perdas monetárias devido ao RO, um pouco mais recentes daqueles apresentados na Tabela 1.1 são apresentados na Tabela 1.2. Estas duas tabelas, bem como as descrições das perdas dos bancos *Barings* e *Société Générale*, descreve, mesmo que vaga, uma ideia de risco operacional. Formalizamos a ideia na próxima seção. Veremos, também, que sendo o RO tão onipresente nas IFs, além de tomar medidas para mitigá-lo ao máximo, as IFs devem alocar o CR para se protegerem.

1.2 Risco operacional

Nesta seção, definimos e comentamos diversos pontos de vista, presentes na literatura, sobre o RO e também o exemplificamos de acordo com a definição mais formal, em âmbito internacional, dada pelo Basileia II.

Na seção anterior, apresentamos uma ideia geral de RO e alguns eventos de perda associadas a RO. Vimos que o *Barings* chegou à falência devido a fraudes, que o atentado de 11 de setembro de 2001 é um evento em RO, que uma ação jurídica trouxe perdas devido à discriminação no trabalho, que uma falha tecnológica também é um caso de RO. É possível observar a natureza de eventos que estamos nos referindo, tais como, *fraudes, acidentes, falhas, falta de controle, negociação não autorizada, falta*

Tabela 1.2: Outras ocorrências de perdas em RO, complementando a Tabela 1.1.

| Instituição | Evento | Ano | Perda em US\$ milhões |
|-----------------------------------|--|------|-----------------------|
| Bank of New York ¹ | Danos monetários pelo atentado de 11 de setembro. | 2001 | 140 |
| Merril Lynch ² | Acordo extra-judicial por discriminação a mulheres no trabalho. | 2004 | 250 |
| Sumitomo Mitsui ³ | Uso de “key-logger”, programa capturador do que se digita, possibilitando o acesso a senhas e, por consequência, desvios nos recursos. | 2004 | 350 |
| Refco Futures Broker ⁴ | Ocultação de dívida por meio de empresa de diretor e processos de bancos, auditores e advogados. | 2005 | 2 430 |

Fontes: 1 - [Barriga & Rosengren \(2006\)](#), 2 - [McGeehan \(2004\)](#), 3- [Peachey \(2011\)](#), 4 - [Mckay & Mcdonald \(2006\)](#).

de supervisão.

Em uma breve descrição etimológica do termo “risco operacional”, “risco” se refere à incerteza de se perder, ou de se ganhar e “operacional” se refere à atividade, à uma operação qualquer. É evidente que “incerteza de se perder devido à realização de uma operação qualquer” é uma definição deveras ampla que pode conter ambiguidades.

Risco operacional é definido de diferentes formas em diferentes trabalhos. [Jorion \(1997\)](#) considera que RO “refere-se às perdas potenciais resultantes de sistemas inadequados, má administração, controles defeituosos ou falha humana e também inclui fraude e risco tecnológico”. Uma definição mais ampla define RO como “o risco de que as operações sejam ineficientes e ineficazes para executar o modelo de negócios da empresa, satisfazer seus clientes e atender os objetivos da empresa em termos de qualidade, custo e desempenho temporal” ([DeLoach & Andersen, 2000](#)).

A definição mais formal possível é apresentada no Acordo de Basileia II ([Basel Committee on Banking Supervision, 2004](#)). Citando o parágrafo 644:

“Operational risk is defined as the risk of loss resulting from inadequate or failed internal processes, people and systems or from external events. This definition includes legal risk, but excludes strategic and reputational risk.”^a

^aNote que essa definição é similar a que foi definido por [Jorion \(1997\)](#).

Pela Resolução do BACEN 3.380/2006 (Banco Central do Brasil, 2006) o Brasil aderiu à definição dada no Basileia II e no artigo 2º a reforça:

[...] define-se como risco operacional a possibilidade de ocorrência de perdas resultantes de falha, deficiência ou inadequação de processos internos, pessoas e sistemas, ou de eventos externos.

O documento Banco Central do Brasil (2006) ainda observa que tal definição inclui o risco legal associado à inadequação ou deficiência em contratos firmados pela instituição, bem como às sanções em razão de descumprimento de dispositivos legais e às indenizações por danos a terceiros decorrentes das atividades desenvolvidas pela instituição. Alguns termos desta definição são apresentados na Tabela 1.3.

Tabela 1.3: Alguns termos da definição de RO segundo Basileia II.

| | |
|-------------------------|---|
| Processos | falha no registro, processamento ou liquidação de transações, contas de clientes, negócios diários e falhas na apresentação de relatórios obrigatórios. |
| Pessoas | perdas causadas por colaboradores ou com participação indireta destes (de maneira intencional ou não), ou advindas pelo relacionamento com clientes, acionistas ou terceiros. |
| Sistemas | perdas decorrentes da interrupção de negócios ou falha de sistemas, causados pela indisponibilidade de infra-estrutura ou recursos de TI. |
| Eventos externos | perdas causadas por terceiros, danos a patrimônios ou ativos. |

É possível notar que as causas do RO, apesar de distintas e heterogêneas, seguem uma mesma natureza e sempre dizem respeito a acidentes, falhas, fraudes etc. A natureza heterogênea vem do fato do RO ter diversas causas diferentes, sendo então necessária uma divisão da IF em pequenos blocos expostos ao RO. Veremos mais adiante que estes blocos levam o nome de *unidades de risco* (ou também *classes de risco*) e para cada uma destas unidades, a IF estuda as perdas operacionais (perdas devido ao RO).

Há ainda uma definição bem abrangente que diz que o risco operacional é todo risco que não seja o de mercado e nem o de crédito. Porém essa definição inclui diversos outros tipos de risco que, muitas vezes, não têm ligação (mesma natureza, porém, como dissemos, há intersecções) aparente com o RO,

como por exemplo: risco país, de transferência, de taxa de juros, de liquidez, reputacional, estratégico, entre outros (Basel Committee on Banking Supervision, 1997). A concordância geral é que os três maiores riscos no sistema financeiro são os: de crédito, de mercado e o operacional.

O documento Banco Central do Brasil (2006) fornece alguns exemplos, para melhor elucidar a definição apresentada pelo Basel Committee on Banking Supervision (2004) (e aderida pelo BACEN no documento Banco Central do Brasil (2006)). Esta definição é a que consideraremos neste livro daqui em diante. Note que os exemplos abaixo reforçam a natureza heterogênea do RO.

Exemplo 1.1. *Eventos associado ao RO:*

- *fraudes internas e externas;*
- *práticas inadequadas relativas aos clientes, produtos e serviços;*
- *danos aos ativos físicos próprios ou em uso pela instituição;*
- *aqueles que acarretem a interrupção das atividades da instituição;*
- *falhas em sistemas de tecnologia da informação;*
- *acidentes de trabalho, internos e externos;*
- *falhas na execução, cumprimento de prazos e gerenciamento das atividades na instituição;*
- *catástrofes naturais como chuva, terremotos, entre outros.*

Definido e exemplificado RO, podemos fazer uma breve discussão sobre algumas diretrizes dadas pelo Comitê no acordo de capitais, Basileia II, seguido por todas as IFs do mundo.

1.3 Acordo de Basileia II

Discutimos nesta seção algumas diretrizes importantes, dadas pelo Comitê, para se trabalhar com o risco operacional. O Acordo de Basileia II é aberto ao público e está disponível na página do BIS (<http://www.bis.org/publ/bcbs107.htm>). Baseado na página do BIS e em outros textos presentes na literatura, descrevemos este Acordo de forma geral.

O Acordo de Basileia II está suportado por, basicamente, três pilares:

- Requisito mínimo de capital;
- Supervisão bancária;
- Disciplina de mercado.

Tais pilares permitiram às IFs e aos órgãos reguladores uma melhor avaliação da exposição aos diversos riscos presentes no mercado financeiro. A seguir, comentamos algumas mudanças ocorridas do Basileia I para o Basileia II.

- O primeiro pilar.

Determina os requerimentos mínimos de capital, mantendo a definição atual de CR, que é, de uma maneira geral, “*o capital econômico exigido pelos órgãos reguladores para cobrir riscos financeiros*”. Deste modo, como já visto, o CR tem como papel assegurar as IFs contra algum tipo de risco, no nosso caso, o RO. Vimos também que o Comitê formalizou a preocupação com a alocação deste capital para os riscos de crédito, de mercado e operacional, fazendo-se necessário o desenvolvimento e estudo de métodos para a mensuração deste capital.

Em suma, o CR para RO é uma forma de seguro, obrigatório para as IFs, que cobre as perdas operacionais inesperadas⁹. É importante salientar que, para entendermos o papel do CR, devemos entender o que significa o termo “perdas operacionais inesperadas”. Quando definirmos perdas operacionais agregadas (POAs) veremos como as IFs classificam suas perdas e podemos, então, compreender o significado de tal termo.

Este pilar, em que o foco deste livro se concentra, é o responsável pela inovação significativa desta nova proposta: a possibilidade das IFs utilizarem modelos internos para a mensuração e administração de seus riscos, abrindo caminho para modelagens estatísticas.

- O segundo pilar.

Foi aprimorado para elevar a eficiência das entidades de supervisão bancária na constatação do cumprimento das exigências mínimas de capital pelas IFs, tendo ainda como papel indutor, contribuir para uma melhoria contínua na gestão de riscos e de processos.

⁹Esta é uma de duas visões que existem de CR.

- O terceiro pilar.

A disciplina de mercado representa outra novidade no novo acordo e está relacionada ao reforço da segurança e da confiabilidade do sistema bancário, através de uma divulgação ampla das exposições ao risco e dos níveis de capital ao mercado, de maneira que a indústria e os investidores possam melhor avaliar o grau de solvência de uma instituição.

Na Tabela 1.4 apresentamos as principais diferenças entre o Acordo de 1988 e o Novo Acordo de 2004.

Tabela 1.4: Principais diferenças entre o Acordo de 1988 e o Novo Acordo.

| Acordo em vigor | Novo Acordo |
|---|--|
| Contempla basicamente a administração do nível mínimo de capital bancário. | Combina a administração eficaz do nível mínimo de capital bancário, a disciplina de mercado e a fiscalização necessária. |
| Tamanho único (modelo padrão). | Mais ênfase nas metodologias internas próprias dos bancos. |
| Não exige aprimoramento na gestão do risco. | Incentiva uma melhor administração de riscos: quanto melhor o controle interno, menor o capital mínimo requerido. |
| Foco em uma mensuração única de risco, não propiciando grandes diferenciações entre riscos. | Propicia uma maior diferenciação entre riscos, gerando capitais mínimos para riscos de Crédito, Mercado e Operacional. |

Fonte: Guimarães (2003).

Este Novo Acordo não é simplesmente um ajuste às boas práticas da indústria, como foi feito para o caso do risco de crédito e de mercado. Atualmente é o Comitê de Basileia que está tentando definir as melhores práticas, calcadas basicamente sobre a definição de risco operacional (Herring, 2002).

A partir de agora, focamos as discussões no primeiro pilar. De acordo com este pilar, Basileia II propõe três abordagens para o cálculo do capital regulatório em risco operacional:

- BIA (*Basic indicator approach*) – Abordagem Básica;
- SA (*Standardized approach*) – Abordagem Padronizada;
- AMA (*Advanced measurement approach*) – Abordagem Avançada.

Devemos dar atenção ao fato de que o termo “abordagem” para o cálculo do CR é diferente do termo “método” para tal cálculo. O método fornece diretamente o valor do CR. Já a abordagem é mais geral, fornecendo um conjunto de especificações quantitativas e qualitativas em que os métodos se baseiam; é como se os métodos “residissem” nessas abordagens. No próximo capítulo veremos que existem subclasses para tais abordagens (modalidades), especificando ainda mais onde os métodos residem.

Para determinar a quantidade de CR é necessário estabelecer métodos, garantindo assim a consistência exigida pelo segundo pilar. [Alemany et al. \(2013\)](#) dizem que, para medir os riscos operacionais e criar regras de proteção para as empresas e para a sociedade, como a alocação de reservas de capital para estas despesas, é necessário que se desenvolvam técnicas precisas de mensuração sobre bases de dados confiáveis. Ainda, segundo os autores, um dos problemas mais comuns em se mensurar o risco operacional é a dificuldade de isolar o elemento “perda operacional” de outros tipos de perdas, ou seja, existe uma correlação entre as distintas perdas e a mensuração desta correlação costuma ser um grande desafio quando se estuda os riscos operacionais.

As abordagens Básica, Padronizada e Avançada são descritas a seguir.

Abordagem Básica

A BIA exige que os bancos retenham capital para o risco operacional equivalente a uma dada porcentagem, chamada de fator α , de um indicador simples, como, por exemplo, a receita bruta. Esta parte do princípio de que quanto maior o resultado bruto de uma transação, maior será o seu risco operacional. A simplicidade desta metodologia, bem como sua pouca relação com risco, não proporciona incentivos para sua utilização. Além disso, esta abordagem não requer exigências qualitativas.

Abordagem Padronizada

A Abordagem Padronizada (SA) é similar à BIA, exceto pelo fato de que as atividades bancárias são divididas em oito linhas de negócio, e o capital pode ser calculado pelo produto de um indicador de exposição de linha por um fator fixo, denominado fator beta (ver Tabela 1.5).

A complexidade de implementação, neste caso, aumenta um pouco visto que é necessário o cálculo dos resultados por linhas de negócios o que, para muitos, implicará em adaptações de processos que permitam a segregação das atividades em tais linhas de negócios. No entanto, assim como o Método de Indicador Básico, a Abordagem Padronizada não proporciona incentivos para a sua utilização.

Tabela 1.5: Linhas de negócios e respectivos fatores de riscos.

| Linha de Negócio | Fatores |
|--|----------------|
| Varejo | 12% |
| Comercial | 15% |
| Finanças corporativa | 18% |
| Negociação e venda | 18% |
| Pagamentos e liquidações | 18% |
| Serviços de agente financeiro e custódia | 15% |
| Administração e Ativos | 12% |
| Corretagem de varejo | 12% |

Diferentemente da BIA, as instituições que optarem por adotar a abordagem SA devem atender alguns critérios de qualificação. Mesmo com a necessidade de testes e verificações futuras, a SA parece apresentar uma melhor sensibilidade ao risco do que a BIA. Isto porque, quanto maior a desagregação (divisão em várias linhas de negócio, neste caso), maior a sensibilidade em si, além de prover uma estrutura do mapeamento interno para o gerenciamento do risco operacional. Além disso, para estas abordagens, os bancos não são obrigados a coletar e usar base de dados de perdas.

Abordagem Avançada

A Abordagem Avançada (AMA) é uma alternativa flexível, pois permite que instituições financeiras desenvolvam seu próprios modelos internos de mensuração para a alocação de capital, desde que atendam exigências dos tipos gerais, qualitativas e quantitativas. Caso a instituição opte pelo AMA é necessário a aprovação do Órgão Supervisor que avaliará os requerimentos necessários para o cálculo do capital. Além disso, todas as exigências deverão ser cumpridas com pelo menos um ano de antecedência à implementação do Novo Acordo.

Hoje, grande parte das instituições financeiras lidam com esta abordagem, pois, assim, tem a liberdade para optarem por metodologias, estatísticas ou não, de cálculo do CR usufruindo de seus dados internos e, conseqüentemente, obtendo um CR mais próximo do real (previsto para o ano seguinte) – inclusive o Comitê determina que as instituições financeiras, internacionalmente ativas, prefiram a AMA. Este livro está inserido, completamente, em tal abordagem. A AMA, apesar de exigir mais investimentos, é a que traz mais incentivos às instituições financeiras.

As instituições que optarem pela AMA deverão determinar o capital para cada célula *tipo de risco* × *linha de negócio*, o qual Frachot et al. (2001) denominam por classe de risco. O documento [Basel Committee on Banking Supervision \(2004\)](#) define 8 linhas de negócio e 7 tipos de riscos operacionais, apresentados na Tabela 1.6. Assim, segundo tal documento, serão necessárias até 56 estimativas de requerimento para se obter o total de capital exigido para cobrir os gastos que envolvam o RO. No entanto, cada IF pode classificar suas classes de risco à sua maneira, podendo ter mais ou menos do que 56 classes de risco.

O Comitê de Basileia sugere duas modalidades para o cálculo do CR para o RO dentro da AMA:

- IMA (*Internal measurement approach*) – Modelo de mensuração interna;
- LDA (*Loss distribution approach*) – Modelo de distribuição de perdas.

Apesar de citar estas alternativas, a regulamentação deixa em aberto a possibilidade do uso de outros modelos desenvolvidos internamente pelas IFs. Porém, estas modalidades devem também respeitar critérios qualitativos e quantitativos estabelecidos pelo Novo Acordo, como as exigências de que se tenha uma base histórica de perdas operacionais de, no mínimo, 3 anos e que o VaR tenha um intervalo de confiança de 99,9% no período de 1 ano.

Tabela 1.6: Tipos de perda e linhas de negócio no RO.

| Tipo de Risco | Linha de Negócio |
|--|------------------------------------|
| 1. Fraude Interna | 1. Finanças Corporativas |
| 2. Fraude Externa | 2. Negociações e Vendas |
| 3. Práticas dos Empregados e Segurança do Trabalho | 3. Atividades Bancárias de Varejo |
| 4. Clientes, Produtos e Práticas de Negócios | 4. Atividades Bancárias Comerciais |
| 5. Danos a Ativos Físicos | 5. Pagamentos e Liquidações |
| 6. Interrupção dos Negócios e Falhas de Sistemas | 6. Serviços de Agência |
| 7. Execução, Entrega e Gestão dos Processos | 7. Gestão de Ativos |
| | 8. Corretagens |

O IMA e o LDA permitem que os bancos usem seus dados de perdas internas para estimar a verossimilhança, frequência e a severidade das perdas¹⁰. A frequência e a severidade podem ser representadas por um único valor como no caso do IMA, ou por suas distribuições de probabilidade como no LDA.

A Figura 1.1 apresenta um esquema do que foi discutido até aqui sobre o Basileia II e suas abordagens para o RO.

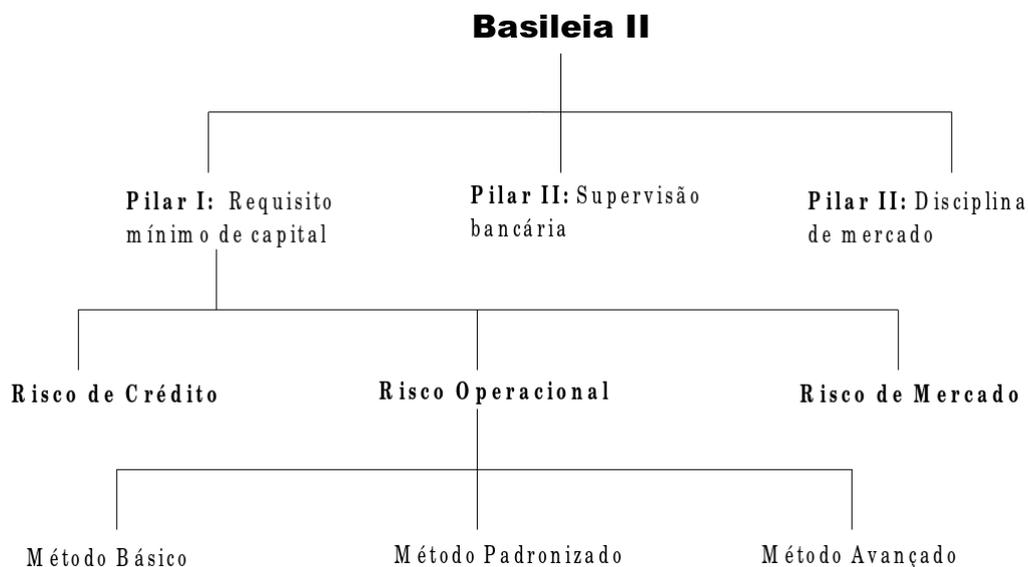


Figura 1.1: O Acordo de Basileia II e suas abordagens para o RO.

¹⁰Definidas no próximo capítulo

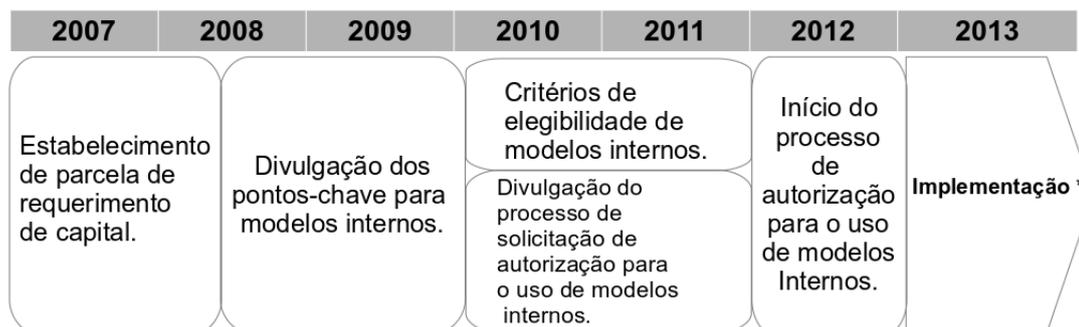
No Capítulo 2 apresentamos e detalhamos o LDA em termos matemáticos e estatísticos pois é a modalidade mais difundida na literatura e presente nas exigências quantitativas do Comitê, além de ser aquela em que a grande maioria dos métodos estatísticos se baseia. Toda a discussão estatística abordada neste livro com relação ao RO e aos métodos para o cálculo do CR reside no LDA.

Pela importância neste estudo apresentamos a agenda do mercado financeiro brasileiro, a descrita pelo BACEN no Comunicado nº 019028 ([Banco Central do Brasil, 2009](#)):

- I – até o final de 2009: estabelecimento dos critérios de elegibilidade para adoção de modelos internos para apuração do requerimento de capital para risco de mercado; divulgação do processo de solicitação de autorização para uso de modelos internos para apuração do requerimento de capital para risco de mercado; e divulgação dos pontos-chave para formatação de base de dados para sistemas internos para apuração de requerimento de capital para risco operacional;
- II – até o final do primeiro semestre de 2010: início do processo de autorização para uso de modelos internos para apuração do requerimento de capital para risco de mercado;
- III – até o final de 2010: estabelecimento dos critérios de elegibilidade para a implementação da abordagem baseada em classificações internas para apuração de requerimento de capital para risco de crédito; e divulgação do processo de solicitação de autorização para uso da abordagem baseada em classificações internas para apuração de requerimento de capital para risco de crédito;
- IV – até o final de 2011: estabelecimento dos critérios de elegibilidade para adoção de modelos internos de apuração de requerimento de capital para risco operacional; e divulgação do processo de solicitação de autorização para uso de modelos internos de apuração de requerimento de capital para risco operacional;
- V – até o final de 2012: início do processo de autorização para uso das abordagens básica e avançada baseadas em classificações internas para apuração de requerimento de capital para risco de crédito;
- VI – até o final do primeiro semestre de 2013: início do processo de autorização para uso de modelos internos de apuração de requerimento de capital para risco operacional.

Observando o cronograma imposto às IFs pelo documento supracitado, vemos que o uso de modelos

internos na mensuração e estimação do CR para RO é extremamente recente em âmbito nacional. O ano de 2013 é aquele previsto para a autorização do “uso de modelos internos de apuração de requerimento de capital para risco operacional”. É importante dizer que esse cronograma foi ajustado pelo BACEN em 2009 devido ao início da crise financeira mundial em 2007. As IFs no Brasil estão em fase de transição da SA para a AMA, o que torna a discussão presente neste livro atual. Um exemplo disso, é o andamento do Basileia II no Banco do Brasil, mostrado na Figura 1.2, que pode ser visto no website <http://www.bb.com.br>.



*Após a conclusão do processo de Autorização. Fonte: Banco do Brasil.

Figura 1.2: Andamento do Basileia II no Banco do Brasil.

Capítulo 2

O LDA e o Método do Somatório

Neste capítulo apresentamos a técnica estatística *Loss Distribution Approach*, LDA, introduzimos as variáveis frequência e severidades e construímos a função de distribuição da perda operacional agregada, POA, obtida através do LDA, apresentamos o método do somatório, técnica atualmente empregada para cálculo do capital regulatório e comentamos suas principais vantagens e desvantagens.

2.1 *Loss Distribution Approach* – LDA

Por existir muitas ocorrências de diferentes eventos de perdas em RO e pela sua característica heterogênea, as instituições financeiras se dividem em classes que julgam estarem expostas a tal risco. Com esta divisão torna mais fácil observar, gerenciar, mitigar o risco operacional em cada classe de risco do que na instituição como um todo.

Para melhor elucidar esta ideia, considere duas classes de risco, A e B . Suponha que na classe A ocorra muitos eventos de perda (alta frequência) com valores monetários baixos (baixas severidades), e que na classe B ocorra poucos eventos de perda (baixa frequência) com valores elevados (alta severidade). A perda na classe A tem característica bem distinta da perda em B e é natural notar que a mensuração é mais sensível quando feita separadamente.

Como visto anteriormente, uma classe de risco é formado pela combinação de linha de negócio e tipo de risco e o Basileia II sugere 56 classes de risco (8 linhas de negócios e 7 tipos de riscos), mas há classificações mais sofisticadas tendo até 19 linhas de negócios e até 70 tipos de riscos (Anexos 6 e

7 do Basileia II). Para generalizar, supomos que a instituição financeira tenha p classes de risco. No decorrer deste texto, não será necessária a distinção entre linhas de negócios e tipos de riscos.

O LDA é muito popular em ciências atuariais, para determinar a distribuição de probabilidades das perdas operacionais, para, a partir daí, dar toda a base estatística, paramétrica, necessária para a proposta de modelos estocásticos para o cálculo do CR. As instituições financeiras estimam, para cada classe de risco, a distribuição da perda operacional para um determinado horizonte de tempo. Tais perdas, que são variáveis aleatórias, são denominadas “perdas operacionais agregadas” (POAs).

Decidiu-se utilizar o LDA para a mensuração do risco por sua objetividade, uma vez que não necessita da interpretação gerencial dos indicadores de risco, dependendo obrigatoriamente do histórico de perdas observadas para previsão da distribuição de perdas futuras; e por permitir fazer predições, análise de cenários, teste de estresse e análise de custo-benefício - inclusive transferência de risco (Coleman, 2000). O LDA também é utilizado na mensuração de risco de crédito e de mercado e, sob o ponto de vista metodológico, este modelo parece ser menos complicado para ser desenvolvido do que os modelos internos para risco de crédito e de mercado (Frachot et al., 2001). Embrechts & Puccetti (2006) ressaltam que a metodologia mais sensível ao risco (na AMA) é, de longe, o LDA. Segundo Giacometti (2008), esta metodologia é a mais precisa do ponto de vista estatístico, pois utiliza as perdas históricas - frequência e severidade - e é baseada no banco de dados interno de perdas de cada instituição.

É possível salientar, então, que o LDA é uma técnica que necessita das definições de dois conjuntos de variáveis aleatórias: frequências e severidades. Nas duas próximas subseções estas variáveis são discutidas no ponto de vista estatístico e com o apoio do Basileia II.

Finalizamos a seção ressaltando o comentário que o Comitê apresenta, no Basileia II, anexo 6, sobre LDA:

Under the Loss Distribution Approach, the bank estimates, for each business line/risk type cell, the probability distribution functions of the single event impact and the event frequency for the next (one) year using its internal data, and computes the probability distribution function of the cumulative operational loss.

Cruz (2002) traz maiores detalhes sobre estas discussões.

2.1.1 Frequência

Nesta subseção apresentamos a definição da variável aleatória “frequência” dentro do contexto de RO e algumas de suas possíveis distribuições de probabilidades.

Definição 2.1 (Frequência). *É a variável aleatória, denotada por N , que representa o número de vezes que eventos de perda operacional ocorrem dentro de uma classe de risco e em um período de tempo.*

Ou seja, N é um contador de eventos de perda em que esses eventos podem ser de mesma natureza (por exemplo, várias fraudes internas) ou de diferentes naturezas (por exemplo, uma fraude interna e um acidente de trabalho).

É fácil notar que N é uma variável aleatória discreta e positiva, pois é um contador de eventos. N é variável aleatória, pois não se sabe antecipadamente quantos eventos de perda operacional ocorrerão, fixados um período de tempo e uma classe de risco, em que se deseja prever a perda total. Sem perda de generalidade, consideramos que o período de tempo é fixado em 1 ano, similar ao tempo fixado pelo Comitê.

As principais possíveis distribuições de probabilidades utilizadas para representar a variável “frequência” são descritas a seguir .

Poisson

A distribuição de Poisson é, certamente, uma das mais populares em RO devido a sua simplicidade e o fato que se ajusta muito bem a maioria dos dados. Além disso, a propriedade que a soma de variáveis aleatórias independentes Poisson é ainda uma Poisson é extremamente importante no sentido de que a IF pode atualizar o comportamento estocástico da variável frequência, em uma classe de risco, durante o período em que se está observando tal variável, simplesmente atualizando seu parâmetro.

Definição 2.2. *Seja N uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro θ . Denotamos isto por $N \sim \text{Poisson}(\theta)$. Então, a distribuição de probabilidades de N é dada por:*

$$P(N = k) = \frac{e^{-\theta} \theta^k}{k!}, k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

A função de distribuição de N , denotada por F_N , é dada por:

$$F_N(k) = P(N \leq k) = e^{-\theta} \sum_{i=0}^k \frac{\theta^i}{i!}, k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A esperança e variância são dadas por $E(N) = \theta$ e $Var(N) = \theta$.

Em situações em que temos n observações independentes e identicamente distribuídas (iid) de $N \sim Poisson(\theta)$, digamos k_1, k_2, \dots, k_n , então o estimador de máxima verossimilhança para θ é dado por $\hat{\theta}_{EMV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$.

Como ilustração desta distribuição, considere o seguinte exemplo hipotético:

Exemplo 2.1. *Suponha que a IF “Comunidade A” observou todos os dias do mês de junho de 2014 o número de fraudes internas em serviços de agência (classe de risco: “fraudes internas (tipo de risco) em serviços de agência (linha de negócio)”), e construiu o seu banco de dados (Tabela 2.1).*

Note pela Tabela 2.1 que foi registrado uma observação de “frequência” pelo período de tempo prefixado, um dia. Por exemplo, no dia 01/06/14, foram observados 3 eventos de perda operacional (da predefinida classe de risco); já no dia 02/06/14, foram observados 5 eventos, e assim por diante. Temos, então, no total, 31 observações das variáveis “frequências”, denotadas por, N_1, N_2, \dots, N_{31} .

O histograma destas observações é mostrado na Figura 2.1.

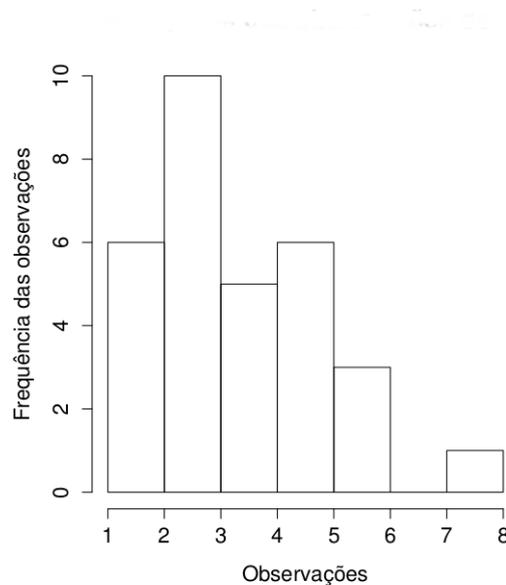


Figura 2.1: Histograma das observações de N .

Tabela 2.1: Número de fraudes internas em serviços de agência.

| DATA | Número de fraudes | DATA | Número de fraudes |
|-------------|--------------------------|-------------|--------------------------|
| 01/06/14 | 3 | 16/06/14 | 2 |
| 02/06/14 | 5 | 17/06/14 | 2 |
| 03/06/14 | 4 | 18/06/14 | 3 |
| 04/06/14 | 5 | 19/06/14 | 2 |
| 05/06/14 | 2 | 20/06/14 | 3 |
| 06/06/14 | 5 | 21/06/14 | 6 |
| 07/06/14 | 6 | 22/06/14 | 4 |
| 08/06/14 | 3 | 23/06/14 | 3 |
| 09/06/14 | 4 | 24/06/14 | 1 |
| 10/06/14 | 4 | 25/06/14 | 8 |
| 11/06/14 | 3 | 26/06/14 | 5 |
| 12/06/14 | 4 | 27/06/14 | 3 |
| 13/06/14 | 3 | 28/06/14 | 3 |
| 14/06/14 | 5 | 29/06/14 | 6 |
| 15/06/14 | 5 | 30/06/14 | 2 |
| | | 01/07/14 | 3 |

Os dados apresentados na Tabela 2.1 foram gerados de uma Poisson com parâmetro 3. Neste exemplo, o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro θ é dado por $\hat{\theta}_{EMV} = 3,77$.

A Figura 2.2 mostra o comportamento da distribuição de Poisson para 4 diferentes valores do parâmetro.

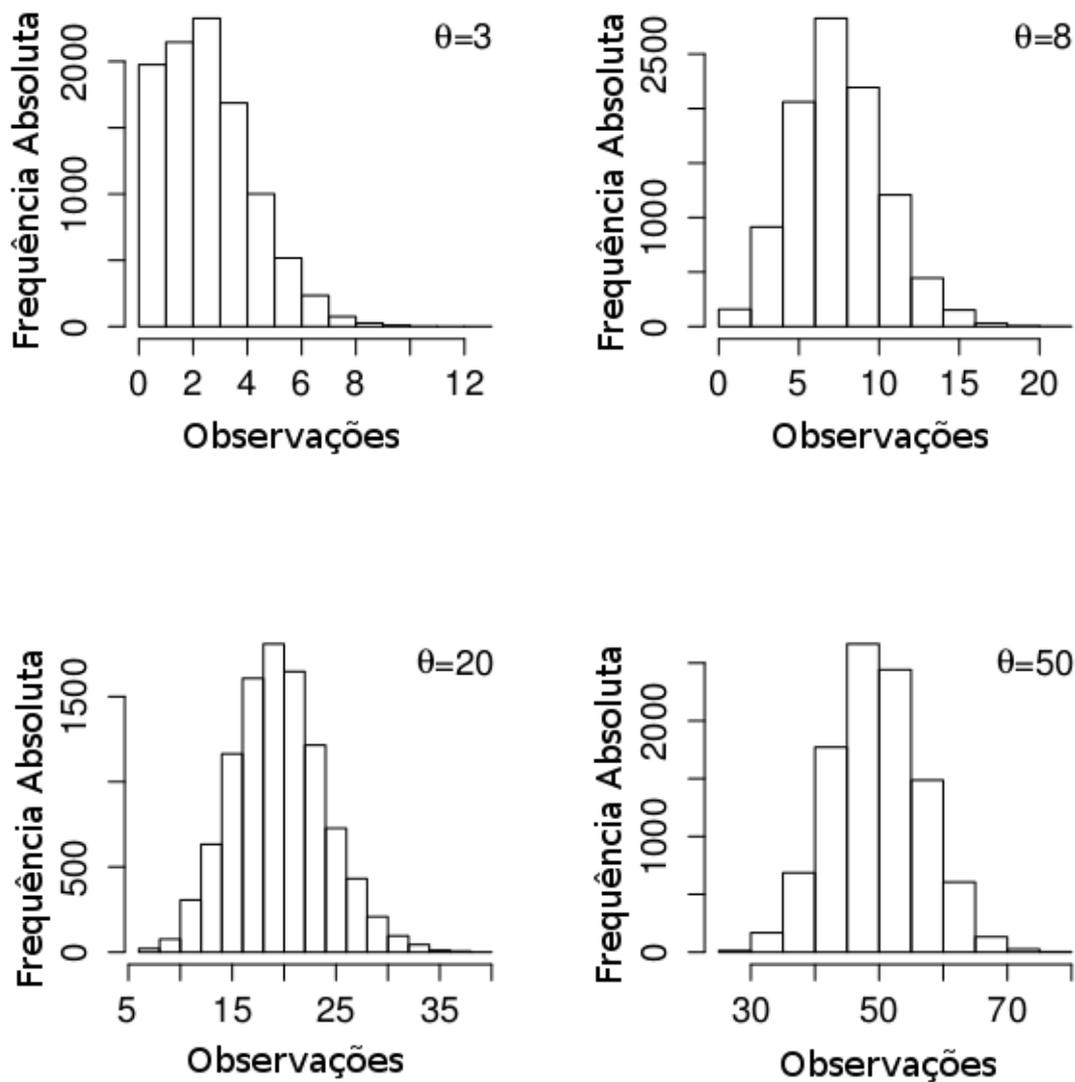


Figura 2.2: Histogramas da Poisson para diferentes parâmetros.

Binomial negativa

A distribuição binomial negativa é, também, popular em RO para modelar a frequência. Esta distribuição envolve dois parâmetros, o que flexibiliza a modelagem da forma.

Definição 2.3. *Seja N uma variável aleatória seguindo distribuição binomial negativa com parâmetros r e p , com notação $N \sim \text{BinNeg}(r, p)$. A distribuição de probabilidades de N é dada por:*

$$P(N = k) = \binom{k+r-1}{k} p^k (1-p)^r, k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2.2)$$

em que k pode ser visto como o número de “fracassos” até a ocorrência do r -ésimo “sucesso”.

Há ainda na literatura uma distribuição alternativa para a binomial negativa em que k representaria o número de experimentos necessários até o r -ésimo sucesso. Neste caso, $k > r$. Consideramos a forma apresentada na Definição 2.2. A esperança e variância são dadas por $E(N) = \frac{pr}{(1-p)}$ e $Var(N) = \frac{pr}{(1-p)^2}$.

A Figura 2.3 mostra o comportamento da distribuição binomial negativa para $p = 0,5$ e 4 valores diferentes de r .

□

Binomial

Uma outra importante distribuição para a variável frequência é a distribuição binomial.

Definição 2.4. *Seja N uma variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros n e p , $N \sim \text{Binomial}(n, p)$. A distribuição de probabilidades de N é dada por:*

$$P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Uma possível interpretação nesta escolha de distribuição é considerar que temos n experimentos independentes em que uma dada perda operacional ocorre ou não. A esperança e variância são dadas por $E(N) = np$ e $Var(N) = np(1-p)$.

A Figura 2.4 mostra o comportamento da distribuição binomial para $n = 50$ e 4 valores diferentes de p .

□

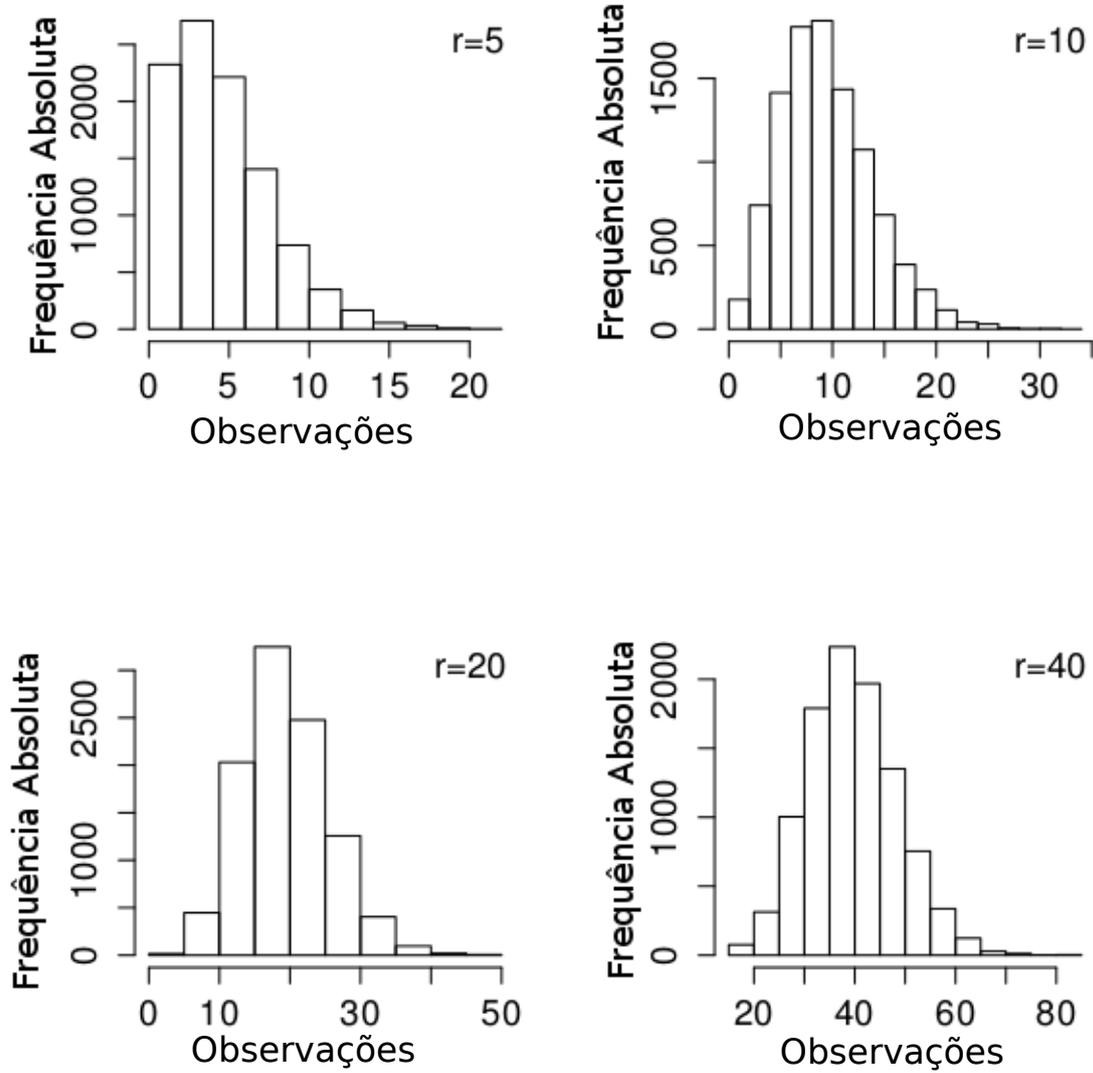


Figura 2.3: Histogramas da binomial negativa para $p = 0.5$.

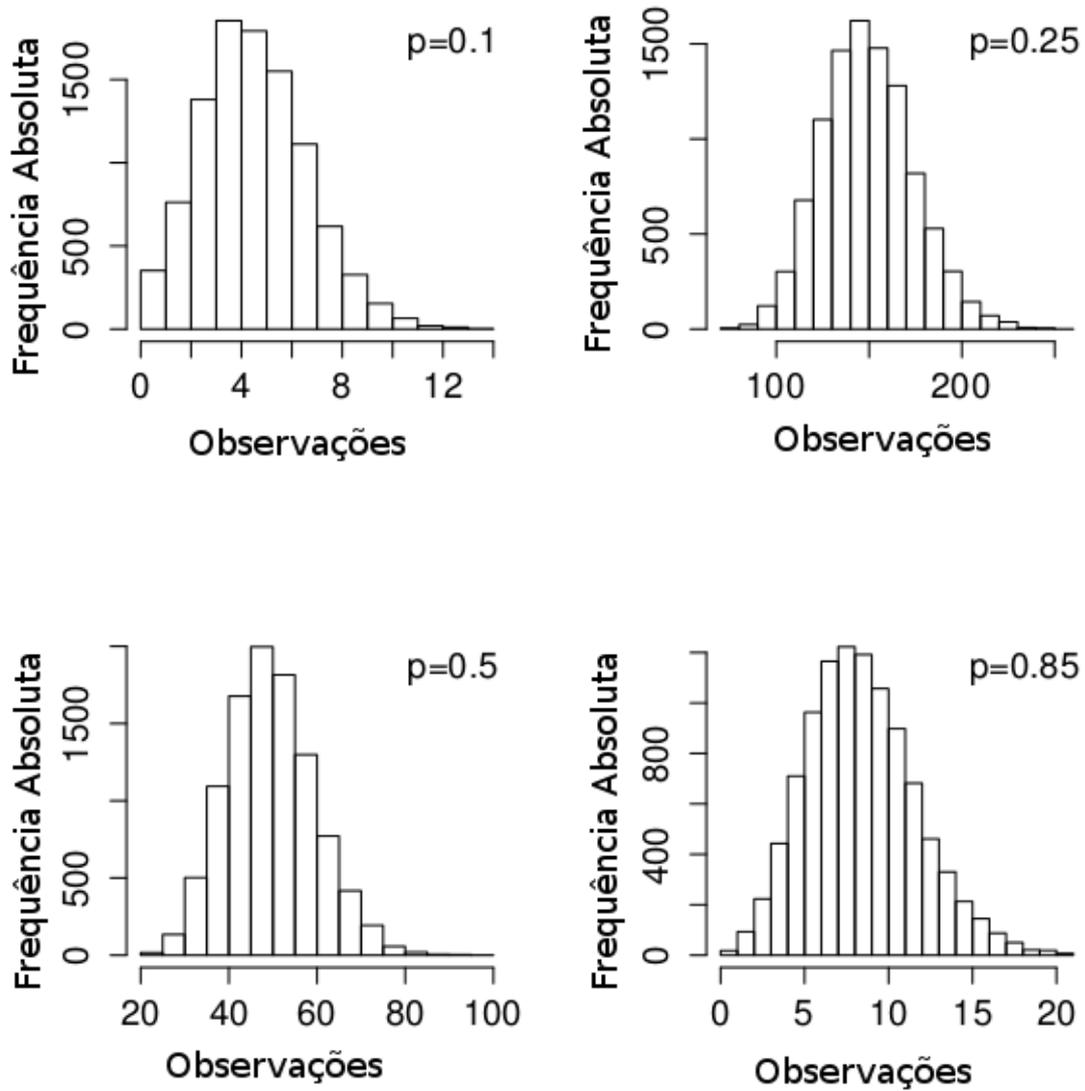


Figura 2.4: Histogramas da binomial para diferentes valores de p .

Hipergeométrica

A distribuição hipergeométrica pode ser ilustrada com o exemplo de bolas na urna. Suponha 50 bolas dentro de uma urna sendo 10 vermelhas. Se quisermos determinar a probabilidade de observar $N = k$ bolas vermelhas em n retiradas, sem reposição, podemos considerar N seguindo uma distribuição de probabilidade hipergeométrica. Em RO poderíamos interpretar como “vermelhas” uma determinada característica de perdas numa dada classe de risco.

Definição 2.5. *Seja N uma variável aleatória com distribuição hipergeométrica com parâmetros n (“número de retiradas da urna”), M (“número total de bolas na urna”) e K (“número total de bolas vermelhas na urna”), a distribuição de probabilidades de N é dada por:*

$$P(N = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{M-K}{n-k}}{\binom{M}{n}}, \quad (2.4)$$

em que $\max(0, n + K - M) \leq k \leq \min(K, n)$.

A esperança e variância são dadas por:

$$E(N) = \frac{nK}{M} \text{ e } Var(N) = n \frac{K}{M} \frac{(M-K)}{M} \frac{(M-n)}{(M-1)}.$$

□

2.1.2 Severidades

Nesta subseção apresentamos a definição e algumas das mais utilizadas distribuições de probabilidades da variável aleatória “severidade” dentro do contexto de RO

Definição 2.6 (Severidades). *São variáveis aleatórias, denotadas por S_1, S_2, \dots, S_N , que representam a gravidade (severidade) em valor monetário, de cada evento operacional ocorrido para cada unidade de risco e para um fixado período de tempo.*

Observe que o conjunto de índices das variáveis aleatórias severidades é o conjunto $\{1, 2, \dots, N\}$, sendo que N representa a frequência. Ou seja, em cada classe de risco observa-se ao longo de um período de tempo, por exemplo um ano, eventos de perda em RO e quantifica-se em valor monetário a perda associada a cada ocorrência. A aleatoriedade das severidades se dá por desconhecer o valor monetário de cada ocorrência. Observe ainda que as severidades, por representarem valores

monetários, são contínuas e sempre assumem valores positivos (pois não há ocorrência de um evento operacional que implique em perda negativa).

Veremos mais adiante, quando discutirmos a construção das POAs através do LDA, que as severidades S_1, S_2, \dots deverão ser identicamente distribuídas. Sendo assim, denotamos por S a variável aleatória que representa a severidade em geral (uma variável auxiliar). Certamente S_1, S_2, \dots seguem a mesma distribuição de S .

A seguir, descrevemos as principais distribuições de probabilidades utilizadas para representar severidades.

Gama

Por serem sempre contínuas e positivas, as severidades podem ser modeladas utilizando, por exemplo, a distribuição gama.

Definição 2.7. *Seja S uma variável aleatória com distribuição gama com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Denotamos isto por $S \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$. Então, a função de densidade de S , denotada por f , é dada por:*

$$f(s) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} \exp(-\beta s), \quad s \geq 0, \quad (2.5)$$

em que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x) dx$.

A esperança e variância de S são dadas por: $E(S) = \frac{\alpha}{\beta}$ e $\text{Var}(S) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

A Figura 2.5 mostra o comportamento de funções de densidade da distribuição gama para diferentes valores dos parâmetros.

Se S segue distribuição gama com parâmetros α e β , os valores monetários de cada ocorrência, S_1, S_2, \dots , seguem distribuição gama com parâmetros α e β . Para melhor elucidar esta ideia, revisitamos o Exemplo 2.1.

Exemplo 2.2 (Exemplo 2.1 revisitado). *Neste exemplo, vimos que a IF “Comunidade A” observou 31 frequências, fixando um dia como o horizonte de tempo. Como visto anteriormente, no dia 01/06/14 ocorreram 3 eventos de perda. Para cada evento há um valor monetário associado (ou seja, uma severidade). Sendo assim, para o dia 01/06/14, temos 3 valores de perda. No dia 02/06/14, temos 5 valores de perda, e assim por diante.*

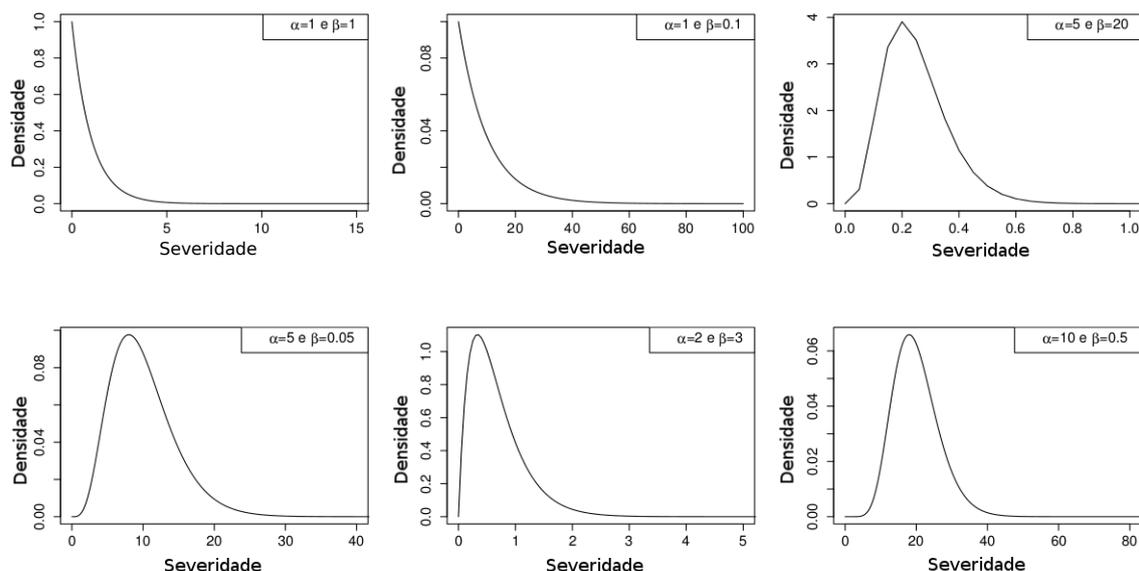


Figura 2.5: Funções de densidade da distribuição gama para diferentes valores de α e β .

Na Tabela 2.2, apresentamos os valores das frequências (como visto na Tabela 2.1) e suas respectivas severidades.

É importante ressaltar que N_1, N_2, \dots, N_{31} não necessariamente devem ter a mesma distribuição de probabilidade. Veremos mais adiante que o LDA exige, para uma mesma classe de risco e o mesmo período de tempo fixados, que as severidades devem seguir a mesma distribuição e serem independentes, e também a frequência e as respectivas severidades devem ser independentes. Neste exemplo, por simplicidade, geramos todas as observações de frequências da mesma distribuição, $Poisson(\theta = 3)$, e as severidades, para os diferentes períodos de tempo (diferentes dias) de uma $\text{gama}(\alpha = 10, \beta = 0, 5)$.

Log-normal

Definição 2.8. Seja S uma variável aleatória com distribuição log-normal com parâmetros μ e σ , $S \sim \text{Log-normal}(\mu, \sigma)$. A função de densidade de S é dada por:

$$f(s) = \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln s - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad s \geq 0 \quad (2.6)$$

A esperança e variância de S são, respectivamente, $E(S) = e^{\mu + \sigma^2/2}$ e $Var(S) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$.

A Figura 2.6 mostra o comportamento de algumas funções de densidade da distribuição log-normal para diferentes parâmetros.

Tabela 2.2: Severidades para o Exemplo 2.1.

| Data | Frequências | Severidades | | | | | |
|----------|-------------|-------------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|
| 01/06/14 | 3 | 17,10598 | 29,89615 | 24,506767 | | | |
| 02/06/14 | 5 | 22,24904 | 19,33393 | 28,873535 | 12,794147 | 16,88249 | |
| 03/06/14 | 4 | 26,82806 | 18,84576 | 31,249266 | 16,460972 | | |
| 04/06/14 | 5 | 27,44174 | 16,82597 | 19,637569 | 19,865926 | 26,11612 | |
| 05/06/14 | 2 | 22,55384 | 30,42209 | | | | |
| 06/06/14 | 5 | 29,05745 | 27,56528 | 29,507600 | 31,905834 | 10,92142 | |
| 07/06/14 | 6 | 25,37400 | 17,10894 | 18,196627 | 11,855946 | 21,71491 | 9,714286 |
| 08/06/14 | 3 | 21,61637 | 17,28026 | 22,609814 | | | |
| 09/06/14 | 4 | 15,23788 | 22,02368 | 25,981740 | 17,462830 | | |
| 10/06/14 | 4 | 14,07445 | 18,06687 | 19,047137 | 29,759434 | | |
| 11/06/14 | 3 | 11,20289 | 23,18064 | 14,947839 | | | |
| 12/06/14 | 4 | 14,74977 | 19,82751 | 26,358160 | 7,464458 | | |
| 13/06/14 | 3 | 19,36877 | 15,61258 | 19,454740 | | | |
| 14/06/14 | 5 | 19,72347 | 36,64580 | 18,558226 | 26,268100 | 13,83402 | |
| 15/06/14 | 5 | 10,13009 | 26,11458 | 9,317069 | 13,654450 | 22,45459 | |
| 16/06/14 | 2 | 21,32792 | 13,10260 | | | | |
| 17/06/14 | 2 | 17,70156 | 12,53960 | | | | |
| 18/06/14 | 3 | 18,34662 | 24,82500 | 16,299589 | | | |
| 19/06/14 | 2 | 31,09987 | 22,30657 | | | | |
| 20/06/14 | 3 | 21,51686 | 16,83555 | 15,366825 | | | |
| 21/06/14 | 6 | 24,20880 | 24,56771 | 15,983748 | 15,976998 | 25,03469 | 11,035476 |
| 22/06/14 | 4 | 15,55736 | 25,66946 | 27,082748 | 11,708001 | | |
| 23/06/14 | 3 | 31,62525 | 21,06592 | 25,606347 | | | |
| 24/06/14 | 1 | 13,36034 | | | | | |
| 25/06/14 | 8 | 19,38800 | 22,48944 | 17,333955 | 22,134015 | 15,40214 | 31,587022 |
| | | 18,36107 | 16,77852 | | | | |
| 26/06/14 | 5 | 10,29684 | 17,07419 | 19,523724 | 19,440067 | 15,10420 | |
| 27/06/14 | 3 | 24,62109 | 16,00494 | 15,942268 | | | |
| 28/06/14 | 3 | 22,35003 | 20,35503 | 20,872891 | | | |
| 29/06/14 | 6 | 16,23743 | 12,49675 | 25,245771 | 28,215965 | 26,21552 | 23,272257 |
| 30/06/14 | 2 | 22,95324 | 14,35662 | | | | |
| 01/07/14 | 3 | 20,21072 | 20,15416 | 29,781647 | | | |

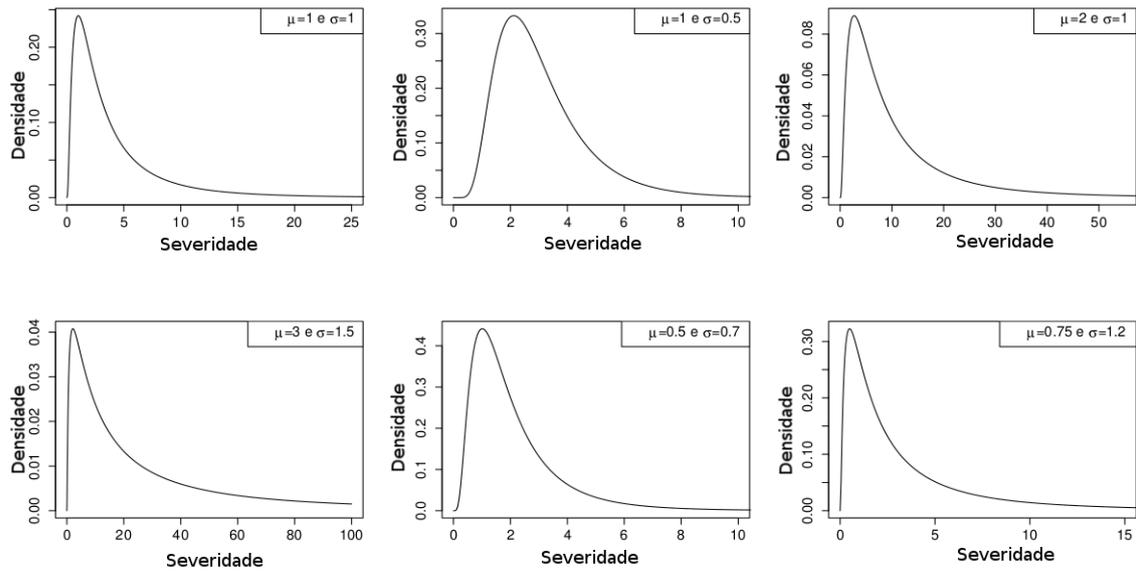


Figura 2.6: Funções de densidade da distribuição log-normal para diferentes valores de μ e σ .

Weibull

Definição 2.9. Seja S uma variável aleatória com distribuição de Weibull com parâmetros $\lambda > 0$ e $k > 0$, $S \sim Weibull(\lambda, k)$. A função de densidade de S é dada por:

$$f(s, \lambda, k) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-s/k^2}, \quad s \geq 0. \quad (2.7)$$

Desta distribuição, temos que:

$$E(S) = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \text{ e } Var(S) = \lambda^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^2 \right].$$

A Figura 2.7 mostra o comportamento de algumas funções de densidade da distribuição de Weibull para diferentes parâmetros.

Pareto

Definição 2.10. Seja S uma variável aleatória com distribuição de Pareto com parâmetros $s_m > 0$ e $\alpha > 0$, $S \sim Pareto(s_m, \alpha)$. A função de densidade de S é dada por:

$$f(s) = \frac{\alpha s_m^\alpha}{s^{\alpha+1}}, \quad s \geq s_m. \quad (2.8)$$

A esperança e variância de S são, respectivamente, $E(S) = \frac{\alpha s_m}{\alpha - 1}$, $\alpha > 1$ e $Var(S) = \frac{s_m^2 \alpha}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}$, $\alpha > 2$.

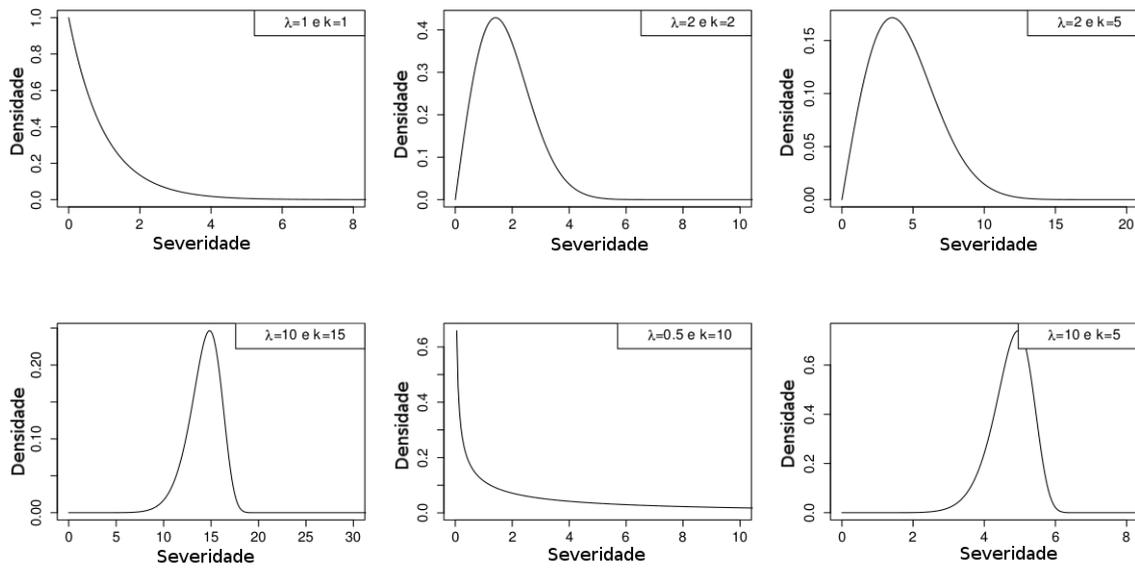


Figura 2.7: Funções de densidade da distribuição de Weibull para diferentes valores de λ e k .

A Figura 2.8 mostra o comportamento de algumas funções de densidade da distribuição de Pareto para diferentes parâmetros.

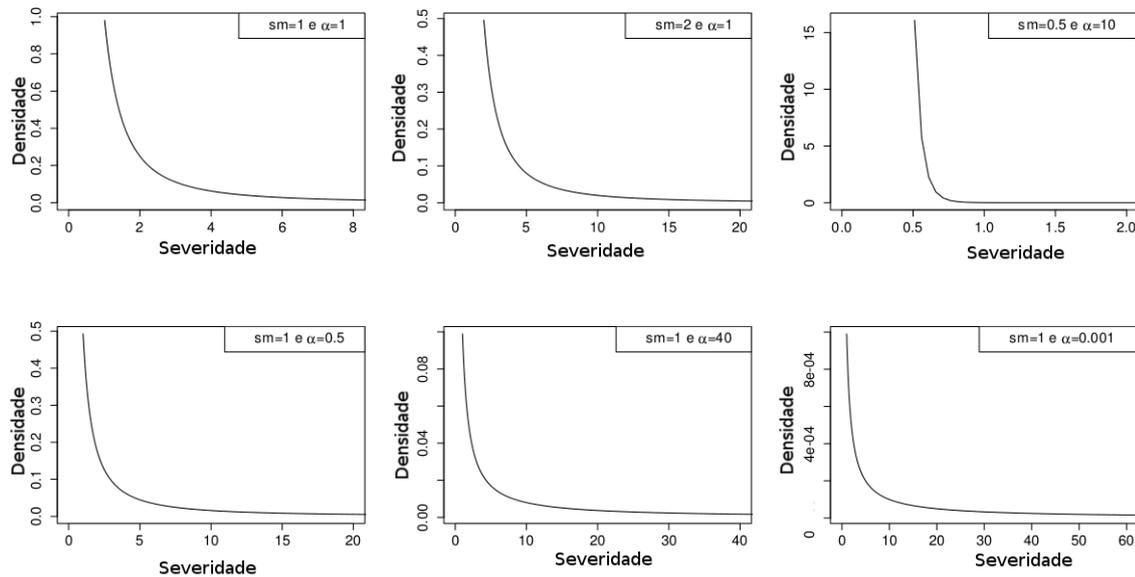


Figura 2.8: Funções de densidade da distribuição de Pareto para diferentes valores de s_m e α .

Definidas frequência e severidades, do ponto de vista estatístico e também sob as exigências quantitativas do Basileia II, teremos no problema $N + 1$ variáveis aleatórias, uma de frequência e N de severidades, para cada classe de risco.

2.1.3 Perdas operacionais agregadas - POAs

Já comentamos que para cada unidade de risco, fixado um período de tempo, existe uma POA associada a esta classe. Intuitivamente, a POA é a perda total para a classe de risco em questão, isto é, a soma de todas as severidades nesta classe e neste período fixados.

Definição 2.11 (Perda operacional agregada). *Seja a frequência e severidades como discutidas acima, com as mesmas notações. Então, a perda operacional agregada para a classe de risco i , denotada por X_i , é dada por:*

$$X_i = \sum_{k=1}^N S_k. \quad (2.9)$$

É fácil notar que cada X_i é uma variável aleatória contínua e positiva, ou melhor, é uma soma aleatória de variáveis aleatórias (pois somamos variáveis aleatórias um número aleatório de vezes N). Considerando que uma IF tenha p classes de risco, esta soma deve ser calculada em cada uma destas classes, obtendo p POAs, X_1, X_2, \dots, X_p . A POA X_i é uma perda marginal, em relação à IF como um todo.

Exemplo 2.3 (Exemplos 2.1 e 2.2 revisitados). *A variável POA também é observável em um fixado período de tempo e uma fixada classe de risco. No Exemplo 2.2, que faz referência ao Exemplo 2.1, em que a IF “Comunidade A” considera o período de tempo como sendo de um dia, para a classe de risco “fraudes internas em serviços de agência”. A Tabela 2.2 apresenta as frequências e respectivas severidades (já observadas, claro). Sendo assim, para cada dia obtemos a respectiva observação da POA como a soma das severidades, como mostrado na Tabela 2.3. Posteriormente, quando apresentarmos o LDA, veremos as alternativas para a IF construir a distribuição de probabilidades para a POA para cada unidade de risco. Com estas distribuições de probabilidades é possível prever as perdas para o próximo período e calcular o CR.*

Como temos interesse na modelagem estatística do RO em relação a alocação de CR pela IF, é evidente que devemos conhecer a distribuição de probabilidade de X_i . A determinação desta distribuição de probabilidade é feito através do LDA. Ou seja, conhecendo as distribuições de S e de N , é possível determinar a distribuição de X .

Na construção da distribuição de X através do LDA é necessário que se assumam 3 pressupostos, listados como segue:

Tabela 2.3: Perdas operacionais agregadas observadas na IF “Comunidade A”.

| DATA | POA | DATA | POA |
|-------------|------------|-------------|------------|
| 01/06/14 | 71.5089 | 17/06/14 | 30.24116 |
| 02/06/14 | 100.1331 | 18/06/14 | 59.47121 |
| 03/06/14 | 93.38406 | 19/06/14 | 53.40644 |
| 04/06/14 | 109.8873 | 20/06/14 | 53.71924 |
| 05/06/14 | 52.97593 | 21/06/14 | 116.8074 |
| 06/06/14 | 128.9576 | 22/06/14 | 80.01757 |
| 07/06/14 | 103.9647 | 23/06/14 | 78.29752 |
| 08/06/14 | 61.50644 | 24/06/14 | 13.36034 |
| 09/06/14 | 80.70613 | 25/06/14 | 163.4742 |
| 10/06/14 | 80.94789 | 26/06/14 | 81.43902 |
| 11/06/14 | 49.33137 | 27/06/14 | 56.5683 |
| 12/06/14 | 68.3999 | 28/06/14 | 63.57795 |
| 13/06/14 | 54.43609 | 29/06/14 | 131.6837 |
| 14/06/14 | 115.0296 | 30/06/14 | 37.30986 |
| 15/06/14 | 81.67078 | 01/07/14 | 70.14653 |
| 16/06/14 | 34.43052 | - | - |

- i) N e $S_k, k \in \{1, 2, \dots\}$, são variáveis aleatórias independentes;
- ii) S_1, S_2, \dots são variáveis aleatórias independentes;
- iii) S_1, S_2, \dots têm a mesma distribuição de probabilidade (marginal).

O primeiro pressuposto indica que frequência e severidade são duas fontes independentes de aleatoriedade. O segundo e terceiro indicam que as perdas ocorridas em uma mesma classe de risco são independentes e identicamente distribuídas.

Observe que o primeiro pressuposto é discutível pois a quantidade de vezes que eventos de perda operacional ocorre está, aparentemente, relacionado com o valor monetário dessas perdas e vice-versa. Frachot et al. (2004) argumentam que o número de perdas e seus correspondentes montantes se movem juntos, isto é, são parcialmente correlacionados.

Já os Pressupostos *ii*) e *iii*) são de maior aceitação, mas ainda assim discutíveis, pois é de se supor que haja dependência intrínseca entre as severidades por estarem todas associadas à mesma unidade de risco. Além disso, se ocorre uma perda muito alta na classe de risco, esta pode influenciar a próxima perda. Uma grande perda em uma classe de risco pode fazer, e deve, com que a gerência tome providências e precauções para mitigar os riscos de próximas perdas de mesma natureza. Com relação ao Pressuposto *iii*), podemos ter um grupo de severidades que dizem respeito à mesma natureza e outro grupo que diz respeito à outra natureza, podendo ter então 2 grupos com distribuições diferentes nesta mesma classe de risco.

Contudo os pressupostos são necessários e aceitáveis, uma vez que, se assim não o fosse, os modelos seriam de complexidade muito elevada e impraticáveis (no entanto, há um problema em aberto na reformulação deste modelo considerando possíveis relações de dependência que não são considerados). Para se ajustar distribuições de probabilidade às POAs por meios não analíticos (pois a solução fechada só existe em casos muito particulares e irrealis no mundo financeiro) os pressupostos são importantes e tornam o ajuste possível.

Feito tais comentários sobre os pressupostos, descrevemos a distribuição de probabilidade de X_i ,

que, por simplicidade, denotamos por X :

$$\begin{aligned}
F(x) = P[X \leq x] &= \sum_{n=0}^{\infty} P[X \leq x, N = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[X \leq x | N = n] P[N = n] \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P \left[\sum_{k=0}^N S_k \leq x | N = n \right] P[N = n] \\
&\stackrel{(**)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P \left[\sum_{k=0}^n S_k \leq x \right] P[N = n], \tag{2.10}
\end{aligned}$$

em que F denota a função de distribuição de X . Note que, na passagem destacada por $(*)$, é usada a definição de X descrita na Equação 2.9 e, na passagem destacada por $(**)$, os pressupostos descritos acima são utilizados. Se $N = 0$ temos, na passagem $(**)$, $F(x) = P[N = 0]$.

As distribuições mais utilizadas para X são as mesmas utilizadas pelas severidades, ou seja gama, log-normal, Weibull e Pareto, mas é importante salientar que na maioria dos casos, salvo alguns casos particulares, não há solução analítica para determinar $P[\sum_{k=0}^n S_k \leq x]$, mesmo com o auxílio dos Pressupostos *ii*) e o *iii*), e recorreremos à aproximações numéricas. Estudos de simulação e métodos de geração de números aleatórios, tais como, métodos MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*), são extremamente úteis para fornecer boas aproximações da distribuição de X .

A Figura 2.9 mostra um esquema da agregação (convolução) das distribuições de frequência e severidades na distribuição da POA.

A determinação da distribuição da POA pode ser feita de diferentes formas.

1. Fixada uma classe de risco, a IF pode aderir uma distribuição de probabilidade para a frequência e uma para as severidades, baseando-se nas observações realizadas ao longo dos anos. Após a escolha, a IF pode utilizar o LDA e obter uma forma analítica para a distribuição da POA para esta classe de risco. A grande vantagem deste procedimento é que a IF só faz aproximações em duas distribuições, a de frequência e a das severidades.
2. Porém, como mencionado, nem sempre é possível proceder desta forma, salvo alguns casos particulares, e uma alternativa para a IF, após ter aderido as distribuições para a frequência e severidades é simular valores da POA e então, a partir destas simulações, aderir uma distribuição para a POA em questão. Ou seja, definidas as distribuições de frequência e severidades, a IF simula valores para tais variáveis e, então, procede como na Equação 2.9, obtendo “observações

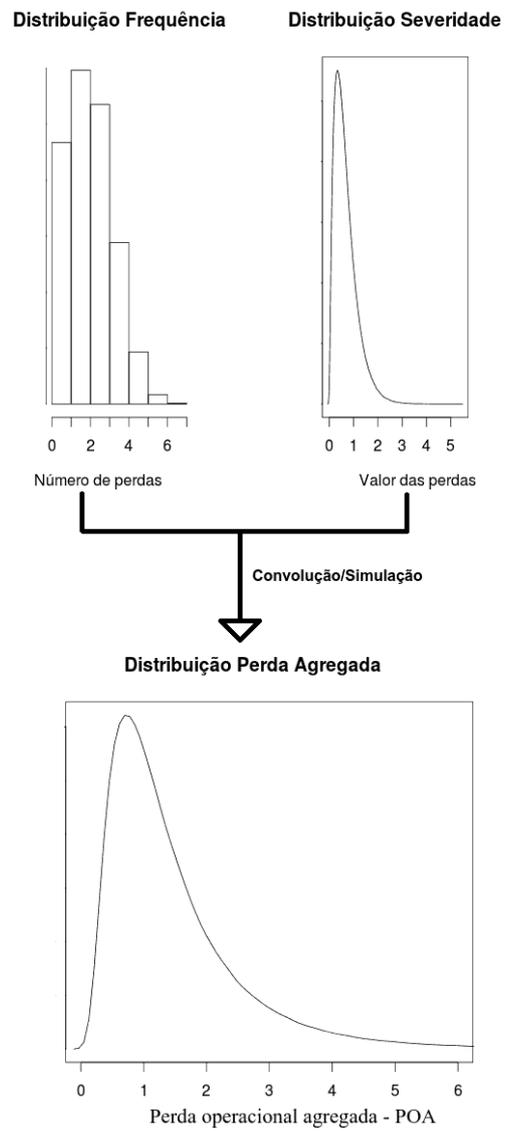


Figura 2.9: Agregação no LDA.

simuladas” da POA. A grande vantagem deste procedimento é que a IF pode obter um número grande de valores simulados da POA, não perdendo de vista que está sempre se baseando nos dados reais internos para frequência e severidades. Com todas as “observações” da POA, a IF pode proceder de distintas maneiras para determinar algumas funções desta POA, como por exemplo média e quantis, quantidades necessárias para dar continuidade à modelagem estatística de risco.

3. Há ainda uma terceira alternativa. Sabemos que as IFs começaram a se preocupar com a mensuração do RO recentemente, concluindo então que estas IFs têm poucos dados da POA para determinada classe de risco. A IF pode se basear somente nestas observações reais, isto é, para cada fixado período de tempo, em uma fixada classe de risco, a IF observa a frequência e as respectivas severidades, obtendo uma observação da POA. Repetindo o processo m períodos de tempo, obtendo m observações da POA, a IF pode, a partir destas observações, modelar o RO. A vantagem deste procedimento é que a IF se baseará apenas em dados reais, mas tem a desvantagem numérica, isto é, poucas observações da POA.

Resumindo estes três pontos discutidos acima¹, temos:

1. Usar o LDA analiticamente: obter a densidade fechada da POA em questão;
2. Usar o LDA numericamente: simular dados para a POA baseando-se nas distribuições já aderidas de frequência e severidades;
3. Aderir uma distribuição para a POA baseando-se em suas reais observações.²

Nos exemplos a seguir, tratamos dos casos 1, 2 e 3 acima, respectivamente. No Exemplo 2.4, apenas indicamos um caso particular em que existe a solução fechada; no Exemplo 2.5 e no Exemplo 2.6, revisitamos novamente os Exemplos 2.1, 2.2 e 2.3 que tratam da hipotética IF “Comunidade A”.

Exemplo 2.4. *Ao considerarmos a distribuição geométrica de parâmetro p para a frequência e a distribuição exponencial de parâmetro λ para a severidade, existe a solução fechada do LDA*

¹Certamente que a IF pode proceder de outra forma que não a discutida aqui.

²Implicitamente, se a IF adere uma distribuição para a POA baseando-se somente nas suas reais observações, está se baseando nas frequências e severidades (mas não está se baseando nas distribuições destas variáveis).

como tratada na Equação 2.10. Através de algebrismos é possível determinar que a distribuição de probabilidade para a POA é a exponencial com parâmetro λp .

Exemplo 2.5. Consideramos aqui as distribuições, pressupostamente determinadas pela IF, Poisson de parâmetro 3 para a frequência e gama com parâmetros $(\alpha = 10, \beta = 0,5)$ para a severidade. Então, utilizando-se do item 2 acima, a IF não necessita estimar a distribuição da POA observando-a, como na Tabela 2.3. A IF pode utilizar as duas distribuições, para a frequência e para as severidades, e considerar simulações de Monte Carlo para criar dados de frequência e severidades. A vantagem deste método é que se a IF tivesse poucos períodos observados e conseguindo estimar as distribuições de frequência e severidades, poderia simular várias observações de POA, facilitando a inferência.

Sendo assim, foram geradas 100000 observações com distribuição de Poisson de parâmetro 3 (frequência) e para cada frequência geramos as respectivas severidades através da Gama(10;0,5). O histograma das POA simuladas é apresentado na Figura 2.10.

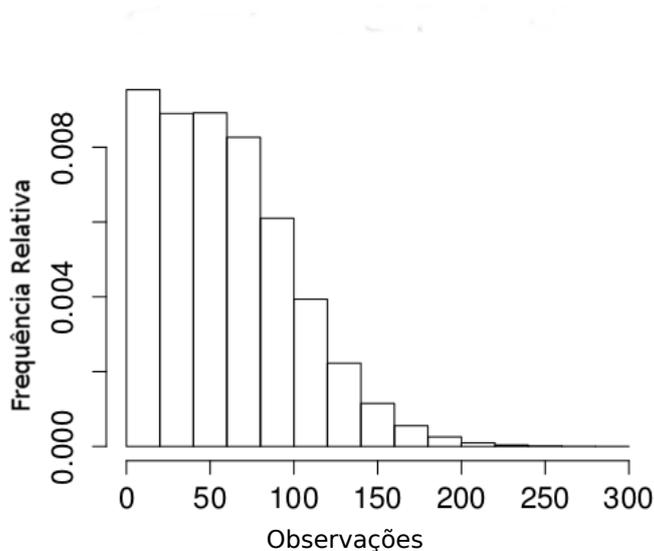


Figura 2.10: Histograma da POA utilizando o LDA numericamente.

Exemplo 2.6. Vimos que o item 3 descrito acima, que trata da estimação da distribuição de probabilidades da POA baseando-se nos valores observados, tem a desvantagem da escassez de dados observados da POA. Note que este caso não se trata diretamente do LDA. Trata-se apenas de observar os dados para as severidades de cada classe de risco e somá-las, ao longo dos anos. Por outro lado,

em situações em que o número de observações é razoável, este caso seria mais vantajoso, uma vez que não seriam necessários as estimações das distribuições de probabilidades de frequência e severidades.

A partir dos valores de POA, dispostos na Tabela 2.3, construímos o histograma, como apresentado na Figura 2.11.

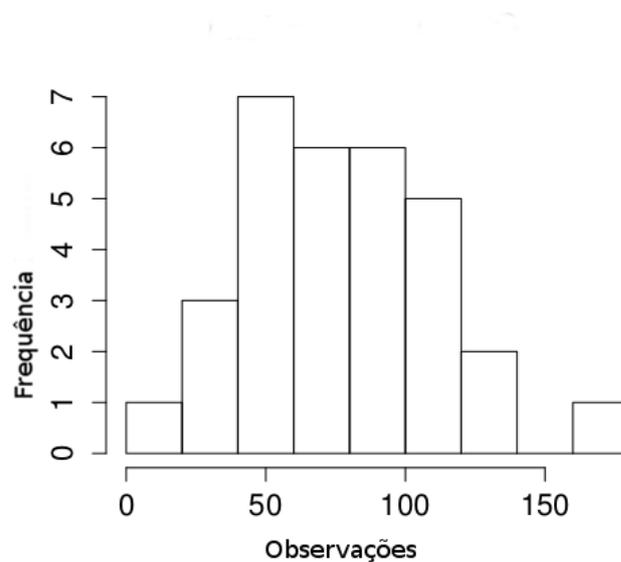


Figura 2.11: Histograma da POA com distribuição de probabilidades construída numericamente através do LDA.

A maioria das modelagens estatísticas em RO considera o LDA para construir a distribuição da POA. Mesmo que os três pressupostos não apresentem concordância, ainda assim é um dos melhores caminhos para se obter a distribuição desejada. O LDA, como na Equação 2.10, pode ser visto como uma convolução de funções de distribuição. Ver Frachot et al. (2001) para mais detalhes de convolução do LDA para o RO. No Acordo de Basileia II é possível encontrar as especificações qualitativas do LDA. A partir desta seção, sempre que tratarmos a POA como uma variável aleatória, estaremos, implicitamente, tratando sua respectiva distribuição de probabilidades construída (analítica ou numericamente) através do LDA.

2.2 Método do somatório

O Comitê de Basileia, através do Acordo de Basileia II, propõe um método para calcular o CR para RO. Este método é referido na literatura como Método do Somatório, ou, simplesmente “método usual”, uma vez que é o mais utilizado pelas IFs internacionalmente ativas. Observando o cronograma dado pelo BACEN para as IFs brasileiras, apresentado no capítulo anterior, é possível perceber que atualmente as IFs nacionais estão transitando para a AMA, e isto exclui o fato de já alocarem capital procedendo pelo método do somatório (pois este reside no LDA que, por sua vez, reside na AMA). A vantagem das IFs nacionais é que já podem observar como as internacionais utilizam suas modelagens para tal alocação e acompanhar as pesquisas científicas na área.

O cálculo do capital regulatório via método do somatório é feito, basicamente, calculando o capital marginal, definido posteriormente, para cada célula tipo de risco \times linha de negócio (classe de risco) e, então, somando todos os capitais. Este método de determinação do capital regulatório implicitamente impõe que todas as POAs para todas as classes de risco são **perfeitamente dependentes**. Ou seja, se a IF utiliza a classificação dada pelo Comitê, tendo, então, 56 classes de risco, utilizar o método do somatório equivale a supor que todas as 56 variáveis aleatórias POAs são perfeitamente dependentes. Discutimos no próximo capítulo uma ferramenta amplamente utilizada para relaxar esta suposição, que modela de fato as relações de dependência estocástica entre variáveis aleatórias, denominada “Teoria de Cópulas”.

[Frachot et al. \(2004\)](#) argumentam que apesar das correlações perfeitas serem aceitas, a soma da carga de capital das diferentes linhas de negócios e tipos de riscos devem ser somados, gerando uma carga de capital maior do que se fosse considerado qualquer grau de correlação entre as distintas linhas de negócios e tipos de perda.

Após definir perda inesperada marginal (subseção [2.2.1](#)), formalizamos o método do somatório e comentamos em detalhes a suposição de dependência perfeita entre as POAs (subseção [2.2.2](#)).

2.2.1 Perda inesperada marginal

Há, basicamente, duas visões do papel do capital regulatório em riscos operacionais. Como definido anteriormente, o CR é o capital econômico mínimo para cobrir as perdas em riscos operacionais.

Porém, a questão principal é: quais são estas perdas que o capital deve cobrir? As duas visões para esta questão são:

- i) cobrir as perdas esperadas e inesperadas;
- ii) cobrir somente as perdas inesperadas.

Ambas as visões excluem o fato do CR ter o papel de cobrir todas as perdas da instituição, e isto exclui, claro, a cobertura de perdas extremas em RO. A visão que consideramos nesse trabalho é a de cobrir somente as perdas inesperadas (veremos a razão posteriormente). Porém, ambas visões dependem da conceituação de perdas esperadas e inesperadas. Contudo, o que é bem definido pelo Comitê e pela literatura sobre o assunto, e também o que é de aceitação geral entre as instituições, é o conceito de “Perdas Esperadas Marginais” (EL marginais) e “Perdas Inesperadas Marginais” (UL marginais). O termo “marginal” está associado à divisão em classes de risco, como já havíamos discutido. Ou seja, para cada classe de risco tem-se bem definidas perdas esperadas e inesperadas.

As definições de perdas esperadas e inesperadas marginais exigem a definição de uma medida muito utilizada no sistema financeiro para aferir o valor que está em risco: a medida VaR (*Value-at-Risk*). O VaR é altamente utilizado em ciências atuárias e representa a volatilidade do que está sendo medido. Particularmente em RO, a definição de VaR operacional, denotado por $opvar$ (ou muitas vezes por $OpVaR$), é o percentil de 99,9% da distribuição de probabilidade de X (sendo X a POA em uma fixada classe de risco i).

Definição 2.12 (VaR Operacional). *Considere X a POA para a classe de risco i . Considere também $F(\cdot)$ a função de distribuição de X .* ³ *Então:*

$$opvarX = F^{(-1)}(0,999) = \inf\{x|F(x) \geq 0,999\}.$$

Se F é uma função contínua e bem definida para todo valor de X , então $opvarX$ é tal que:

$$F(opvarX) = 0,999.$$

Considerar o percentil como sendo de 99,9% é uma recomendação do Comitê, no entanto, isto é uma suposição discutível. assumimos aqui o $opvar$ como definido acima. Existem na literatura

³ X é contínua e só assume valores positivos.

diversas discussões sobre VaR e suas implicações. Há estudos sobre o VaR dentro da teoria de valor extremo e até mesmo com o uso de processos estocásticos que, conseqüentemente, dependem de um tempo t . O que deve-se notar é que o opvar, como definido acima, é um quantil “extremo” e portanto pode haver uma série de problemas ao estimá-lo.

Artzner et al. (1999) apresentam um conceito de “medidas coerentes”. Cruz (2002) argumenta que o opvar, em geral, é uma medida coerente. Não é nosso interesse nos alongar com as discussões atuariais e financeiras a respeito das medidas VaR. Neste texto estamos considerando as distribuições de probabilidade para as POAs que sempre tornam o opvar uma medida coerente. Basicamente, uma medida coerente obedece algumas propriedades que são importantes para se aferir riscos financeiros. Uma propriedade particular, que uma medida coerente tem, é a propriedade da subaditividade, isto é, se ρ é uma medida de risco (quantil, média, moda – uma função das variáveis POAs) e sendo X e Y duas POAs, então ρ é subaditivo quando

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Esta propriedade é importante quando focarmos no cálculo do CR para a IF como um todo, isto é, o CR final.

Definido opvar de uma perda X marginal, podemos conceituar EL marginal e UL marginal em RO.

Definição 2.13. *Considere X representando a POA na classe i :*

- **Perdas Esperadas Marginais:** *são as perdas até a média de X , isto é, $E(X)$ ⁴. Tais perdas são absorvidas pelo valor dos produtos das instituições (transações) e lucros das receitas.*
- **Perdas Inesperadas Marginais:** *são as perdas que estão entre $E(X)$ e opvar X , isto é, opvar $X - E(X)$. O CR tem o papel de cobrir tais perdas (lembrando que temos o interesse de fazer previsões um ano a frente). Na realidade, o CR deve cobrir as perdas inesperadas como um todo.*
- **Perdas Catastróficas Marginais:** *estão além do opvar X e são consideradas extremas. Tais perdas exigem um capital extra e outras formas de seguro. É comum haver um fundo (seguro)*

⁴Coleman (2003) sugere o uso da mediana ao invés da média para que a medida que delimita tais perdas também seja em termos de percentil, assim como o opvar, para facilitar as interpretações.

comum entre as instituições financeiras para cobrir partes dessas perdas, pouco prováveis, mas possíveis.

A Figura 2.12 elucida a definição das perdas dada acima:

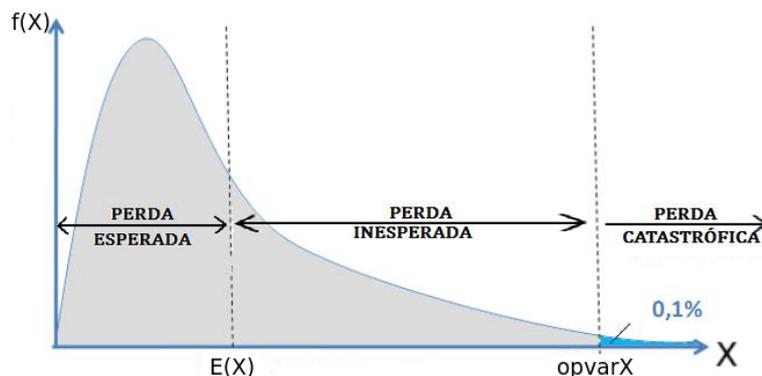


Figura 2.12: OpvarX e a classificação das perdas.

O Comitê, através do Basileia II, afirma:

“Supervisors will require the bank to calculate its regulatory capital requirement as the sum of expected loss (EL) and unexpected loss (UL), unless the bank can demonstrate that it is adequately capturing EL in its internal business practices. That is, to base the minimum regulatory capital requirement on UL alone, the bank must be able to demonstrate to the satisfaction of its national supervisor that it has measured and accounted for its EL exposure. ”

Ou seja, a IF deve ser capaz de mostrar ao seu órgão regulador que suas práticas internas (taxas em transações etc.) cobrem as perdas esperadas. É por esta razão que consideramos a segunda visão do CR supracitada, isto é, por considerar que a maior parte das IFs absorvem bem as perdas esperadas com suas transações internas.

Note que a IF deve alocar um capital, não por classe de risco individualmente, mas sim um capital global, que assegure a instituição inteira, como um único bloco. Isto pode trazer uma complicação do ponto de vista conceitual e este texto está focado exatamente neste ponto. O Comitê define bem o que são perdas inesperadas marginais e também diz que o CR deve ser o capital capaz de cobrir a perda inesperada (que denominamos por perda inesperada total). No entanto, “cobrir a perda inesperada total” e “cobrir as perdas inesperadas marginais” são evidentemente coisas diferentes. O Comitê não

define explicitamente o que é perda inesperada total (que abreviaremos por “UL total”). O método do somatório, proposto pelo Comitê, é a “definição” implícita dada ao termo “UL total”. Distó, surge a principal questão que este texto trata a respeito da alocação de CR para RO:

Questão 2.1. “*O que é perda inesperada total?*”

A resposta para esta questão não é trivial e também não é única. Respondê-la significa propor um CR a ser alocado para RO, um capital que cubra a UL total da IFs. Não existe uma resposta mais correta do que outra, o que há, de fato, são respostas seguras e respostas não-seguras. A literatura dispõe de algumas e, neste texto apresentamos a nossa proposta.

Para finalizar esta seção, destacamos a definição de UL marginal dada na Definição 2.13.

Definição 2.14 (Perda inesperada marginal). *A UL marginal na classe de risco i , cuja perda é representada por X , denotado por $UL(X)$, é dada por:*

$$UL(X) = opvarX - E(X) = F^{(-1)}(0,999) - E(X).$$

Com as definições de UL marginal e UL total, temos as ferramentas necessárias para apresentar o método do somatório.

2.2.2 Apresentação do método

A dependência entre as POAs utilizada atualmente é a perfeita, como já discutido. Neste caso a instituição calcula o capital exigido para cada classe de risco. Assim, o CR para cobertura do RO, é obtido pelo método do somatório, em que **o requerimento de capital, obtido em cada classe de risco, é somado.**

[Embrechts et al. \(2003\)](#) afirmam que se toda dependência entre as distribuições de perdas agregadas pudessem ser mensuradas pela correlação, ao somarmos a carga de capital para cobertura de RO estaríamos supondo que as classes de risco são perfeitamente correlacionadas. Isso implica que todos eventos extremos de perda operacional devem ocorrer ao mesmo tempo em todas as classes de risco, o que é uma hipótese irreal.

Em [Frachot et al. \(2004\)](#) é mostrado que quando consideramos a correlação perfeita entre duas perdas agregadas, digamos X e Y , referentes a duas diferentes classes de risco, ocorre:

$$opvar(X + Y) = opvar(X) + opvar(Y).$$

Como já discutido, o Comitê responde a Questão 2.1 com o método do somatório. Supondo que a IF tenha p classes de risco, a UL total é:

$$UL_{TOTAL} = \sum_{k=1}^p UL(X_i) = \sum_{k=1}^p (opvar X_i - E(X_i)), \quad (2.11)$$

em que X_i é a POA para a i -ésima classe de risco.

Então, pelo Comitê, o CR que a IF deve alocar para o RO para o próximo período de tempo, denotado por CR_{SOMA} é dado por:

$$CR_{SOMA} = UL_{TOTAL} = \sum_{k=1}^p (opvar X_i - E(X_i)). \quad (2.12)$$

O próprio Comitê no documento consultivo [Basel Committee on Banking Supervision \(2001a\)](#) afirma:

“The Committee is therefore proposing a simple summation of the capital charges across bussines line/loss type cells.”

Aparentemente, o método considera independência entre as classes de risco, pois a UL marginal é modelada separadamente, ou seja, tratado de forma independente; tais capitais são somados para obter uma agregação de risco para a IF. Porém, na hora em que é proposto a soma das UL marginais como sendo a UL total, implicitamente, considera-se dependência perfeitamente positiva entre todas as classes de risco.

Isto ocorre pois, ao usarmos o método do somatório, e supondo duas POAs X e Y , estaremos cobrindo todas as duas ULs marginais ao mesmo tempo, mas a questão que estamos discutindo é que este caminho é extremamente conservador. Cobrir a UL marginal em X , pode estar ao mesmo tempo cobrindo uma parte da UL marginal em Y .

O método do somatório em si é extremamente simples. Porém, a suposição de dependência perfeita positiva (crucial para a motivação deste trabalho e para estudos de métodos alternativos para alocação de CR) incomoda, de certa forma, as IFs. Esse incômodo se dá pelo fato de, primeiro, tal suposição fugir à realidade e, segundo, por superestimar em níveis extremamente conservadores o CR.

Então, não é por acaso e nem somente pela facilidade analítica, de implementação computacional e de interpretação (que são consideradas vantagens do método) que o Comitê o propõe (e que também é aceito facilmente pelos órgãos reguladores), mas pelo fato de tal método ser extremamente conservador

no que tange a alocação de capital (agregação de riscos), fazendo com que as instituições aloquem mais capital do que o necessário.

Propriedade 2.1 (Método do somatório). *Se a instituição financeira utiliza o método do somatório para obter a perda inesperada total (e então determinar um CR total a ser alocado para o ano seguinte), então tal instituição está impondo que todas as suas classes de risco, i.e., que todas as variáveis aleatórias POA's, denotadas por X_1, X_2, \dots, X_p , supondo p unidades de risco, têm dependência perfeitamente positiva⁵.*

O senso comum sugere que eventos em RO podem ser, pelo menos, parcialmente não-correlacionados. Na verdade, supor que todas as perdas graves em RO ocorrem simultaneamente e de forma sistemática no mesmo ano é bastante duvidoso e dificilmente apoiado por evidências empíricas. Então, em certo sentido, seria exatamente como se tudo desse errado ao mesmo tempo para todo par linha de negócio/tipo de risco. Em termos matemáticos, isso implicaria que tanto frequência quanto gravidade das perdas são acionadas por uma única fonte de aleatoriedade ao invés de, possivelmente, 7x8 fontes⁶ independentes. Mesmo considerando que no “mundo real” pode haver de 1 a 56 fontes de aleatoriedade, acreditamos fortemente que considerar apenas 1 fonte é uma maneira extremamente conservadora na captação de dependência entre perdas (Frachot et al., 2004).

A soma dos VaRs é normalmente feita (Embrechts & Puccetti (2006)) e um banco pode efetivamente reduzir sua carga de CR tendo em conta a estrutura de dependência que existe entre as classes de risco (Giacometti, 2008). O Comitê reconhecendo esta verdade e relata em Basel Committee on Banking Supervision (2003) que:

⁵A demonstração dessa propriedade se encontra em Frachot et al. (2004).

⁶Classificação de nível 1 dada no Basileia II para o par linha de negócio/tipo de risco.

“Risk measures for different operational risk estimates must be added for purposes of calculating the regulatory minimum capital requirement. However, the bank may be permitted to use internally determined correlations in operational risk losses across individual operational risk estimates, provided it can demonstrate to a high degree of confidence and to the satisfaction of the national supervisor that its systems for determining correlations are sound, implemented with integrity, and take into account the uncertainty surrounding any such correlation estimates (particularly in periods of stress). The bank must validate its correlation assumptions.”

Ou seja, as IFs devem ser capazes de convencer os seus reguladores que seus modelos de captação de correlação são sólidos, aplicados com integridade e levam em conta a incerteza em quaisquer dessas estimativas de correlação (principalmente em períodos de stress). Então, sob esse ponto de vista, é dado pelo Comitê a liberdade para que as IFs invistam na criação e estudo de modelos internos que capturem a dependência entre as classes de risco e retornem um CR total mais próximo da realidade do que o método do somatório.

Já é sabido que o Basileia II propõe 56 estimativas de requerimentos para se obter o total de capital exigido para cobrir os gastos que envolvam o RO. Assim, se a instituição considerar a divisão das classes dessa forma, podemos escrever a Equação 2.11 como sendo:

$$CR_{SOMA} = \sum_{k=1}^{56} (opvar X_i - E(X_i)). \quad (2.13)$$

Para finalizar esta seção, elucidamos através de um exemplo o método do somatório.

Exemplo 2.7. *Suponha, hipoteticamente, que através do LDA se tenha chegado as seguintes distribuições para X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 e X_6 (supondo então que a IF tenha 6 classes de risco): $X_1 \sim Gama(1; 0, 1)$; $X_2 \sim Gama(5; 0, 15)$; $X_3 \sim Gama(15; 0, 2)$; $X_4 \sim Weibull(2, 5; 25)$; $X_5 \sim Weibull(1, 5; 15)$; $X_6 \sim Lognormal(3; 0, 5)$.*

Desta forma, obtemos as seguintes perdas inesperadas marginais para as 6 classes de risco: $UL_1 = \$59, 08$; $UL_2 = \$65, 29$; $UL_3 = \$74, 25$; $UL_4 = \$31, 98$; $UL_5 = \$31, 64$; $UL_6 = \$71, 40$.

Sendo assim, o CR a ser alocado (a perda inesperada total) segundo o método do somatório é dado por: $CR_{SOMA} = \$333.64$.

Capítulo 3

Modelando dependência

Neste capítulo apresentamos ferramentas estatísticas e matemáticas para a modelagem de dependência estocástica. Iniciamos definindo alguns tipos e medidas de dependência, em seguida discutimos teoria de cópulas, uma das mais importantes ferramentas estatísticas para modelar dependência, e finalizamos apresentando métodos de estimação e escolha de cópulas.

3.1 Algumas considerações sobre dependência

É comum na área financeira a ligação entre diferentes conjuntos de acontecimentos, por exemplo, índices de bolsa de valores, economias de países, entre outros. No contexto de RO, por se tratar de uma mesma instituição e de uma mesma classe de risco, os acontecimentos estão ainda mais interligados. Ou seja, há diversos níveis de dependência em diversos níveis e naturezas de acontecimentos. Um risco pode influenciar outro. Uma perda em uma classe de risco, pode influenciar uma perda em outra classe ou influenciar uma perda na mesma classe de risco. Se desconsiderar as relações de dependência, como é feito em vários casos, as consequências podem ser complicadas.

Atualmente, a principal ferramenta usada na modelagem de dependência é a teoria de cópulas, que foi popularizada, principalmente por [Joe \(1997\)](#) e [Nelsen \(2006\)](#). Esta teoria se torna atrativa devido às cópulas abrangerem um grande leque de estruturas de dependência e conseguirem modelar completamente a estrutura dos dados.

Podemos dizer que a cópula liga uma função de distribuição multivariada às suas marginais

univariadas. De um outro modo, podemos afirmar que cópulas são funções de distribuições cujas marginais são uniformes no intervalo $[0, 1]$. Discutiremos melhor estas ideias durante neste capítulo.

[Giacometti \(2008\)](#) ressalta que as cópulas estão se tornando populares na modelagem de dependência em risco financeiro. Há diversos autores que as utilizam na área de riscos, dentre eles citamos, [Böcker & Klüppelberg \(2008\)](#), [Chavez-Demoulin et al. \(2006\)](#), [Embrechts & Puccetti \(2006\)](#), [Giacometti \(2008\)](#), entre diversos outros.

[Cherubini et al. \(2004\)](#) afirmam que a principal vantagem das cópulas é a maneira de como elas representam uma distribuição conjunta de probabilidade. Elas oferecem maior flexibilidade na agregação de riscos, pois a escolha das distribuições marginais pode ser feita de forma independente da modelagem da estrutura de associação das variáveis estudadas.

Dessa forma, tal flexibilidade permite construir uma distribuição conjunta de duas ou mais variáveis aleatórias, sendo que cada uma delas seja individualmente modelada por uma distribuição marginal diferente, que pode ser a normal, t-student, exponencial ou qualquer outra. Ao mesmo tempo, a dependência entre estas variáveis pode assumir estruturas diversas, até mesmo não-lineares, de acordo com o tipo de cópula utilizada.

No âmbito do risco operacional temos que as diversas perdas, ocorridas para cada classe de risco, são consideradas variáveis aleatórias dependentes. Como visto anteriormente, hoje é considerada a dependência perfeita entre as variáveis perdas operacionais, ou seja, a dependência não é modelada. Embora o Comitê exija a suposição de dependência perfeita entre as variáveis perdas agregadas para o cálculo do capital, o Comitê aprova que as instituições financeiras usem outras correlações, desde que cumpram exigências qualitativas e quantitativas do Basileia II. Segundo [Basel Committee on Banking Supervision \(2004\)](#):

Risk measures for different operational risk estimates must be added for purposes of calculating the regulatory minimum capital requirement. However, the bank may be permitted to use internally determined correlations in operational risk losses across individual operational risk estimates, provided it can demonstrate to the satisfaction of the national supervisor that its systems for determining correlations are sound, implemented with integrity, and take into account the uncertainty surrounding any such correlation estimates (particularly in periods of stress). The bank must validate its correlation

assumptions using appropriate quantitative and qualitative techniques.

Antes de discutir e formalizar matematicamente a teoria de cópulas, discutimos na próxima seção a teoria de dependência estocástica com seus tipos, estruturas e medidas.

3.2 Tipos, estruturas e medidas de dependência

Por simplicidade, toda a teoria apresentada neste capítulo é abordada para o caso bivariado. No contexto de risco operacional, suponha que a IF tenha apenas duas classes de riscos com POAs denotadas por X e Y .

O conceito de dependência é muito mais abrangente do que o da independência e da dependência total (o conhecimento de uma das variáveis determina completamente o conhecimento da outra). É claro que se as v.a.'s têm dependência fraca, é comum utilizar a suposição de independência. Todavia, se a dependência é evidente, é recomendável considerá-la no modelo.

Podemos dizer que temos três extremos:

- dependência total negativa;
- independência;
- dependência total positiva.

Entre esses extremos é possível a existência de infinitas estruturas de dependência entre duas variáveis aleatórias. É importante ressaltar que estrutura e tipo de dependência são conceitos distintos. Podemos ter, por exemplo, estruturas exponencial ou linear entre X e Y e ambas descrevendo algum tipo de dependência positiva. “Tipos de dependência” são muitas vezes referenciados, na literatura de língua inglesa, como *dependence properties*. Existem tipos de dependência positiva e negativa.

Definição 3.1 (Dependência positiva e negativa). *De uma maneira geral, X e Y têm dependência positiva (negativa) se a estrutura de dependência estiver entre os extremos “dependência total negativa” e “independência” (“independência” e “dependência total positiva”).*

Em termos probabilísticos, X e Y têm dependência positiva se é mais provável observar o par (X, Y) grande-grande ou pequeno-pequeno do que grande-pequeno ou pequeno-grande.

A definição acima depende do que queremos dizer com “grande” e “pequeno”. Não definimos formal ou filosoficamente tais termos, mas o leitor deve enxergá-las como grandezas relativas. Por exemplo, se $P(X > x_1)$ for alta, então x_1 pode ser considerado “pequeno”; por outro lado, se $P(X < x_2)$ for baixa, então x_2 pode ser considerado “grande”. Novamente, esbarramos em conceitos de probabilidade “alta” e “baixa”, mas não há muitas complicações em fixar níveis de probabilidade para ter estes termos bem definidos.

Apresentamos na sequência alguns tipos de dependência. Alguns trabalhos mais detalhados sobre o assunto são: [Viola \(2009\)](#), [Barlow & Proschan \(1975\)](#), [Marshall & Olkin \(1988\)](#), [Kimeldorf & Sampson \(1989\)](#), [Block et al. \(1982\)](#) e [Lehmann \(1966\)](#).

3.2.1 Tipos de dependência

Definição 3.2 (Dependência no quadrante positivo). *Seja H a função de distribuição conjunta das variáveis X e Y . Dizemos que X e Y são dependentes no quadrante positivo (ou que H possui dependência no quadrante positivo) se*

- i) $P(X > x, Y > y) \geq P(X > x)P(Y > y)$ ou, equivalentemente,*
- ii) $P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y)$, para qualquer par $(x, y) \in \text{Dom}(H)$.*

No contexto de risco operacional, se X e Y POAs, temos que $\text{Dom}(H) = \mathbb{R}_+^2$, em que $\text{Dom}(\bullet)$ é o domínio de H .

Se X e Y possuem este tipo de dependência, então é mais provável que X e Y assumam valores grandes (ou pequenos) conjuntamente do que separadamente. Sendo assim, descreve um tipo de dependência positiva.

Definição 3.3 (Dependência no quadrante negativo). *Dizemos que X e Y são dependentes no quadrante negativo (ou que H possui dependência no quadrante negativo) se*

- i) $P(X > x, Y > y) \leq P(X > x)P(Y > y)$ ou, equivalentemente,*
- ii) $P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y)$, para qualquer par $(x, y) \in \text{Dom}(H)$.*

Se X e Y possuem este tipo de dependência então é mais provável que X e Y assumam valores grandes (ou pequenos) separadamente do que conjuntamente, descrevendo, assim, um tipo

de dependência negativa.

Definição 3.4 (Dependência estocástica crescente e decrescente). *Dizemos que Y é estocasticamente crescente (decrescente) em X se*

$P(Y > y|X = x)$ é uma função não-decrescente (não-crescente) em x , para todo y .

O fato de Y ser estocasticamente crescente (decrescente) em X descreve um tipo de dependência positiva (negativa).

Para completarmos esse quadro de tipos de dependência, definimos quando uma variável aleatória é crescente (ou decrescente) à cauda de uma outra:

Definição 3.5 (Dependência crescente ou decrescente nas caudas).

i) Y é crescente na cauda à direita em X se $P(Y > y|X > x)$ é função não-decrescente em x , para todo y .

ii) Y é crescente na cauda à esquerda em X se $P(Y \leq y|X \leq x)$ é função não-decrescente em x , para todo y .

iii) Y é decrescente na cauda à direita em X se $P(Y > y|X > x)$ é função não-crescente em x , para todo y .

iv) Y é decrescente na cauda à esquerda em X se $P(Y \leq y|X \leq x)$ é função não-crescente em x , para todo y .

Note que, na Definição 3.5, os itens *i)* e *ii)* são tipos de dependência positiva, pois é mais provável que Y assuma valores grandes (pequenos) quando x aumentar (diminuir), ou seja, é mais provável observar valores grandes-grandes ou pequenos-pequenos. Por outro lado, os itens *iii)* e *iv)* descrevem tipos de dependência negativa.

Para finalizar a seção, apresentamos um teorema que é importante na discussão de teoria de cópulas e os limites de Fréchet.

Teorema 3.1. *Sejam X e Y v.a.'s distribuídas uniformemente no intervalo $[0, 1]$, ou seja, $X, Y \sim U(0, 1)$. Então:*

i) $Y = X \Leftrightarrow X$ e Y têm dependência perfeita positiva e

ii) $Y = 1 - X \Leftrightarrow X$ e Y têm dependência perfeita negativa.

3.2.2 Medidas de dependência

Nesta subseção apresentamos brevemente algumas medidas de dependência: o coeficiente de correlação de Pearson, τ de Kendall, ρ de Spearman e os coeficientes de dependência caudal. Estas medidas nos dão uma ideia do quão dependentes são X e Y .

Definição 3.6. O coeficiente de correlação de Pearson, também denominado coeficiente de correlação linear entre X e Y , é definido como:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}},$$

em que $\text{Cov}(X,Y)$, $\text{Var}(X)$ e $\text{Var}(Y)$ são, respectivamente, a covariância entre X e Y e as variâncias de X e Y .

Definição 3.7 (τ de Kendall). Seja (X',Y') um vetor aleatório independente e identicamente distribuído com (X,Y) . A medida de dependência τ de Kendall entre X e Y é definido como:

$$\tau_{X,Y} = P[(X - X')(Y - Y') > 0] - P[(X - X')(Y - Y') < 0].$$

Definição 3.8 (ρ de Spearman). Seja (X',Y') como na Definição 3.7 e seja (X'',Y'') um vetor aleatório independente e identicamente distribuído com (X,Y) e com (X',Y') . A medida de dependência ρ de Spearman é definido como:

$$\rho_{S_{X,Y}} = 3\{Pr[(X - X')(Y - Y'') > 0] - Pr[(X - X')(Y - Y'') < 0]\}.$$

Propriedade 3.1.

- i) $\rho_{X,Y}$, em geral, não é invariante a transformações monótonas. Já $\tau_{X,Y}$ e $\rho_{S_{X,Y}}$ são.
- ii) Se X e Y são independentes, então $\rho_{X,Y} = \tau_{X,Y} = \rho_{S_{X,Y}} = 0$ (as recíprocas não são verdadeiras);
- iii) Se $\rho_{X,Y} = -1$, então X e Y têm dependência linear perfeita negativa, isto é, $Y = aX + b, a < 0$.
Se $\rho_{X,Y} = 1$, então X e Y têm dependência linear perfeita positiva, ou seja, $Y = aX + b, a > 0$;
- iv) $\tau_{X,Y} = 1$ ou $\rho_{S_{X,Y}} = 1$ ($\tau_{X,Y} = -1$ ou $\rho_{S_{X,Y}} = -1$) se, e somente se, X e Y têm dependência perfeitamente positiva (negativa);

v) $\rho_{X,Y} = \rho_{S_{F(X),G(Y)}}$, em que $F(X)$ e $G(Y)$ representam os postos de X e Y respectivamente.

A demonstração de algumas dessas propriedades (bem como outras propriedades sobre tais medidas) são encontradas em [Nelsen \(2006\)](#), [Embrechts et al. \(2002\)](#) e em [Embrechts et al. \(2003\)](#).

Pelo fato do τ de Kendall e o ρ de Spearman serem ambas medidas de concordância, existem algumas relações entre tais medidas.

Propriedade 3.2 (Relações entre $\tau_{X,Y}$ e $\rho_{S_{X,Y}}$).

i) $-1 \leq 3\tau_{X,Y} - 2\rho_{S_{X,Y}} \leq 1$;

ii) $\frac{1+\rho_{S_{X,Y}}}{2} \geq \left(\frac{1+\tau_{X,Y}}{2}\right)^2$;

iii) $\frac{1-\rho_{S_{X,Y}}}{2} \geq \left(\frac{1-\tau_{X,Y}}{2}\right)^2$;

iv) $\frac{3\tau_{X,Y}-1}{2} \leq \rho_{S_{X,Y}} \leq \frac{1+2\tau_{X,Y}-\tau_{X,Y}^2}{2}, \tau_{X,Y} \geq 0$;

v) $\frac{\tau_{X,Y}^2+2\tau_{X,Y}-1}{2} \leq \rho_{S_{X,Y}} \leq \frac{1+3\tau_{X,Y}}{2}, \tau_{X,Y} \leq 0$.

As demonstrações podem ser vistas em [Nelsen \(2006\)](#). Todos os itens da Propriedade 3.2 fornecem limitantes para $\tau_{X,Y}$ e $\rho_{S_{X,Y}}$ e, assim, podemos obter a região mostrada na Figura 3.1.

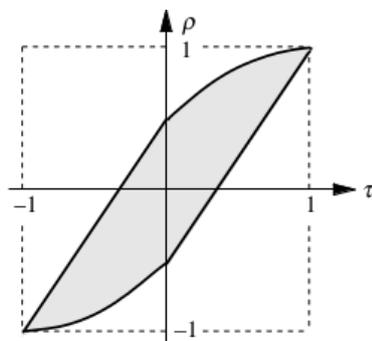


Figura 3.1: Limitantes para $\rho_{S_{X,Y}}$ e $\tau_{X,Y}$.

Definição 3.9 (Coeficientes de dependência caudal). *Os coeficientes de dependência caudal superior e inferior são, respectivamente:*

i) $\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} P(Y > G^{-1}(t) | X > F^{-1}(t))$;

ii) $\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} P(Y < G^{-1}(t) | X < F^{-1}(t))$.

Definidas algumas medidas de dependência, devemos salientar que, para se observar, de fato, a estrutura de dependência que há entre X e Y , é importante uniformizar as variáveis. Vejamos o porquê no exemplo abaixo:

Exemplo 3.1. *Suponha $X \sim \text{Gamma}(1,2)$ e $Y \sim \text{Weibull}(1,1)$. Um total de 1000 observações são simuladas de ambas distribuições de forma independente. A dispersão dos valores gerados é mostrada na Figura 3.2.*

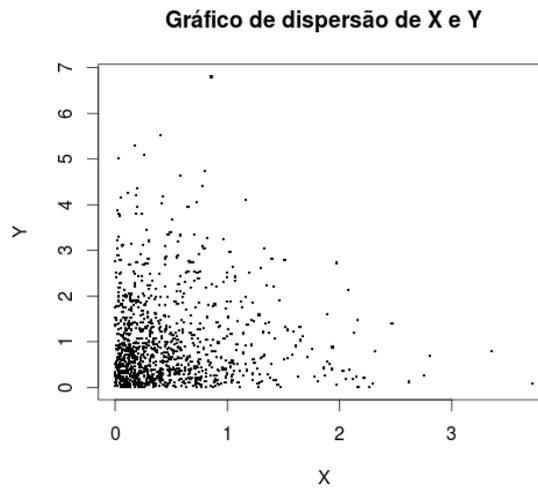


Figura 3.2: Gráfico de dispersão dos valores gerados de X e Y .

Observando o gráfico da Figura 3.2, pode-se concluir, erroneamente, que X e Y parecem assumir valores “pequenos” conjuntamente, ou seja, as variáveis aleatórias X e Y possuem algum tipo de dependência. Para discernir a dúvida, devemos uniformizar X e Y através de suas respectivas funções de distribuição, conforme o seguinte teorema.

Teorema 3.2. *Se X e Y são duas v.a.s contínuas com distribuições F e G , respectivamente, então $U = F(X)$ e $V = G(Y)$ são variáveis aleatórias distribuídas uniformemente no intervalo unitário $[0,1]$.*

Uniformizando os valores gerados das v.a.'s X e Y através de suas funções de distribuição e construindo o gráfico de dispersão, obtemos a Figura 3.3

Observando a Figura 3.3, percebemos que as v.a.'s X e Y são independentes. Uniformizar as variáveis é imprescindível quando se quer estudar a dependência, graficamente, entre tais variáveis

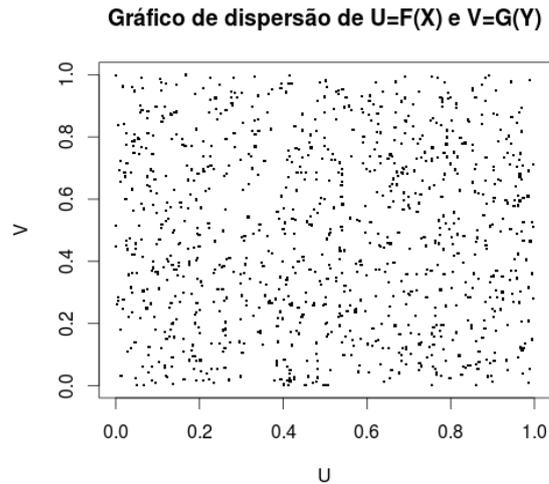


Figura 3.3: Gráfico de dispersão de X e Y uniformizadas.

aleatórias.

3.2.3 Estruturas de dependência

Há uma infinidade de estruturas de dependência entre duas variáveis aleatórias, X e Y , e a ferramenta gráfica é uma boa opção para visualizar tal estrutura. Algumas destas possíveis estruturas, entre $U = F(X)$ e $V = G(Y)$, são apresentadas na Figura 3.4. Maiores detalhes sobre dependência estocástica e uma formalização mais completa podem ser encontrados em [Joe \(1997\)](#) e em [Viola \(2009\)](#).

3.3 Cópulas

Nesta seção formalizamos o conceito de cópulas, funções que captam a dependência presente entre X e Y , ressaltando que o problema central deste texto que é a modelagem estatística para RO, que, inevitavelmente deve passar pela modelagem de dependência, discutida na seção anterior.

Algumas notações utilizadas neste texto são:

- $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$;
- $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ (reta estendida);
- $I = [0, 1]$ (intervalo unitário);
- $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ (quadrado unitário);

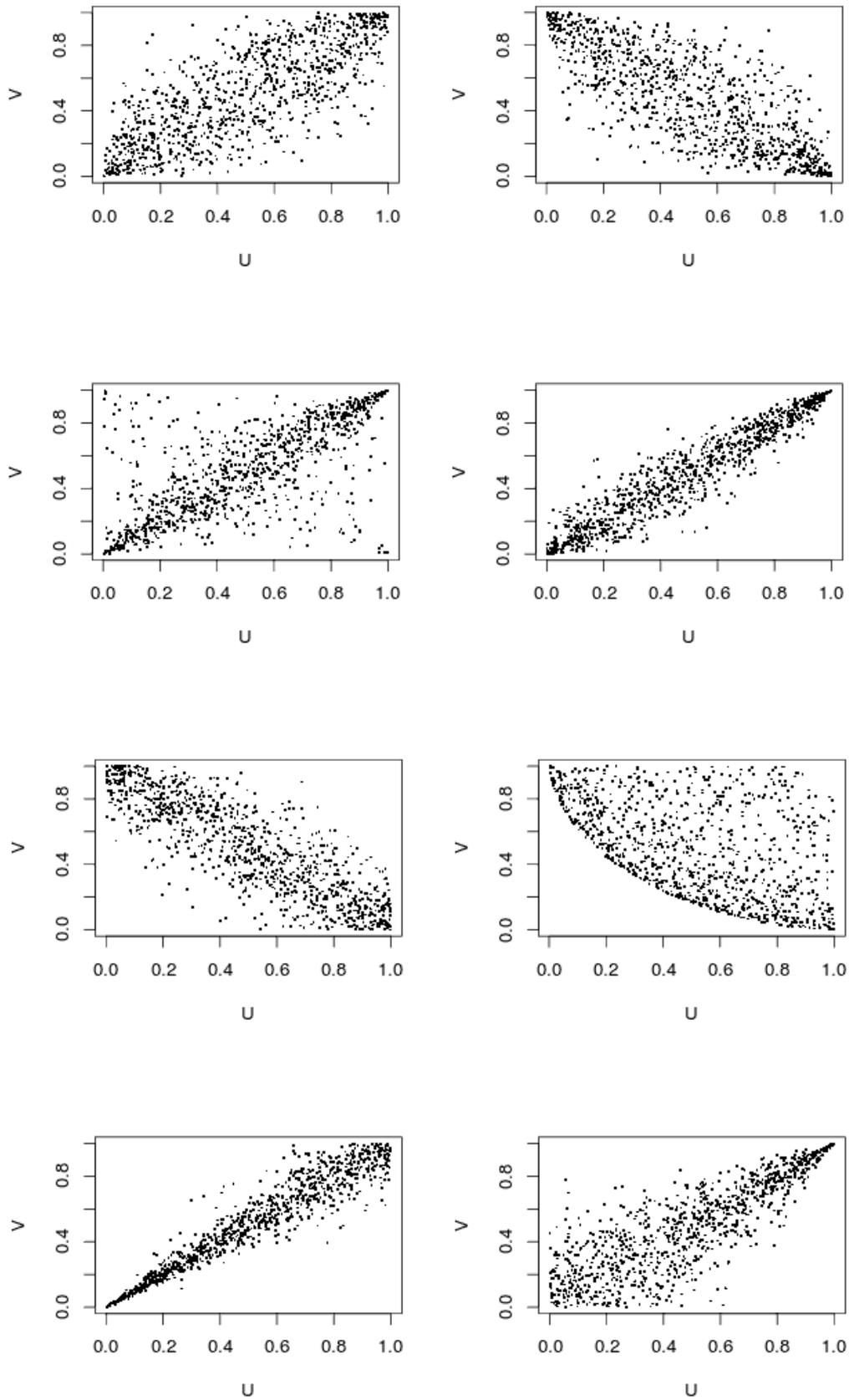


Figura 3.4: Gráficos de dispersão gerados de diferentes estruturas de dependência.

- $Dom(H) \subseteq \overline{\mathbb{R}^2} = \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ e $Im(H) \subseteq \mathbb{R}$ são, respectivamente, o domínio e a imagem de uma função H bivariada real.

Informalmente, uma cópula bivariada é uma função que acopla (liga)¹ uma função de distribuição conjunta às suas funções de distribuição marginais. Sabemos que se X e Y são independentes, então temos que $H(x, y) = F(x)G(y)$, em que H, F e G são, respectivamente, funções de distribuição conjunta, marginal de X e marginal de Y . Quando não houver independência, as cópulas vão fazer esse papel de captar a dependência e refleti-la sobre a função de distribuição conjunta. A seguir apresentamos três conceitos que serão utilizados na definição de cópulas bivariadas.

Definição 3.10 (H-volume). *Sejam S_1 e S_2 subconjuntos não-vazios de $\overline{\mathbb{R}}$, a função $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ e o retângulo $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, $(x_i, y_j) \in Dom(H)$, $i, j = 1, 2$. Defina-se H-volume de B como:*

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1). \quad (3.1)$$

Definição 3.11 (Função bicrescente). *Dizemos que H é uma função bicrescente se $V_H(B) \geq 0$, para todo B .*

Definição 3.12 (Aplanada). *Sejam S_1 e S_2 subconjuntos não-vazios de $\overline{\mathbb{R}}$. Uma aplicação $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é aplanada se $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$ para todo $(x, y) \in Dom(H)$ sendo $a_i = \min(z_i; z_i \in S_i)$, $i = 1, 2$.*

Definição 3.13 (Cópula bivariada). *Uma cópula bivariada é uma função C com as seguintes propriedades:*

- 1- $Dom(C) = I^2$;
- 2- C é aplanada e bicrescente;
- 3- C é marginalmente uniforme, ou seja, para todo $u \in I$ e $v \in I$,

$$C(u, 1) = u \text{ e } C(1, v) = v.$$

Existem infinitas cópulas bivariadas e alguns exemplos são dados a seguir.

Exemplo 3.2. *Suponha $(u, v) \in I^2$:*

¹Decorrência do nome, cópula, que quer dizer união, ligação.

- i) $C(u, v) = uv$;
- ii) $C(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$;
- iii) $C(u, v) = \min\{u, v\}$;
- iv) $C(u, v) = \frac{uv}{u+v-uv}$;
- v) $C(u, v) = [\max\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0\}]^{-1/\theta}$, $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$;
- vi) $C(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right)$, $\theta \in [1, \infty)$;
- vii) $C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$, $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$.

A cópula em i) é denominada cópula produto (ou cópula de independência), e é denotada por C^\perp .

Com a definição de C^\perp é possível enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.3. *Sejam X e Y v.a's com função de distribuição conjunta H e marginais F e G , respectivamente. Então X e Y são independentes se, e somente se,*

$$H(x, y) = C^\perp(F(x), G(y)), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

As cópulas em i) até iv) são não-paramétricas, pois dependem, funcionalmente, apenas de u e v . As cópulas em v), vi) e vii) são paramétricas, denominadas, respectivamente, Cópulas de Clayton, Gumbel e Frank. O parâmetro θ é de dependência e para cada valor, a respectiva cópula capta de uma forma diferente a estrutura de dependência existente. Existem ainda cópulas com mais de um parâmetro.

As cópulas em ii) e iii) são denominadas, respectivamente, limite inferior de Fréchet e limite superior de Fréchet e são denotadas por C^- e C^+ , respectivamente. O próximo teorema mostra que toda cópula bivariada é limitada pelas cópulas C^- e C^+ .

Teorema 3.4. *Seja C uma cópula. Então para todo $(u, v) \in \text{Dom}(C)$,*

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v).$$

A desigualdade presente no Teorema 3.4 é denominada de Desigualdade dos Limitantes de Fréchet.

3.3.1 Teorema de Sklar

O Teorema de Sklar é um dos resultados centrais da teoria de cópulas. Tal teorema mostra o papel da cópula na relação de funções de distribuições multivariadas com suas marginais univariadas.

Teorema 3.5. Sklar. *Seja H uma função de distribuição conjunta com marginais F e G . Então existe uma cópula C tal que para todo $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$,*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (3.2)$$

Se F e G são contínuas, então C é única, caso contrário, C é unicamente determinada em $Im(F) \times Im(G)$. Reciprocamente, se C é uma cópula e F e G são funções de distribuições, então a função H definida em 3.5 é uma função de distribuição conjunta com marginais F e G .

Observação 3.1.

- i) No nosso problema, F e G são contínuas, então para uma função de distribuição conjunta com marginais F e G , existe uma única cópula C tal que $H(x, y) = C(F(x), G(y)), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.*
- ii) A partir de F e G e de um modelo de cópula C podemos determinar a função de distribuição conjunta H . Para isto, a IF deve conhecer os modelos probabilísticos de X e Y ou utilizar as funções de distribuição empíricas associadas às F e G .*
- iii) A escolha da cópula C deve ser feita com base na dependência existente entre X e Y , ou então, entre $U = F(X)$ e $V = G(Y)$.*

O Teorema de Sklar nos fornece uma maneira para a construção de funções de cópulas. Para isso, precisamos definir o que chamamos de inversa generalizada (que é uma extensão da inversa usual).

Definição 3.14 (Inversa generalizada). *Seja F uma função de distribuição. A inversa generalizada de F é qualquer função $F^{(-1)}$ com domínio em I , tal que:*

1- Se $t \in Im(F)$ então $F^{(-1)}(t) = x, x \in \mathbb{R}$, tal que $F(x) = t$, ou seja, $F(F^{(-1)}(t)) = t$, para qualquer $t \in Im(F)$;

2- Se $t \notin Im(F)$ então $F^{(-1)}(t) = inf\{x|F(x) \geq t\} = sup\{x|F(x) \leq t\}$.

Esta definição estende o conceito de função inversa e é útil quando as v.a.'s X e Y forem discretas, pois, nestes casos, as funções de distribuição serão funções escadas. Se não há pontos fora da imagem de F , isto é, F é sobrejetora, a inversa generalizada é equivalente a inversa usual.

O Corolário 3.1 fornece uma forma para a construção de modelos de cópulas

Corolário 3.1. *Sejam H, F, G e C definidas como anteriormente e sejam $F^{(-1)}$ e $G^{(-1)}$ as inversas generalizadas de F e G , respectivamente. Então, para qualquer $(u, v) \in I^2$,*

$$C(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \quad (3.3)$$

No ponto de vista do Teorema 3.5, ao considerarmos duas variáveis aleatórias, X e Y , com dependência perfeita positiva (perfeitamente correlacionadas), então a função de distribuição conjunta H é da seguinte forma:

$$H(x, y) = C^+(F(x), G(y)),$$

em que F e G são as funções de distribuição de X e Y , respectivamente.

No contexto de RO, Jouanin et al. (2004) demonstram que a utilização do cálculo do VaR operacional global como a simples soma dos VaRs operacionais, para cada classe de risco, corresponde ao caso da agregação dos riscos operacionais utilizando a cópula limitante superior de Fréchet.

Teorema 3.6.

Sejam X e Y variáveis aleatórias com cópula C^- , ou seja, $H(x, y) = C^-(F(x)G(y))$. Então, existem duas funções monótonas $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e existe uma variável aleatória Z tal que

$$(X, Y) =_d (\alpha(Z), \beta(Z)),$$

sendo α e β funções monótonas crescente e decrescente, respectivamente. A notação “ $=_d$ ” se refere à igualdade em distribuição.

O caso usando C^+ é análogo, mudando o fato de α e β serem ambas monótonas crescente.

A demonstração do Teorema 3.6 pode ser vista em Embrechts et al. (2002).

Definição 3.15. *As v.a.'s X e Y são ditas antimonotônicas se têm cópula C^- e são ditas comonotônicas se têm cópula C^+ .*

Corolário 3.2. *As v.a.'s X e Y têm dependência perfeita positiva (negativa) se, e somente se X e Y são variáveis aleatórias com cópula C^+ (C^-).*

No ponto de vista de v.a. antimonotônicas e comonotônicas, usar o método do somatório implica em considerar que as perdas das classes de risco são comonotônicas, isto é, têm cópula C^+ . Se

considerarmos as 56 unidades de risco² propostas por Basileia II, utilizar tal método implica que no uso de 56 funções monótonas crescentes, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{56}$, e uma única variável aleatória Z tal que as respectivas perdas operacionais agregadas, X_1, X_2, \dots, X_{56} , satisfazem $X_1 = \alpha_1(Z), X_2 = \alpha_2(Z), \dots, X_{56} = \alpha_{56}(Z)$.

3.3.2 Famílias de cópulas

Dentre as principais famílias de cópulas estão as Arquimedianas e as elípticas. Na Tabela 3.1 apresentamos algumas cópulas da família Arquimediana. As cópulas Arquimedianas são mais abrangentes do que as elípticas, porém, a interpretação de seus parâmetros é mais difícil e podem não atingir os limites de Fréchet, fato importante para o contexto de RO. A principal diferença entre estas classes é a forma como são construídas.

As cópulas Arquimedianas dependem da função φ , denominada gerador e são dadas por $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$. Na família elíptica se destacam a cópula normal e a cópula t. Para mais detalhes sobre as famílias de cópulas ver [Nelsen \(2006\)](#) e [Cherubini et al. \(2004\)](#).

Definição 3.16 (Cópula elíptica). *Seja H uma função de distribuição elíptica bivariada com marginais F e G . Então, C é uma cópula elíptica quando*

$$C(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)), \forall (u, v) \in I^2.$$

As distribuições elípticas mais usadas são as distribuições multivariadas normal (ou Gaussiana) e t-Student.

[Yan \(2007\)](#) afirma que as cópulas elípticas tornaram muito populares em finanças e gestão de riscos devido a sua fácil implementação. [Frahm et al. \(2003\)](#) ainda complementa que distribuições elípticas são amplamente aplicadas em estatística e econometria, especialmente na área financeira.

Definição 3.17 (Cópula Gaussiana). *A cópula Gaussiana é dada por:*

$$C_\rho(u, v) = \Phi(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \forall (u, v) \in I^2,$$

em que ρ é o parâmetro da cópula, o qual representa a correlação linear entre U e V e Φ^{-1} é a inversa

²A extensão de C^+ para o caso multivariado é simplesmente $C^+(u_1, u_2, \dots, u_n) = \min(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Tabela 3.1: Famílias de Cóopulas Arquimedianas.

| Família | $C_\theta(u, v)$ | $\varphi_\theta(t)$ | $\theta \in$ | Limitantes e Casos especiais |
|--|--|---|-------------------------------------|--|
| Clayton | $[max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta}$ | $\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$ | $[-1, \infty) \setminus \{0\}$ | $C_{-1} = W, C_0 = \Pi, C_1 = \Sigma^{-1}\Pi,$ $C_\infty = M$ |
| Ali-Mikhail-Haq | $\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$ | $ln \frac{1 - \theta(1-t)}{t}$ | $[-1, 1)$ | $C_0 = \Pi, C_1 = \Sigma^{-1}\Pi$ |
| Gumbel | $exp(-[(-lnu)^\theta + (-lnv)^\theta]^{1/\theta})$ | $(-ln t)^\theta$ | $[1, \infty)$ | $C_1 = \Pi, C_\infty = M$ |
| Frank | $-\frac{1}{\theta} ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$ | $-ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$ | $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ | $C_{-\infty} = W, C_0 = \Pi, C_\infty = M$ |
| Joe | $1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}$ | $1 - (1 - exp(-t))^{\frac{1}{\theta}}$ | $[1, \infty]$ | |
| φ gerador de cópula Arquimediana | | | | |

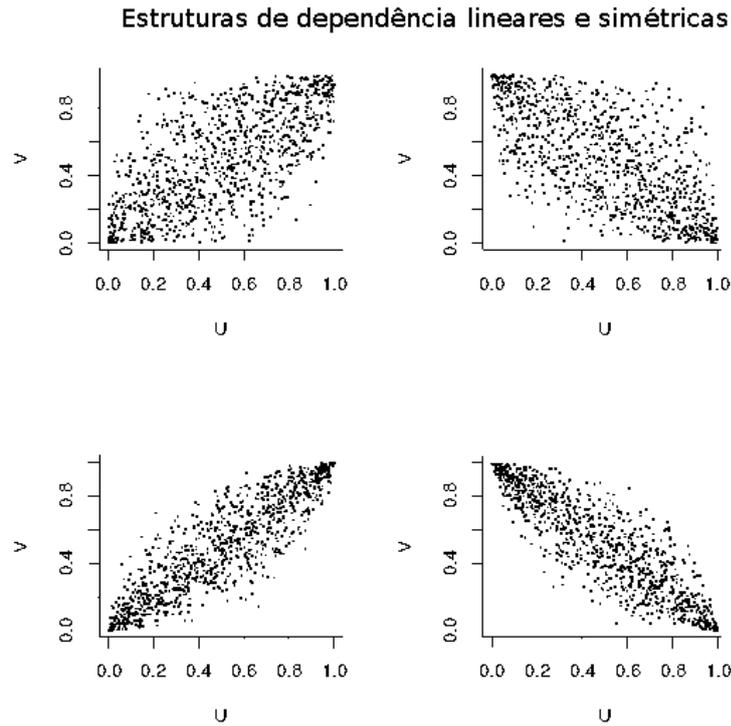


Figura 3.5: Dispersão dos pares (u, v) gerados da cópula Gaussiana.

da função de distribuição normal padrão univariada

$$\Phi(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y h(s, t) ds dt,$$

com

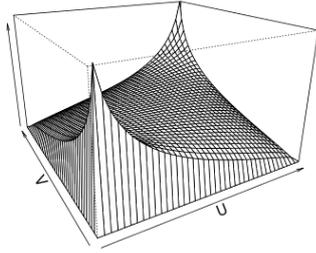
$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} [x^2 - 2\rho xy + y^2]\right\}.$$

A cópula Gaussiana é uniparamétrica e o parâmetro é o coeficiente de correlação linear (ρ de Pearson). Cabe dizer que esta cópula tem a propriedade de captar estruturas de dependência lineares e simétricas, como na Figura 3.5.

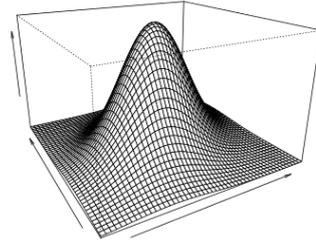
Observação 3.2.

i) $C_\rho(u, v)$ é uma função de distribuição bivariada, mas não é a função de distribuição normal bivariada padrão em u e v . É fácil comprovar pois u e v pertencem a I . Para ilustrar esta observação, são mostradas na Figura 3.6 as funções densidade bivariada da cópula e da normal padrão.

ii) A Figura 3.6(a) justifica a estrutura linear na captação de dependência. Observe que (nesse caso

Densidade da cópula Gaussiana com $\rho = 0.4$ 

(a)

Densidade da normal bivariada padrão com $\rho = 0.4$ 

(b)

Figura 3.6: (a) Densidade da cópula gaussiana e (b) Densidade da normal bivariada padrão, ambas com $\rho = 0.4$.

a correlação é positiva) a concentração de pontos está localizada em $u = v$, em particular, a maior concentração reside próximo de $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

A seguir mostramos algumas propriedades da cópula Gaussiana.

Propriedade 3.3.

- i) $C_{\rho=-1} \equiv C^-$;
- ii) $C_{\rho=1} \equiv C^+$;
- iii) $C_{\rho=0} \equiv C^\perp$;
- iv) $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow C_{\rho_1} \prec C_{\rho_2}$, em que \prec indica ordem.
- v) Das propriedades anteriores podemos afirmar que:

$$C_{\rho=-1} \prec C_{-1 < \rho < 0} \prec C_{\rho=0} \prec C_{0 < \rho < 1} \prec C_{\rho=1};$$

3.4 Estimação e bondade de ajuste

Nessa seção apresentamos métodos para a estimação dos parâmetros de cópulas e a bondade de ajuste de um modelo de cópula.

3.4.1 Estimação de cópulas

Os métodos aqui apresentados são baseados na função de verossimilhança, mas utilizam estratégias diferentes na estimação dos parâmetros. Tais métodos são denominados método “*maximum likelihood*” (ML), “*inference functions for margins*” (IFM) e “*canonical maximum likelihood*” (CML). Para maiores detalhes veja [Durrleman et al. \(2000\)](#).

Maximum likelihood – ML

Seja C um modelo de cópula para X e Y e F e G suas respectivas funções de distribuição. Sendo h a função de densidade conjunta para X e Y , f a função densidade de X e g a função densidade de Y , pelo Teorema de Sklar,

$$h(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y),$$

em que c é a função densidade da cópula C .

A função log-verossimilhança, dadas as observações $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$, é escrita na forma

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ln c(F(x_i; \boldsymbol{\theta}_X), G(y_i; \boldsymbol{\theta}_Y); \boldsymbol{\alpha}) + \sum_{i=1}^n (\ln f(x_i; \boldsymbol{\theta}_X)g(y_i; \boldsymbol{\theta}_Y)), \quad (3.4)$$

na qual $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_X, \boldsymbol{\theta}_Y, \boldsymbol{\alpha})$ em que $\boldsymbol{\theta}_X$ e $\boldsymbol{\theta}_Y$ são os vetores de parâmetros das distribuições de X e Y , respectivamente, e $\boldsymbol{\alpha}$ é o vetor de parâmetros da cópula C .

No método de estimação ML, o estimador $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}$ de $\boldsymbol{\theta}$ é dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmax}}(l(\boldsymbol{\theta})),$$

isto é, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}$ é o estimador de $\boldsymbol{\theta}$ obtido através da maximização da expressão 3.4.

Inference functions for margins – IFM

O método ML estima todos os parâmetros em uma única etapa. No entanto, tal método pode trazer problemas de convergência e demasiado esforço computacional, dependendo da cópula e das marginais, bem como do número de parâmetros. Face a isso, [Joe & Xu \(1996\)](#) propuseram uma alternativa que, ao invés de se estimar todos os parâmetros de uma só vez, primeiro estima-se os parâmetros das marginais e, usando tais estimativas, os parâmetros da cópula são estimados. Ou seja, estima-se os parâmetros $\boldsymbol{\theta}_X$ e $\boldsymbol{\theta}_Y$ pelo método de máxima verossimilhança, e, através das estimativas

$\hat{\theta}_X$ e $\hat{\theta}_Y$, Joe & Xu (1996) propõem substituí-las em 3.4 para a estimação de α . Desse modo, $\hat{\alpha}$ é dado por $\hat{\alpha}_{IFM} = \operatorname{argmax}_{\alpha} (l^*(\alpha))$, em que

$$l(\theta; \hat{\theta}_X, \hat{\theta}_Y) = l^*(\alpha) = \sum_{i=1}^n \ln c(F(x_i; \hat{\theta}_X), G(y_i; \hat{\theta}_Y); \alpha) + \sum_{i=1}^n (\ln f(x_i; \hat{\theta}_X)g(y_i; \hat{\theta}_Y)).$$

O estimador IFM apresenta menor eficiência em relação ao estimador ML, pois, procedendo a estimação em dois passos (primeiro os das marginais e depois os da cópula), pode haver um acúmulo de erros de estimação maior em relação à estimação em um único passo (método ML). Contudo, em geral, os resultados em ambos os métodos são similares.

No Capítulo 5 utilizamos esse método para a estimação dos parâmetros de uma cópula. É importante ressaltar que, ao utilizar a verossimilhança perfilada, em alguns casos, podemos ter diversos problemas de convergência, entre outros. Silva (2005) argumenta que o tratamento da função de verossimilhança perfilada como uma verossimilhança genuína pode levar a alguns problemas como, por exemplo, inconsistência e ineficiência dos estimadores de máxima verossimilhança. Outro problema comum refere-se à aproximação usual da distribuição da estatística razão de verossimilhanças pela distribuição qui-quadrado que, dependendo da quantidade de parâmetros de perturbação, pode ser muito ruim.

Canonical maximum likelihood – CML

Este método se baseia no uso das distribuições marginais empíricas, isto é, não é suposto um modelo paramétrico às variáveis aleatórias X e Y . O que se faz, em suma, é uniformizar a observação $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$, denotadas por $(u_i, v_i), i = 1, 2, \dots, n$, através das distribuições marginais empíricas. Logo, o estimador de α é obtido por

$$\hat{\alpha}_{CML} = \operatorname{argmax}_{\alpha} \sum_{i=1}^n \ln(c(u_i, v_i; \alpha)).$$

Um comentário sobre métodos Bayesianos

A alternativa Bayesiana pode ser atrativa em algumas situações (ver Smith (2011)). A ideia é trabalhar com a posteriori $\pi(\theta | (\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ via métodos MCMC para fazer inferência no parâmetro de interesse, em funções paramétricas e/ou para previsões. Maiores detalhes podem ser vistos em Smith (2011) e dos Santos Silva & Lopes (2008).

3.4.2 Bondade de ajuste de um modelo de cópula

Para a modelagem de um outro tipo de dependência podemos utilizar vários modelos de cópula e, dentre os modelos ajustados, podemos “escolher” aquele que melhor capta as relações de dependência, ou seja, escolhemos o modelo que melhor se adequa aos dados. Isto pode ser feito através da cópula empírica.

Definição 3.18 (Cópula empírica). *A cópula empírica é a função, denotada por C_n , dada por:*

$$C_n(u, v) = \frac{\text{número de pares } (u_k, v_k), k = 1, 2, \dots, n, \text{ tal que } u_k \leq u \text{ e } v_k \leq v}{n}, (u, v) \in I^2,$$

em que (u_k, v_k) , denota os dados (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, uniformizados.

Note que a cópula empírica $C_n(u, v)$ é um estimador de $C(u, v) = Pr(U \leq u; V \leq v)$, $(u, v) \in I^2$, sem a suposição de um modelo de cópula. Para mais detalhes sobre cópula empírica, ver [Deheuvels \(1979\)](#).

Exemplo 3.3. *Sejam $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}), (\frac{2}{3}, 1)\}$ os dados uniformizados. Podemos construir a cópula empírica para quaisquer $(u, v) \in I^2$, porém, serão considerados apenas alguns valores de (u, v) : $C_n(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}) = 0$, $C_n(1, \frac{1}{3}) = \frac{2}{4}$, $C_n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, $C_n(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \frac{3}{4}$ e $C_n(\frac{3}{4}, 1) = 1$.*

O modelo de cópula que melhor se ajusta aos dados é aquele que mais se aproxima da cópula empírica. Para a mensuração da distância de um modelo de cópula C , após a estimação de seus parâmetros, à cópula C_n pode-se utilizar, por exemplo, as distâncias d_2 e $d_{||}$, definidas por:

$$d_2(C_n, C) := \left\{ \int_0^1 \int_0^1 [C_n(u, v) - C(u, v)]^2 dudv \right\}^{1/2}$$

e

$$d_{||}(C_n, C) := \int_0^1 \int_0^1 |C_n(u, v) - C(u, v)| dudv.$$

Contudo, solucionar estas integrais pode ser difícil, dependendo da cópula em questão. [Durrleman et al. \(2000\)](#) sugerem a norma L^2 discreta como uma aproximação para a distância d_2 dada por:

$$\hat{d}_2(C_n, C) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - C \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right]^2 \right)^{1/2}.$$

Analogamente, a distância discreta para aproximar $d_{|\cdot|}$ é:

$$\widehat{d}_{|\cdot|}(C_n, C) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - C \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right|.$$

Neste texto utilizamos a distância $\bar{d}_{|\cdot|}$, definida como:

$$\bar{d}_{|\cdot|}(C_n, C) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left| C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - C \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right|.$$

Capítulo 4

Método para Alocação de Capital

A literatura para métodos alternativos para o cálculo do capital regulatório é bem escassa. Neste capítulo apresentamos duas alternativas ao método do somatório no cálculo do CR, o método da convolução (Alexander, 2003) e o método da correlação não-perfeita (Frachot et al., 2004). O primeiro utiliza a convolução para captar a dependência entre as variáveis e o segundo trabalho é baseado na correlação linear entre as perdas agregadas, para calcular o capital regulatório. Nas próximas seções, detalhamos tais métodos e apresentamos suas vantagens e desvantagens. Na Seção 4.3 apresentamos e discutimos uma nova proposta de um método alternativo para o cálculo do CR.

Neste capítulo tratamos do caso bivariado, supondo que a instituição financeira tenha apenas duas unidades de risco em que suas POA's são representadas por X e Y . Vimos que quando supomos que X e Y são comonotônicas, isto é, têm dependência perfeita positiva (cópula C^+), então o CR total é a soma dos capitais marginais: $CR(X) = opvar X - E(X)$ e $CR(Y) = opvar Y - E(Y)$. A questão que surge é o que devemos propor como CR total quando X e Y não têm dependência perfeita positiva.

4.1 Método da convolução

O método da convolução fornece uma possível resposta para a questão de texto: “O que pode ser considerado como perdas inesperadas totais?” Alexander (2003) faz algumas simulações para estudar o comportamento deste método para duas distribuições fixadas.

A ideia do método é a seguinte: suponha novamente que a instituição tenha duas classes de risco

em que as POA's são X e Y , sendo X a perda representando a classe A e Y representando a perda na classe B. O método consiste em determinar o capital para o banco como um todo baseado em uma “junção” das duas classes, A e B, obtendo-se uma única POA, digamos Z , que é a soma de X e Y . Ou seja, é como se a instituição financeira observasse apenas uma unidade de risco obtida na junção das unidades A e B. Assim, a IF registraria, ao longo dos anos, z_1, z_2, z_3, \dots , que são observações de Z , e estimaria $opvarZ$ e $E(Z)$ para obtenção do capital “marginal” $CR(Z) = opvarZ - E(Z)$. A resposta para a questão seria $CR(Z)$.

No entanto, as IFs observam os riscos separadamente, para que o processo de mitigação desses riscos seja feita de maneira mais efetiva, características peculiares de cada unidade de risco sejam captadas e também pelo fato dos eventos operacionais terem características heterogêneas. Se a IF observasse as perdas vindas de um único bloco exposto ao risco, isso dificultaria a identificação e mitigação do RO.

A denominação do método, convolução, ocorre devido a necessidade de determinar a convolução das distribuições de probabilidades de X e Y para a obtenção da distribuição de probabilidades de $Z = X + Y$.

Quando as POA's X e Y são somadas, a estrutura de dependência de ambas variáveis são refletidas na soma Z e, então, o capital a ser alocado baseado nesse método, intuitivamente, é mais realístico do que o método do somatório por captar tal dependência. Formalizamos, na próxima seção, este método.

4.1.1 Descrição do método

O método da convolução faz uma analogia ao cálculo do CR marginal discutido no Capítulo 1. Ou seja, se a IF tem as perdas X e Y , então o método considera como sendo a perda total a soma das perdas, $Z = X + Y$, para, a partir disso, determinar $CR(Z)$. Porém, é necessário calcular $E(Z)$ e $opvarZ$, para então obtermos $UL_{TOTAL} = UL_Z = opvarZ - E(Z)$, que denotaremos por CR_{CONV} . Assim,

$$CR_{CONV} = opvarZ - E(Z) = opvar(X + Y) - E(X + Y). \quad (4.1)$$

Note que, uma vez determinado $E(X)$ e $E(Y)$, pode-se obter diretamente $E(Z)$. O cálculo de

$E(Z)$ é obtido usando a propriedade 4.1, dada a seguir.

Propriedade 4.1. *Seja $Z = X + Y$, em que X e Y são v.a.'s representando as POA's para duas unidades de risco. Se $E(X)$ e $E(Y)$ existem, então $E(Z)$ existe e*

$$E(Z) = E(X) + E(Y).$$

É importante notar que na determinação de $E(Z)$, não há influência da estrutura de dependência presente entre X e Y e que, para quaisquer estruturas de dependência que possam existir entre X e Y , sempre temos $E(Z) = E(X) + E(Y)$.

Mas, de fato, o interesse é modelar a dependência entre X e Y , que é captada por $CR_{CONV} = opvarZ - E(Z)$. Como tal dependência não pode ser captada por $E(Z)$, só é possível ser captada através do $opvarZ$, percentil 0,999 da distribuição de probabilidades de Z .

Como exemplo, suponha que X e Y podem ser modelados por uma cópula cujo parâmetro de dependência é $\theta \in \mathbb{R}$ e que, quanto menor for θ , mais negativamente dependentes são X e Y e quanto maior for θ , mais positivamente dependentes são X e Y . Queremos analisar o que ocorre com $opvar(X + Y)$ quando θ percorre a reta, isto é, quando X e Y têm uma estrutura de dependência indo de um extremo ao outro.

Dessa forma, surge a questão de como determinar $opvarZ$ em termos matemáticos. Após obter a convolução entre as distribuições de X e Y , obtemos a distribuição de Z , assim, é possível obter $opvarZ$. O Teorema 4.1 mostra que nem sempre $opvar(X + Y) = opvarX + opvarY$.

Teorema 4.1. *Seja $Z = X + Y$, X e Y as perdas para duas unidades de risco. Se X e Y são perfeitamente correlacionadas, i.e., têm a cópula limite superior de Fréchet, então:*

$$opvarZ = opvarX + opvarY,$$

com $opvarZ$, $opvarX$ e $opvarY$ como definido anteriormente.

A demonstração desse teorema pode ser visto em Frachot et al. (2004).

A partir do Teorema 4.1 podemos verificar que quando θ tende a infinito, então $opvar(X + Y) = opvarX + opvarY$. Vimos no Capítulo 1 que o método do somatório superestima o CR total; mas tal método determina o CR total usando o fato da comonotonicidade. Sendo assim, quanto maior for θ , maior será $opvar(X + Y)$. Geralmente, a ideia do comportamento do percentil da soma ($opvarZ$) se

dá pelo seguinte fato: suponha X e Y negativamente dependentes (perfeitamente). Dessa forma, o par (X, Y) assume valores (grande, pequeno) ou (pequeno, grande). Somando-se esses valores temos a soma *grande + pequeno*. Analisando o outro extremo, isto é, X e Y dependentes perfeitamente positivos, o par (X, Y) assume valores (pequeno, pequeno) ou (grande, grande). Por um lado temos que a soma pode ser *pequeno + pequeno*, mas, por outro, podemos ter a soma sendo *grande + grande* implicando que a cauda da distribuição da soma Z é mais pesada e, então, obtendo o percentil 0,999 maior.

Como um exemplo, simulamos valores para X e Y sendo $X \sim Weibull(1, 5; 1, 25)$ e $Y \sim Lognormal(0; 0, 5)$ e utilizamos a cópula Gaussiana para especificar diversos níveis de correlação entre tais variáveis.

Em geral, o que temos é que o $opvar$ segue a propriedade da subaditividade, ou seja

$$opvar(X + Y) \leq opvar(X) + opvar(Y),$$

mas isso pode falhar para alguns casos particulares nos quais as caudas das distribuições de X e Y são extremamente pesadas (ver [Giacometti \(2008\)](#)). No entanto, neste trabalho, consideramos o caso mais geral em que a propriedade da subaditividade funciona, isto é, quando o $opvar$ é uma medida coerente (ver [Artzner et al. \(1999\)](#) e [Cruz \(2002\)](#)).

A subaditividade juntamente com o Teorema 4.1, diz que o método do somatório se reduz a um caso particular do método da convolução quando usamos a cópula limitante superior de Fréchet, i.e., quando supomos que X e Y têm dependência perfeita positiva, como mostra a Propriedade 4.2.

Propriedade 4.2. *Supondo que X e Y têm dependência perfeita positiva, então*

$$CR_{CONV} = CR_{SOMA}.$$

A Propriedade 4.2 é facilmente verificada pois se X e Y têm dependência perfeita positiva então $CR_{CONV} = opvar(X + Y) - E(X + Y) = opvarX + opvarY - E(X) - E(Y) = CR_{SOMA}$.

Para conseguirmos determinar o CR total via método da convolução, precisamos da distribuição de probabilidades de Z . Considere $h_C(x, y)$ a função de densidade conjunta para as perdas X e Y , construída a partir de uma cópula C e o Teorema de Sklar, ou seja, existe uma cópula C tal que a função de distribuição conjunta, $H_C(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$. Das propriedades de cópulas temos

que:

$$h_C(x, y) = c[F_X(x), F_Y(y)] f_X(x) f_Y(y),$$

em que $f_X(\cdot)$ e $f_Y(\cdot)$ são as funções de densidade marginais, $F_X(\cdot)$ e $F_Y(\cdot)$ são as funções de distribuição marginais de X e Y , respectivamente, e c é a densidade da cópula dada por

$$c(u, v) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u \partial v}.$$

Com a função $h_C(x, y)$, desejamos obter a distribuição de $Z = X + Y$, obtido através da integral de convolução (daí a denominação do método)

$$g(z) = \int_x h_C(x, z - x) dx = \int_y h_C(z - y, y) dy,$$

em que $g(z)$ será a função de densidade da variável soma Z .

Sabemos que $g(Z)$ caracteriza a distribuição de Z . Conhecendo tal distribuição, determinamos o $opvarZ$, como discutido no Capítulo 1, ou seja, $opvarZ$ é o percentil 0,999 da distribuição de Z .

Assim, a Equação 4.1 é a resposta para a questão levantada.

Em termos computacionais, o que pode ser feito é como segue no algoritmo abaixo.

Algoritmo: Suponha n observações para o par de perdas (X, Y) , digamos $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ e que C é a cópula escolhida para modelagem da dependência de tais observações.

1. Faça $z_i = x_i + y_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$ e obtenha “observações” da variável Z ;
2. Estime $E(Z)$ e $opvarZ$;
3. Determine $CR_{CONV} = CR(Z) = opvarZ - E(Z)$, utilizando os estimadores do passo 2.

Deve-se observar que o método é computacionalmente simples, mas complicado em termos analíticos por conta da determinação de $h_C(x, y)$ e da distribuição analítica de Z , que depende da integral de $h_C(x, y)$. Na prática, usamos o algoritmo acima em vez de determinar as soluções analíticas que, dependendo da cópula escolhida e das marginais, podem ser extremamente complicadas.

4.1.2 Caso multivariado

Tratamos o caso bivariado para o método da convolução. Contudo, sua extensão é natural, isto é, basta somarmos (convolução) várias variáveis perdas. Supondo que uma IF tenha as perdas

X_1, X_2, \dots, X_p , ao usarmos o método da convolução para agregar o risco nas p unidades de risco, devemos supor que há apenas uma classe de risco com perda $Z = \sum_{i=1}^p X_i$ e então obter, de alguma maneira, uma estimativa para

$$CR(Z) = opvar(Z) - E(Z) = opvar\left(\sum_{i=1}^p X_i\right) - E\left(\sum_{i=1}^p X_i\right).$$

O método se reduz ao método do somatório quando temos todas as perdas, $X_i, i \in (1, 2, \dots, p)$ são perfeitamente dependentes (o que é ainda mais longe da realidade do que supormos duas perdas perfeitamente dependentes).

A modelagem da dependência pode ser captada via cópula. Supondo agora uma cópula p -variada C , a distribuição de Z é da forma:

$$g(z) = \int_{x_1} \int_{x_2} \dots \int_{x_{p-1}} h_C\left(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, z - \sum_{i=1}^{p-1} x_i\right) dx_1 dx_2 \dots dx_{p-1}.$$

As propriedades e características do método da convolução para o caso bivariado se estendem naturalmente para o caso multivariado.

4.2 Método da correlação não-perfeita

A correlação não-perfeita no modelo LDA é apresentada em [Frachot et al. \(2004\)](#). Um dos pressupostos deste modelo se refere à independência das perdas individuais de uma específica classe de risco. Assumir que existe correlação entre as severidades das perdas de duas classes de risco implicaria em assumir, simultaneamente, que há independência de severidades dentro de cada classe de risco (pressuposto do modelo LDA) e há correlação entre severidades de duas classes de risco. Segundo [Frachot et al. \(2004\)](#) é conceitualmente difícil assumir essa hipótese. Além disso, ao assumir correlação entre severidades, haverá uma alteração no LDA padrão, sendo necessário uma reformulação no modelo. Ao reformular o modelo são encontrados dois problemas cruciais, o primeiro se refere aos complexos cálculos matemáticos e o segundo à escassez de bancos de dados.

Uma saída para contornar o problema descrito acima é adicionar a correlação na frequência dos eventos. Ou seja, assume-se que as severidades sejam independentes e as frequências correlacionadas. Assim, conseqüentemente, obtemos que as perdas agregadas operacionais sejam correlacionadas.

Adicionar correlação entre frequências dos eventos de classes de riscos distintas não altera o modelo LDA. Em particular, não muda a forma do cálculo do capital regulatório. Além disso, é possível calcular a correlação entre as frequências através de correlação histórica entre as frequências dos eventos, desde que se tenha dados suficientes.

Investigando como e em que extensão a correlação entre frequências gera correlação entre as perdas agregadas, [Frachot et al. \(2004\)](#) demonstram que mesmo quando existe uma forte correlação entre frequências, a correlação entre as perdas agregadas pode ser baixa. Isso porque a independência das severidades domina a dependência das frequências, principalmente no caso de eventos de alta severidade, isto é, quando as distribuições das severidades têm caudas pesadas.

Consideramos, nesta demonstração, $p = 2$, isto é, correlação não-perfeita para apenas duas classes de risco. Para calcular a correlação não-perfeita, empiricamente, entre duas perdas agregadas X e Y , devemos considerar:

$$\left\{ \begin{array}{l} corr(N_1, N_2) \neq 0 \\ S_1, S_2 \text{ independentes} \Rightarrow corr(S_1, S_2) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow corr(X, Y) \neq 0$$

em que N_1 e S_1 são as variáveis frequência e severidade, respectivamente, da perda agregada X , N_2 e S_2 são as variáveis frequência e severidade, respectivamente, da perda agregada Y .

Assumimos, para melhor entendimento e simplificação de notação, que $N_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ e $N_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$.

Primeiramente, determinamos a covariância entre X e Y , $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$, em que

$$X = \sum_{i=1}^{N_1} S_{1i} \text{ e } Y = \sum_{j=1}^{N_2} S_{2j}.$$

Assim,

$$\text{Cov}(X, Y) = E \left[\sum_{i=1}^{N_1} S_{1i} \sum_{j=1}^{N_2} S_{2j} \right] - E \left[\sum_{i=1}^{N_1} S_{1i} \right] E \left[\sum_{j=1}^{N_2} S_{2j} \right] \quad (4.2)$$

e as esperanças em 4.2 são calculadas por:

$$E \left[\sum_{i=1}^{N_1} S_{1i} \sum_{j=1}^{N_2} S_{2j} \right] = E[XY]$$

e

$$E[XY|N_1 = n_1, N_2 = n_2] = E \left[\left(\sum_{i=1}^{n_1} S_{1i} \right) \left(\sum_{j=1}^{n_2} S_{2j} \right) \right] = E \left(\sum_{i=1}^{n_1} S_{1i} \right) E \left(\sum_{j=1}^{n_2} S_{2j} \right) = n_1 E(S_1) n_2 E(S_2).$$

Note que, no segundo termo da equação acima, usamos o fato de S_1 e S_2 serem independentes e no terceiro termo, o fato de S_{11}, \dots, S_{1n_1} serem i.i.d. e S_{21}, \dots, S_{2n_2} serem i.i.d.. Assim, usando a propriedade de esperança condicional, obtemos:

$$E(XY) = E[E(XY|N_1, N_2)] = E(N_1 E(S_1) N_2 E(S_2)) = E(S_1) E(S_2) E(N_1 N_2).$$

Nos cálculos de $E(X)$ e $E(Y)$ procedemos como segue.

$$E \left[\sum_{i=1}^{n_1} S_{1i} | N_1 = n_1 \right] = E \left[\sum_{i=1}^{n_1} S_{1i} \right] = E(S_{11}) + \dots + E(S_{1n_1}) = n_1 E(S_1).$$

Usando a propriedade de esperança condicional, temos

$$E(X) = E[E(X|N_1)] = E(N_1 E(S_1)) = E(N_1) E(S_1) = \lambda_1 E(S_1)$$

e de forma análoga, temos

$$E(Y) = \lambda_2 E(S_2).$$

Usando os resultados acima, a Equação (4.2) é reescrita por:

$$Cov(X, Y) = [E(N_1 N_2) - \lambda_1 \lambda_2] E(S_1) E(S_2) \quad (4.3)$$

Para calcular o coeficiente de correlação, calculamos, usando propriedade de variância condicional, $var(X)$ e $var(Y)$. A variância condicional para X dado N_1 é dado por:

$$Var(X|N_1) = Var\left(\sum_{i=1}^{n_1} S_{1i} | N_1 = n_1\right) = Var(S_{11}) + Var(S_{12}) + \dots + Var(S_{1n_1}) = n_1 Var(S_1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(Var(X|N_1)) + Var(E(X|N_1)) = E(N_1 Var(S_1)) + Var(N_1 E(S_1)) \quad (4.4) \\ &= Var(S_1) E(N_1) + [E(S_1)]^2 Var(N_1) = Var(S_1) \lambda_1 + [E(S_1)]^2 \lambda_1 \\ &= \lambda_1 [(E(S_1))^2 + Var(S_1)] = \lambda_1 E(S_1^2). \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos:

$$Var(Y) = Var(S_2) \lambda_2 + [E(S_2)]^2 \lambda_2 = \lambda_2 [(E(S_2))^2 + Var(S_2)] = \lambda_2 E(S_2^2). \quad (4.5)$$

Desta forma,

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) Var(Y)}} \quad (4.6)$$

$$= \frac{[E(N_1 N_2) - \lambda_1 \lambda_2] E(S_1) E(S_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 E(S_1^2) E(S_2^2)}}. \quad (4.7)$$

Como resultado temos que $0 \leq Corr(X, Y) \leq Corr(N_1, N_2) \leq 1$, ou seja, a correlação das perdas agregadas é menor que a correlação entre as frequências, especialmente quando as distribuições das severidades têm caudas pesadas.

No caso de p classes de risco, Frachot et al. (2004) definem o capital regulatório total, para o caso em que as frequências são correlacionas e as severidades independentes, como sendo:

$$CR_{NPERF} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^p \rho_{i,j} (opvar(X) - EX)(opvar(Y) - EY)}, \quad (4.8)$$

em que $\rho_{i,j}$ é o coeficiente de correlação linear entre as perdas agregadas.

É possível observar que quando tivermos somente duas perdas, $p=2$, e considerarmos $\rho_{1,2} = 1$ (correlação perfeita), CR_{NPERF} se reduzirá ao capital obtido pelo método do somatório. Note que

o CR_{NPERF} obtido representa mais uma resposta para a questão levantada neste texto: o que são perdas inesperadas totais?

Como as IFs tem maior conhecimento ao seu perfil de risco, o Novo Acordo prevê, ainda que de maneira tímida, que o cálculo de capital requerido pode ser feito utilizando-se correlação menor do que 1 entre as classes de risco, desde que o banco possa validar seus pressupostos.

Portanto, o cálculo do capital regulatório, quando utilizamos a metodologia da correlação não-perfeita, é obtido por uma simples fórmula que depende somente da correlação entre as frequências e da variância e esperança das severidades. A desvantagem desse método está em considerar somente como medida de dependência a correlação linear. Não existindo um estudo mais rigoroso sobre a relação de dependência entre as várias perdas operacionais.

4.3 Método proposto

Nesta seção apresentamos e discutimos nossa proposta de um método alternativo para o cálculo do CR. Como descrito, o problema da modelagem da dependência está sempre presente e não deve ser ignorada em nenhum método proposto para calcular o CR. No nosso método não deve ser diferente, i.e., devemos, de alguma forma, captar a dependência entre as v.a.'s POA (vamos considerar o caso bivariado), digamos X e Y , e utilizar essa captação em um modelo que tenha como resposta o CR. Propor um modelo destes é propor uma resposta para a questão apresentada no capítulo introdutório “o que podemos considerar como sendo perdas inesperadas para a IF como um todo”, i.e, UL_{TOTAL} . Vimos também que a ferramenta estatística que utilizamos na captação da dependência é a teoria de cópulas, assim como no método da convolução, visto anteriormente.

A nova proposta requer alguns pressupostos que forma a base para construção de um método coerente com a realidade do problema. Os pressupostos apresentados a seguir são baseados no Acordo de Basileia II e na literatura geral sobre RO.

4.3.1 Pressupostos

Pressuposto i) Em primeiro lugar, na alocação de CR, é plausível que o modelo proposto possa ter um índice que retrate o cenário em que o sistema financeiro esteja atuando. Isso é, um índice (ou índices) que refletem a opinião de especialistas das instituições financeiras e de órgãos reguladores. Como visto anteriormente, o Comitê permite essa quantificação da opinião de especialistas no modelo final.

Pressuposto ii) Como sabemos, o CR total é o capital que deve cobrir as perdas inesperadas totais. No método proposto, no caso bivariado, consideramos o evento $(X, Y) \in [E(X), opvarX] \times [E(Y), opvarY]$, para isto, relacionamos, de alguma forma funcional, a probabilidade desse evento conjunto ocorrer com o CR total. Ou seja,

$$\begin{aligned} p &= Pr [\text{perdas inesperadas marginais ocorrerem conjuntamente}] \\ &= Pr [(X, Y) \in [E(X), opvarX] \times [E(Y), opvarY]] \\ &= Pr [E(X) \leq X \leq opvarX \text{ e } E(Y) \leq Y \leq opvarY]. \end{aligned}$$

Considerando H_C a função de distribuição conjunta de X e Y obtida através da cópula C (através do

teorema de Sklar), p é dada por:

$$p = H_C(\text{opvar}X, \text{opvar}Y) - H_C(E(X), \text{opvar}Y) - H_C(\text{opvar}Y, E(Y)) + H_C(E(X), E(Y)).$$

Desse modo, a estrutura de dependência presente entre X e Y é captada através da cópula C e refletida através de p . Note que p é o volume abaixo da superfície, no retângulo $[E(X), \text{opvar}X] \times [E(Y), \text{opvar}Y]$, da função de densidade conjunta de X e Y , obtida derivando a função H_C .

Pressuposto iii) Deve-se considerar também as perdas inesperadas marginais pois, de fato, estas são importantes para fornecer um CR total (UL_{TOTAL}) mais realístico. Isto é, não devemos ignorar o comportamento de $ULX = \text{opvar}X - E(X)$ e $ULY = \text{opvar}Y - E(Y)$.

Pressuposto iv) Vimos que o método do somatório considera as perdas, digamos X e Y , com dependência perfeita positiva superestimando o CR total. Em termos de cópula, a cópula de X e Y é o limite superior de Fréchet, C^+ , se, e somente se, X e Y têm dependência perfeita positiva. Então, em um método que utiliza cópulas, quando a cópula escolhida for C^+ o CR total dado pelo método deve ser igual ao dado pelo método do somatório.

Sendo assim, utilizando o pressuposto ii), quando utilizarmos a cópula C^+ na modelagem da dependência entre as perdas X e Y obteremos a probabilidade:

$$\begin{aligned} p = p^+ &= H_{C^+}(\text{opvar}X, \text{opvar}Y) - H_{C^+}(E(X), \text{opvar}Y) - H_{C^+}(\text{opvar}Y, E(Y)) \\ &+ H_{C^+}(E(X), E(Y)), \end{aligned}$$

pelo teorema de Sklar, considerando que F e G são as funções de distribuição marginais de X e Y , respectivamente, então:

$$\begin{aligned} p^+ &= \min(F(\text{opvar}X), G(\text{opvar}Y)) - \min(F(\text{opvar}X), G(EY)) \\ &\quad - \min(F(EX), G(\text{opvar}Y)) + \min(F(EX), G(EY)) \\ &= \min(0, 999; 0, 999) - \min(0, 999; G(EY)) - \min(F(EX); 0.999) \\ &\quad + \min(F(EX), G(EY)) \\ &= 0, 999 - F(EX) - G(EY) + \min(F(EX), G(EY)) \\ &= 0, 999 - \max(F(EX), G(EY)). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Logo, este pressuposto diz que quando considerarmos que a probabilidade das perdas inesperadas marginais ocorrerem conjuntamente é construída como acima (quando se utiliza a cópula C^+) o CR

total proposto deve ser igual ao CR obtido pelo método do somatório. Ou seja, se $p = p^+$, então CR total proposto é igual ao CR_{SOMA} .

Notamos que p^+ , nas famílias de cópula comumente utilizadas, é a maior possível (servindo como um limitante para a probabilidade p), mas isso nem sempre ocorre e os exemplos em que tal fato não ocorre são raros e pouco utilizados na prática.

Pressuposto v) O pressuposto iv) mostra o CR total quando consideramos X e Y com dependência perfeita positiva. Devemos também observar o que queremos como CR total quando X e Y têm dependência perfeitamente negativa, i.e., o que devemos considerar como sendo UL_{TOTAL} quando a cópula escolhida é C^- .

Primeiramente, quando a cópula escolhida é C^- , então $p^- = 0$, em que p^- denota a probabilidade p em 4.9. De fato:

$$p^- = H_{C^-}(opvar X, opvar Y) - H_{C^-}(E(X), opvar Y) - H_{C^-}(opvar Y, E(Y)) + H_{C^-}(E(X), E(Y)).$$

Pelo teorema de Sklar, considerando que F e G são as funções de distribuição marginais de X e Y , respectivamente, temos que:

$$\begin{aligned} p^- &= \max(F(opvar X) + G(opvar Y) - 1, 0) - \max(F(opvar X) + G(EY) - 1, 0) \\ &\quad - \max(F(EX) + G(opvar Y) - 1, 0) + \max(F(EX) + G(EY) - 1, 0) \\ &= \max(0, 999 + 0, 999 - 1, 0) - \max(0, 999 + G(EY) - 1, 0) \\ &\quad - \max(F(EX) + 0, 999 - 1, 0) + \max(F(EX) + G(EY) - 1, 0) \\ &= 0,998 - (0, 999 + G(EY) - 1) - (0, 999 + F(EX) - 1) + \max(F(EX) + G(EY) - 1, 0) \\ &= -(F(EX) + G(EY) - 1) + \max(F(EX) + G(EY) - 1, 0). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Porém, consideramos o caso em que X e Y são positivas e contínuas com distribuições assimétricas à direita (POA's). Então, podemos afirmar que, se X e Y são positivas e contínuas com distribuições assimétricas à direita, então $\max(F(EX) + G(EY) - 1, 0) = F(EX) + G(EY) - 1$.

Como vimos no Capítulo 1, as POA's são v.a.'s contínuas e positivas e as distribuições comumente encontradas na literatura são Weibull, Pareto, gama e log-normal. Sendo assim, as funções de densidade marginais das POA's são assimétricas à direita e a relação entre média e mediana das POA's é dada por

$$E(X) > \text{mediana}(X) \text{ e } E(Y) > \text{mediana}(Y).$$

Sabemos que $F(\text{mediana}(X)) = 0,5$ e como F é crescente, temos que:

$$E(X) > \text{mediana}(X) \Rightarrow F(E(X)) > F(\text{mediana}(X)) \Rightarrow F(E(X)) > 0,5.$$

Analogamente, $G(E(Y)) > 0,5$ e, então, $F(E(X)) + G(E(Y)) - 1 > 0$. Portanto, $\max(F(E(X)) + G(E(Y)) - 1, 0) = F(E(X)) + G(E(Y)) - 1$.

■

Voltando à Equação 4.10 e usando a afirmação acima temos que $p^- = 0$. Sendo assim, quando X e Y têm dependência perfeita negativa, a probabilidade do evento $(X, Y) \in [E(X), \text{opvar}X] \times [E(Y), \text{opvar}Y]$ ocorrer é igual a zero. Deste modo, podemos ter:

- i) $X \in [E(X), \text{opvar}X]$ ocorre e $Y \in [E(Y), \text{opvar}Y]$ não ocorre;
- ii) $X \in [E(X), \text{opvar}X]$ não ocorre e $Y \in [E(Y), \text{opvar}Y]$ ocorre ou
- iii) $X \in [E(X), \text{opvar}X]$ e $Y \in [E(Y), \text{opvar}Y]$ não ocorrem.

Desta forma, é plausível que o CR total dado pelo método, quando X e Y têm dependência perfeita negativa, seja igual ao máximo entre os CR marginais de X e Y , supondo, sem perda de generalidade, que $CR(X) > CR(Y)$. Se *i*), *ii*) ou *iii*) ocorre, garantimos que a perda inesperada total está coberta. Então, se X e Y têm dependência perfeita negativa, $CR_{TOTAL} = \max(CR(X), CR(Y))$.

Para sumarizar, os pressupostos que devemos incluir no nosso método (discutido acima) são:

- i) incluir no método a opinião de especialistas;
- ii) considerar uma forma funcional entre o CR total e a probabilidade de perdas inesperadas marginais ocorrerem conjuntamente;
- iii) considerar as perdas inesperadas marginais no modelo final;
- iv) se X e Y têm cópula C^+ , então $CR_{TOTAL} = CR_{SOMA}$;

v) se X e Y têm cópula C^- , então $CR_{TOTAL} = \max(CR(X), CR(Y))$.

4.3.2 Construção

A construção do método proposto neste trabalho se baseia em todos os pressupostos descritos na subseção 4.1.1. Consideramos uma forma funcional entre a probabilidade de perdas inesperadas marginais ocorrerem conjuntamente e o CR total. Sendo assim, existe uma função $f : [0, p^+] \rightarrow \mathbb{R}$, f crescente, tal que:

i) $f(p) = CR_{TOTAL}$;

ii) $f(0) = \max(CR(X), CR(Y))$ (pressuposto iv);

iii) $f(p^+) = CR_{SOMA}$ (pressuposto v);

É razoável considerar f crescente pois se a probabilidade das perdas inesperadas marginais ocorrerem conjuntamente cresce, então também deve crescer o CR a ser alocado. Note que estamos construindo aqui um método que responde a questão: o que são perdas inesperadas para a IF como um todo? Para responder tal questão construímos a função f . Assim,

$$\begin{aligned} f : [0, p^+] &\longrightarrow [\max(CR(X), CR(Y)), CR_{SOMA}] \\ p &\longmapsto f(p) = CR_{TOTAL}. \end{aligned}$$

No entanto, existem infinitas funções com as características descritas em i) a iii). Por exemplo, o segmento de reta que passa pelos pontos $(0, \max[CR(X), CR(Y)])$ e (p^+, CR_{SOMA}) é uma possível função. Outra possível função é $f(p) = CR_{SOMA}, p \in (0, p^+]$ e $f(p) = \max(CR(X), CR(Y)), p = 0$., considerada pelo método do somatório que ignora a probabilidade p como acima.

Sendo assim, por existir uma infinidade de funções com as características discutidas, supomos em nosso método uma família de funções. Para tal, discutimos brevemente sobre sequência de funções.

Uma nota sobre sequências e famílias de funções

Na literatura encontramos diversas definições e propriedades a cerca de sequência de funções. No nosso texto, se f_n é uma função, $n = 1, 2, \dots$, então (f_1, f_2, f_3, \dots) é uma sequência de funções que, em geral, depende de n . Utilizamos a notação $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, em que X é o domínio de f_n .

Exemplos de sequências de funções são:

- i) $f_n(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então temos a sequência (x, x^2, x^3, \dots) ;
- ii) $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}, x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então temos a sequência $(x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, \dots)$;
- iii) $f_n(x) = x^n(1 - x^n), x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então temos a sequência $(x - x^2, x^2 - x^4, x^3 - x^6, \dots)$.

Propriedades de convergência destas sequências para certas funções podem ser vistas em [Lima \(1995\)](#).

Podemos generalizar esse conceito para o que denominamos “família de funções”. Ao invés de considerarmos uma função indexada por n natural, podemos considerá-la indexada por um índice, digamos, ξ , real por exemplo, ou real positivo, e assim por diante. Considerando o exemplo *ii*), generalizamos, indexando f por $\xi \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, e obtemos a família de funções $f_\xi(x) = x^{\frac{1}{\xi}}, x \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

A família de funções tem algumas propriedades interessantes no que diz respeito a relacionar a probabilidade das perdas inesperadas marginais ocorrerem conjuntamente e o CR final. Uma destas é o comportamento ao variarmos o índice, podemos relacionar o CR final crescendo exponencialmente de acordo com tal probabilidade, podemos relacionar linearmente ou ainda de uma forma mais conservadora. Ao invés de construir uma função f no nosso problema, na verdade, construiremos uma família de funções indexadas por ξ e veremos que o Pressuposto *i*) discutido na Seção 4.3.1 será refletido nesse índice. Então o comportamento desta família discutido neste parágrafo varia de acordo com seu índice ξ . Note que a família de funções $f_\xi(x) = x^{\frac{1}{\xi}}, x \in [0, 1]$ e $\xi \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ cobre todo o quadrado unitário quando variamos ξ .

Voltando à construção do método, desejamos construir uma família de funções com as características discutidas sendo que tal família terá o papel de retornar um CR total de acordo com a probabilidade p e para cada função pertencente a esta família, teremos um CR total diferente (que dependerá de ξ). Existem infinitas famílias de funções com tais características e isso mostra que existem infinitas soluções para o problema.

Sendo assim, mostramos uma possível solução interessante para o problema. considere a seguinte

família de funções:

$$\begin{aligned} f_\xi : [0, p^+] &\longrightarrow [\max(CR(X), CR(Y)), CR_{SOMA}] \\ p &\longmapsto f_\xi(p) = ap^{\frac{1}{\xi}} + b, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

A escolha desta família atende aos nossos pressupostos e tem propriedades interessantes (é uma variação da família $f_\xi(x) = x^{\frac{1}{\xi}}, x \in [0, 1]$ e $\xi \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ que discutimos mais acima).

Agora, temos que determinar a e b para que seja construída a família desejada de acordo com os pressupostos descritos na Seção 4.3.1. Como para cada p e para cada ξ teremos, em geral, diferentes $f_\xi(p)$, usamos a seguinte notação para o CR total proposto:

$$CR_{PROP}(p; \xi) = f_\xi(p) = ap^{\frac{1}{\xi}} + b. \quad (4.11)$$

Desse modo, determinamos os coeficientes a e b . Os pressupostos usados para essa determinação são os *iv*) e *v*), reescritos abaixo como:

1. $CR_{PROP}(0; \xi) = \max(CR(X), CR(Y))$;
2. $CR_{PROP}(p^+; \xi) = CR_{SOMA}$.

De (1) e (2) acima, para determinar a e b devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} a \times 0^{\frac{1}{\xi}} + b &= \max(CR(X), CR(Y)) = \max(\text{opvar}X - EX, \text{opvar}Y - EY) \\ a(p^+)^{\frac{1}{\xi}} + b &= CR_{SOMA} = (\text{opvar}X - EX) + (\text{opvar}Y - EY) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} a &= \frac{CR_{SOMA} - \max(CR(X), CR(Y))}{(p^+)^{\frac{1}{\xi}}}; \\ b &= \max(\text{opvar}X - EX, \text{opvar}Y - EY). \end{aligned}$$

Portanto, obtemos a seguinte família de funções:

$$\begin{aligned} CR_{PROP}(p; \xi) &= \left(\frac{[(\text{opvar}X - EX) + (\text{opvar}Y - EY)] - \max(\text{opvar}X - EX, \text{opvar}Y - EY)}{(p^+)^{\frac{1}{\xi}}} \right) p^{\frac{1}{\xi}} + \\ &\quad + \max(\text{opvar}X - EX, \text{opvar}Y - EY). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Podemos ainda escrever a equação acima como:

$$CR_{PROP}(p; \xi) = \min(opvarX - EX, opvarY - EY) \left(\frac{p}{p^+} \right)^{\frac{1}{\xi}} + \max(opvarX - EX, opvarY - EY), \quad (4.13)$$

em que p é dado na Equação 4.9, p^+ é dado na Equação 4.9 e $\xi \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

Logo, a equação 4.13 é a nossa proposta de CR total, ou seja, é a resposta proposta neste texto sobre o que são as perdas inesperadas totais para a IF como um todo no caso bivariado.

O método apresentado capta a dependência presente entre duas v.a.'s através de um cópula ajustada aos dados; note que esta captação de dependência está presente na função de distribuição conjunta e isso é refletido através da probabilidade p .

De fato, os Pressupostos *ii*), *iii*), *iv*) e *v*) são satisfeitos e veremos adiante que o Pressuposto *i*) é satisfeito através do índice ξ . A escolha da família de funções da forma $ap^{\frac{1}{\xi}} + b$ com a e b como na Equação 4.12 se dá devido ao fato de, qualquer que seja ξ , as características desejadas são satisfeitas. Ou seja, para cada escolha de ξ , a IF obtém uma função com as características requeridas que podem variar do menos conservador possível até o mais conservador possível.

Note que, sendo assim, o índice ξ pode ser a quantificação da opinião de especialistas tanto de instituições financeiras quanto de órgãos reguladores. No entanto, da forma como está feito, deve-se quantificar a opinião de especialistas em um índice no intervalo $(0, +\infty)$. O fato de ξ ser ilimitado à direita pode trazer dificuldades na sua escolha pelo fato de ξ poder ser tão grande quanto se queira. Sendo assim, é mais palpável para os especialistas expressarem numericamente a sua opinião em um índice limitado. Com base nisso, podemos fazer uma transformação bijetora de $\xi \in (0, +\infty)$ em $\xi^* \in (0, 1)$ e traduzir a opinião de especialistas através de $\xi^* \in (0, 1)$ mantendo as características anteriores.

Uma possível bijeção é:

$$\xi^* = \frac{2}{\pi} \arctg(\xi)$$

e $\xi \in (0, +\infty)$ se e somente se, $\xi^* \in (0, 1)$.

A partir da equação 4.13 temos:

$$CR_{PROP}(p; \xi^*) = \min(CR(X), CR(Y)) \left(\frac{p}{p^+} \right)^{1/tg(\frac{\pi}{2}\xi^*)} + \max(CR(X), CR(Y)), \quad (4.14)$$

em que $\xi^* \in (0, 1)$, $CR(X) = opvarX - E(X)$ e $CR(Y) = opvarY - E(Y)$, p é dado na Equação 4.9 e p^+ é dado na Equação 4.9.

Esta quantificação pode ser melhor vista nas propriedades da família escolhida.

Propriedade 4.3. *Seja $CR_{PROP}(p, \xi^*)$ como na Equação 4.14.*

i) $\xi^* = 0,5$ se e somente se, $CR_{PROP}(p; 0,5) = ap + b$, ou seja, a relação a ser considerada entre p e o CR total é uma reta. De fato,

$$\xi^* = 0,5 \Leftrightarrow CR_{PROP}(p; 0,5) = \frac{\min(CR(X), CR(Y))}{p^+} p + \max(CR(X), CR(Y)).$$

ii) $\lim_{\xi^* \rightarrow 1} CR_{PROP}(p; \xi^*) = CR_{SOMA}, \forall p \in (0, p^+)$. De fato, para qualquer $p \in (0, p^+)$ tem-se:

$$\begin{aligned} \xi^* \rightarrow 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{tg(\frac{\pi}{2}\xi^*)} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \\ CR_{PROP}(p; \xi^*) &\rightarrow (\min(CR(X), CR(Y)) + \max(CR(X), CR(Y))) = CR_{SOMA}. \end{aligned}$$

iii) Sejam $\xi_1^*, \xi_2^* \in (0, 1)$. Se $\xi_1^* < \xi_2^*$, então $CR_{PROP}(p; \xi_1^*) < CR_{PROP}(p; \xi_2^*), \forall p \in (0, p^+)$. Isto é, $CR_{PROP}(p; \xi^*)$ é uma função estritamente crescente em ξ^* para qualquer $p \in (0, p^+)$. De fato,

$$\begin{aligned} \xi_1^* < \xi_2^* &\Leftrightarrow \frac{1}{tg(\frac{\pi}{2}\xi_1^*)} > \frac{1}{tg(\frac{\pi}{2}\xi_2^*)} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{p}{p^+}\right)^{1/tg(\frac{\pi}{2}\xi_1^*)} < \left(\frac{p}{p^+}\right)^{1/tg(\frac{\pi}{2}\xi_2^*)} \\ &\Leftrightarrow CR_{PROP}(p; \xi_1^*) < CR_{PROP}(p; \xi_2^*). \end{aligned}$$

Temos propriedades de convergência que são interessantes quando tendemos o índice ξ^* aos seus extremos. Então, além da característica da família das funções escolhida (característica comportamental/funcional), temos propriedades a respeito da opinião de especialistas, ξ^* .

Após a construção do método, os pressupostos podem ser vistos como propriedades.

Propriedade 4.4. *O método proposto considera*

i) a opinião de especialistas expressa em um índice ξ^* ;

ii) a dependência entre duas perdas, digamos X e Y , através da probabilidade de $(X, Y) \in [E(X), opvar(X)] \times [E(Y), opvar(Y)]$;

iii) as perdas inesperadas marginais no modelo final;

iv) se X e Y têm cópula C^+ , então $CR_{TOTAL} = CR_{SOMA}$;

v) se X e Y têm cópula C^- , então $CR_{TOTAL} = \max(CR(X), CR(Y))$.

As propriedades dizem que a instituição financeira (junto com seus reguladores) tem a liberdade de incluir no modelo a sua opinião, podendo escolher uma infinidade de relações entre p e o CR total. As instituições podem ainda escolher $\xi^* \rightarrow 1$ e tal escolha implicará na redução do método proposto ao caso particular mais conservador possível, i.e., no método do somatório.

4.3.3 Aplicação – Estudo do comportamento teórico do método

Nessa seção, estudamos o comportamento do CR total proposto de acordo com a Equação 4.14. Supomos o caso bivariado, ou seja, X e Y representam as POA's em duas unidades de risco em uma instituição financeira, como no Capítulo 4.1.

Analogamente ao que foi feito no Capítulo 4.1, nessa simulação, supomos que as distribuições marginais já foram estimadas. As pressupostas distribuições de probabilidade de X e Y são, novamente,

$$X \sim Weibull(1, 5; 1, 25) \text{ e } Y \sim Lognormal(0; 0, 5).$$

Com estas distribuições marginais para X e Y obtemos o CR total pelo método do somatório, (Tabela 4.1).

Tabela 4.1: Capital Regulatório total via método do somatório.

| | |
|-------------|-----------|
| $E(X)$ | 1, 128432 |
| $opvarX$ | 4, 533859 |
| $E(Y)$ | 1, 133148 |
| $opvarY$ | 4, 688516 |
| CR_{SOMA} | 6, 960795 |

Para determinar CR_{PROP} determinamos os coeficientes da Equação 4.14 e p^+ , (Tabela 4.2).

Na nossa simulação, usamos a cópula Gaussiana para X e Y , descrita na Equação 3.17. O parâmetro desta cópula é o coeficiente de correlação linear entre X e Y , ρ , sendo, muitas vezes,

Tabela 4.2: Coeficientes para a determinação do CR total proposto.

| | |
|----------------------|-----------|
| $\min(CR(X), CR(Y))$ | 3,405427 |
| $\max(CR(X), CR(Y))$ | 3,555368 |
| p^+ | 0,4002937 |

denominado parâmetro de dependência. Este é o único na cópula Gaussiana que descreve a estrutura de dependência.

Para cada ρ fixado no intervalo $(-1, 1)$, constrói-se uma cópula Gaussiana. A partir dessa cópula, constrói-se uma distribuição conjunta para X e Y e obtém-se $H_C(X, Y)$. A partir da função de distribuição conjunta, determinamos a probabilidade p discutida anteriormente. Desse modo, para cada ρ diferente, obtemos uma probabilidade p diferente; também, se p_1 e p_2 são as probabilidades determinadas utilizando ρ_1 e ρ_2 , respectivamente, $\rho_1 < \rho_2$ se e somente se, $p_1 < p_2$ (Figura 4.1). Vale ressaltar que se fixamos $\rho = 1$ então obtemos $p = p^+$.

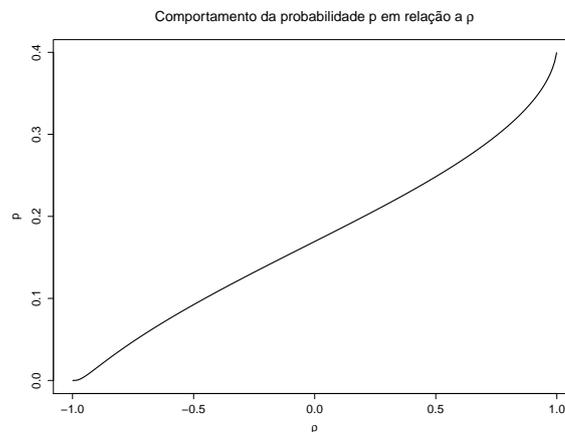


Figura 4.1: Comportamento da probabilidade p em relação ao ρ (para as distribuições das marginais e cópula dadas).

Assim, basta variarmos $p \in [0, p^+]$ (ou seja, ρ) e $\xi \in (0, 1)$ para obtermos o CR total proposto. Com isso, podemos estudar o comportamento do CR proposto em relação à p fixando alguns ξ^* 's e vice-versa. Estes comportamentos são mostrados nas Figuras 4.2 e 4.3, respectivamente.

Na Figura 4.2 obtemos a representação da família de funções que discutimos nesse capítulo, Seção 4.3.2, e como propriedade temos que se variarmos ξ^* em todo intervalo $(0, 1)$, cobriremos o retângulo

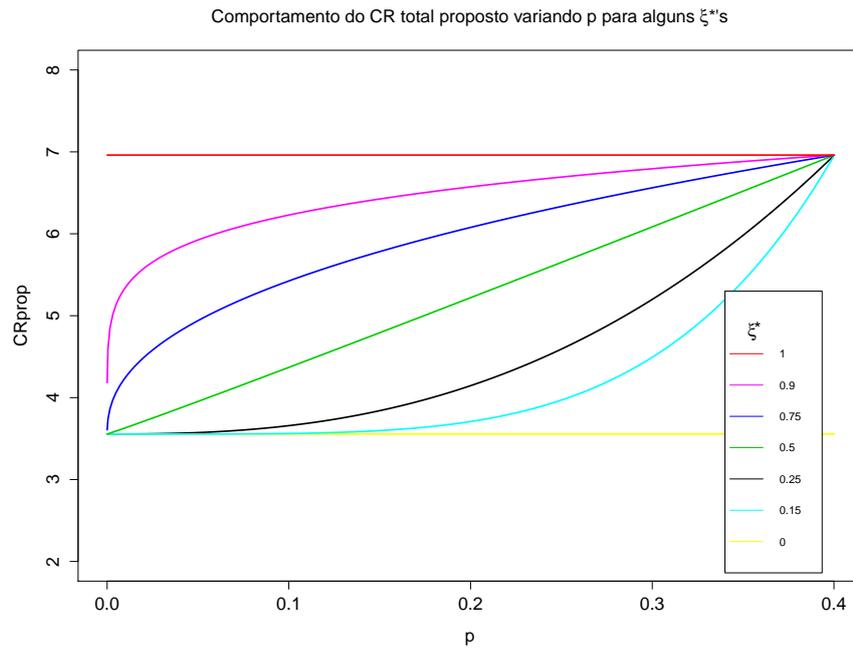


Figura 4.2: Comportamento de CR_{PROP} em relação a p , para alguns ξ^* (para as distribuições das marginais e cópula dadas).

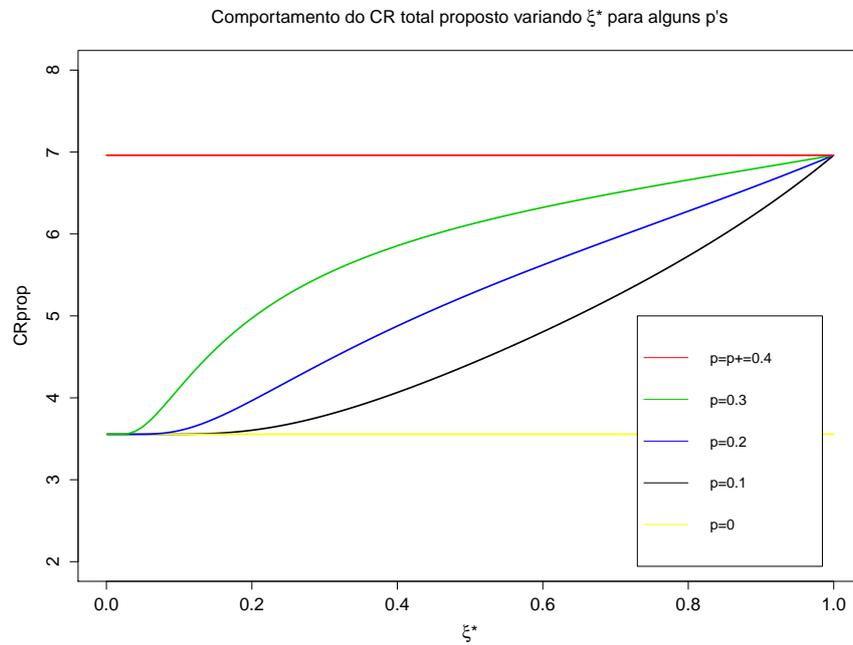


Figura 4.3: Comportamento de CR_{PROP} em relação a p , para alguns ξ^* (para as distribuições das marginais e cópula dadas).

$$[0, \max(CR(X), CR(Y))] \times [p^+, \min(CR(X), CR(Y))].$$

Note que nas Figuras 4.2 e 4.3 observamos curvas de níveis da superfície obtida quando variamos p e ξ^* determinando o $CR_{PROP}(p; \xi^*)$. Sendo assim, podemos estudar o comportamento do CR_{PROP} para ambas variáveis p e ξ^* , como visto na Figura 4.4

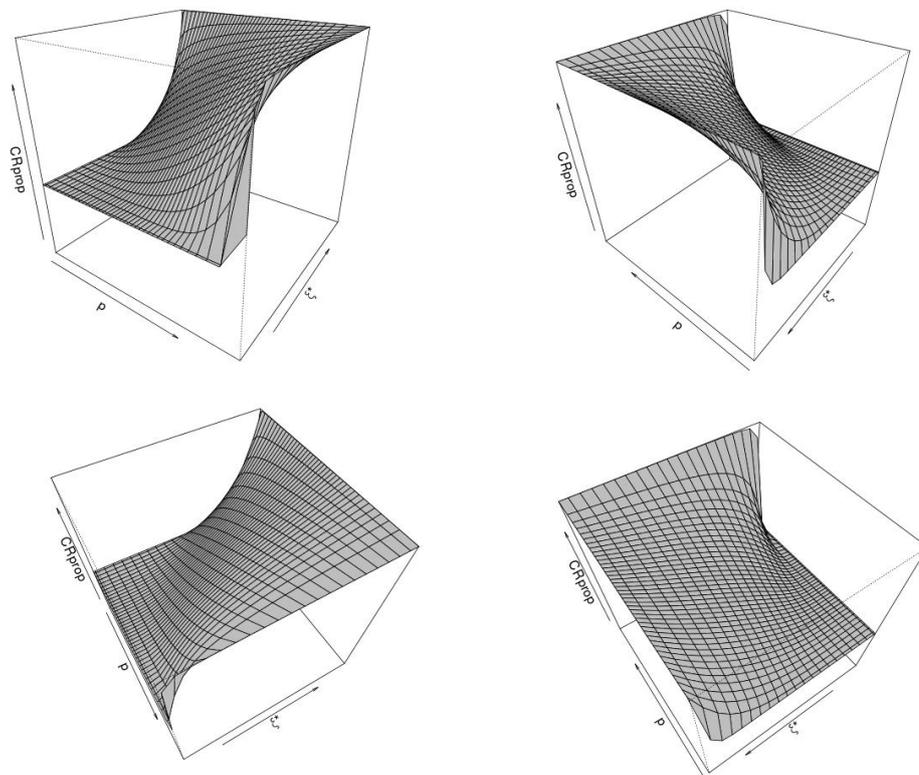


Figura 4.4: Comportamento bivariado do CR total proposto (para as distribuições das marginais e cópula dadas).

Para finalizar apresentamos na Tabela 4.3 o comportamento numérico do CR total proposto para diferentes p 's e ξ^* 's.

Pode-se notar que o $CR_{PROP}(p, \xi^*)$ é sempre crescente em cada um dos seus argumentos. Outro fato interessante que podemos verificar (Tabela 4.3) é que tanto para $p = p^+$ quanto para $\xi^* \rightarrow 1$, o CR total proposto é igual a 6,960795 que é o CR via método do somatório. Podemos ver também que todos os outros valores, perceptível nos gráficos apresentados do comportamento do CR total proposto, são sempre menores do que o CR_{SOMA} .

Como vantagens, o método é rápido computacionalmente e é simples implementá-lo. Também leva em consideração as opiniões de especialistas, recomendado pelo Comitê. Ainda capta à sua maneira a dependência entre duas unidades de risco via cópulas, sendo que é livre a “escolha” da cópula. O método leva em consideração a probabilidade da ocorrência de eventos que estão diretamente relacionados com a perda inesperada total que a instituição terá e ainda tem sua interpretação relativamente simples.

Capítulo 5

Estudo de Simulação

O objetivo deste capítulo é mostrar ao leitor os capitais regulatórios obtidos pelos métodos somatório, convolução, correlação não-perfeita e o proposto, utilizando dados simulados. Os resultados obtidos por cada método serão comparados, bem como as vantagens e desvantagens de cada um deles. Vale ressaltar que dados reais não são disponibilizados, facilmente, pelas instituições financeiras.

Em uma situação real, as IFs aderem distribuições a seus dados de frequência e severidade. Em seguida, a construção da função de distribuição da perda agregada é feita por meio da metodologia LDA.

5.1 Comparação entre os métodos

Cópula Gaussiana

Nesta etapa a cópula Gaussiana, que determina a estrutura de dependência das perdas, é usada para compararmos os métodos do somatório, da convolução e o proposto. Supomos o caso bivariado em que X e Y são v.a.'s que representam as POA's, cujas distribuições são $X \sim Weibull(1, 5; 1, 25)$ e $Y \sim Lognormal(0; 0, 5)$.

O estudo de simulação é conduzido variando o grau de dependência das perdas considerando valores diferentes para o parâmetro da cópula. Para isto, utilizamos o seguinte algoritmo:

- i) Considere K valores do parâmetro ρ , obtendo o vetor $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_K)$;

- ii) Considere M valores de ξ^* , $\xi^* \in (0, 1)$, obtendo, assim, o vetor $\boldsymbol{\xi}^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_M^*)$;
- iii) Para cada ρ_k , $k = 1, 2, \dots, K$, a cópula C_{ρ_k} é construída;
- iv) Para cada C_{ρ_k} , $k = 1, 2, \dots, K$, gere n pares de dados $(x_i, y_i)_k$, $i = 1, 2, \dots, n$, com função de distribuição conjunta dada por $H(x, y) = C_{\rho_k}(F(x), G(y))$;
- v) Para cada conjunto de dados $(x_1, y_1)_k, (x_2, y_2)_k, \dots, (x_n, y_n)_k$, $k = 1, 2, \dots, K$, calcule CR_{SOMA} , CR_{CONV} e, para cada ξ_m^* ($m = 1, 2, \dots, M$), obtenha $CR_{PROP; \xi_m^*}$.

Teoricamente, o método proposto é mais flexível em relação ao da convolução, pois considera as opiniões de especialistas e os resultados variam de acordo com essa escolha. Já no método da convolução, o resultado obtido é fixo e só depende dos dados, bem como das estimativas necessárias.

Em relação às simulações, na Tabela 5.1 observamos que o CR é menor no método da convolução do que o CR no método proposto, para ρ baixo e para os ξ^* usados. Isto ocorre pois um dos pressupostos do método proposto é o fato de que quando a probabilidade conjunta dos eventos de perda inesperada for zero ($\rho = -1$), então é obtido um CR que é o máximo entre os capitais marginais, ou seja, não se sabe qual evento ocorrerá, então é plausível supor que o pior deles ocorre. Por outro lado, no método da convolução, tal pressuposto não é obedecido e, assim, o CR final é menor. Isso também é visto na Figura 5.1.

Para valores positivos de correlação, existe um índice ξ^* cujo CR obtido pelo método proposto é menor do que o encontrado via o método da convolução. Vale notar que não estamos, necessariamente, buscando o menor capital a ser alocado, e sim o mais plausível de acordo com a realidade.

Atualmente, o método do somatório ainda é usado, apesar do método da convolução ter sido considerado em trabalhos publicados antes mesmo do próprio Acordo de Basileia II (ver Alexander (2003)). Isto talvez ocorra por conta da insegurança das instituições financeiras e de seus órgãos reguladores no que diz respeito às perdas operacionais. Por esse motivo, a flexibilidade do método proposto é vista como uma vantagem importante, pois pode-se chegar a um consenso entre instituição financeira e seu respectivo regulador.

Tabela 5.1: Comparação entre CR_{SOMA} , CR_{PROP} e CR_{CONV} .

| ρ | CR_{SOMA} | CR_{CONV} | $CR_{PROP;\xi^*=0.1}$ | $CR_{PROP;\xi^*=0.5}$ | $CR_{PROP;\xi^*=0.7}$ | $CR_{PROP;\xi^*=0.9}$ |
|--------|-------------|-------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| -0,9 | 6,9488 | 2,8015 | 3,6112 | 3,7379 | 4,2414 | 5,5991 |
| -0,6 | 7,0720 | 3,1336 | 3,6544 | 4,2862 | 5,1004 | 6,2702 |
| -0,3 | 7,1032 | 3,7076 | 3,6425 | 4,6979 | 5,5325 | 6,5101 |
| 0 | 7,1078 | 4,5912 | 3,5800 | 5,0409 | 5,8326 | 6,6489 |
| 0,1 | 7,1239 | 4,8266 | 3,6029 | 5,1859 | 5,9478 | 6,7064 |
| 0,3 | 7,2318 | 5,4404 | 3,7444 | 5,5605 | 6,2487 | 6,8915 |
| 0,5 | 7,2477 | 6,0058 | 3,8201 | 5,8542 | 6,4526 | 6,9789 |
| 0,7 | 7,3501 | 6,5882 | 4,1308 | 6,2896 | 6,7641 | 7,1568 |
| 0,9 | 7,4127 | 7,1697 | 4,9733 | 6,8271 | 7,1015 | 7,3130 |
| 1 | 7,4821 | 7,4821 | 7,4821 | 7,4821 | 7,4821 | 7,4821 |

Comparação entre os métodos

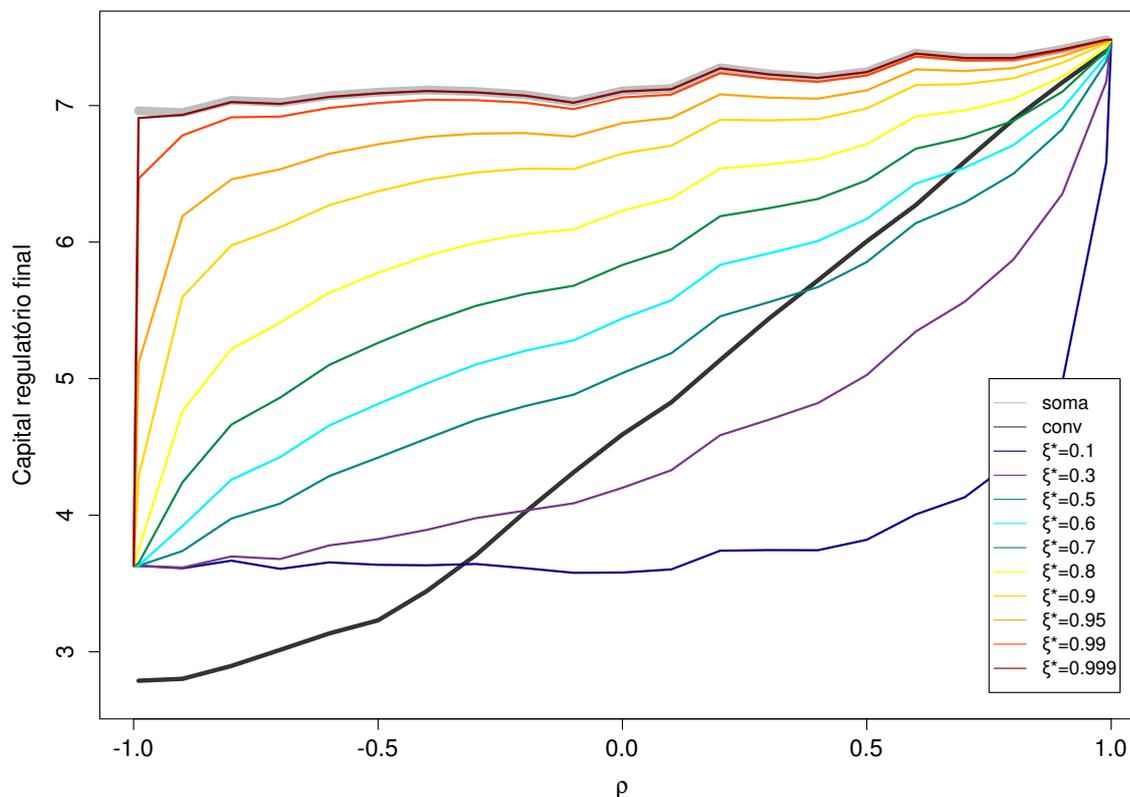


Figura 5.1: Comparação entre os métodos utilizados.

Cópula de Frank

Nesta segunda etapa utilizamos a cópula de Frank no sentido de compararmos os métodos do somatório, da correlação não-perfeita e, novamente, o proposto. As distribuições usadas para as perdas agregadas são $X \sim Gama(1; 2)$ e $Y \sim Pareto(1; 2, 5)$.

Para estudar o comportamento do capital regulatório utilizamos o mesmo algoritmo descrito anteriormente:

1. Considere K valores de θ , $\theta \in (-a, a)$, obtendo o vetor $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_K)$. Na simulação usamos $a = 20$, uma vez que $|\theta| = 20$ já representa uma forte dependência entre as perdas agregadas;
2. Considere M valores de ξ^* 's, $\xi^* \in (0, 1)$, obtendo, assim, $\boldsymbol{\xi}^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_M^*)$;
3. Para cada θ_k , $k = 1, \dots, K$, a cópula C_{θ_k} é contruída;
4. Para cada C_{θ_k} , $k = 1, \dots, K$, gere valores $(x_i, y_i)_k$, $i = 1, \dots, n$ a partir da função de distribuição conjunta $H(x, y) = C_{\theta_k}(F(x), G(y))$;
5. Para cada conjunto de dados $(x_1, y_1)_k, (x_2, y_2)_k, \dots, (x_n, y_n)_k$, $k = 1, 2, \dots, K$, calcule CR_{SUM} , CR_{NPERF} e para cada ξ_m^* , $m = 1, \dots, M$, obtenha $CR_{PROP; \xi_m^*}$.

Para o método proposto, calculamos o capital regulatório para $\xi^* = 0, 1, 0, 5, 0, 7e0, 9$.

Tabela 5.2: Comparação entre CR_{SUM} , CR_{NPERF} e CR_{PROP}

| θ | CR_{SUM} | CR_{NPERF} | $CR_{PROP; \xi^*=0.1}$ | $CR_{PROP; \xi^*=0.5}$ | $CR_{PROP; \xi^*=0.7}$ | $CR_{PROP; \xi^*=0.9}$ |
|-----------------|------------|--------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| -20 | 20.5419 | 12.4889 | 13.5567 | 13.5591 | 13.6755 | 15.5252 |
| -10 | 20.9300 | 13.1044 | 13.9448 | 14.0437 | 14.7427 | 17.5034 |
| -5 | 19.8664 | 12.7227 | 12.8812 | 13.5267 | 14.9569 | 17.6715 |
| -1 | 20.3614 | 14.5787 | 13.3815 | 15.6220 | 17.2944 | 19.2123 |
| $\rightarrow 0$ | 20.2501 | 15.0219 | 13.2883 | 16.0966 | 17.6743 | 19.3193 |
| 1 | 21.9110 | 16.9362 | 14.9963 | 18.2988 | 19.7462 | 21.1503 |
| 5 | 21.3236 | 17.8705 | 15.5388 | 19.6233 | 20.3982 | 21.0217 |
| 10 | 19.3028 | 19.3028 | 18.7185 | 21.3214 | 21.6387 | 21.8756 |
| 20 | 19.68969 | 19.6897 | 20.8725 | 21.7258 | 21.8105 | 21.8718 |

Teoricamente, no cálculo do CR_{SUM} , não levamos em consideração a estrutura de dependência entre as variáveis perdas agregadas.

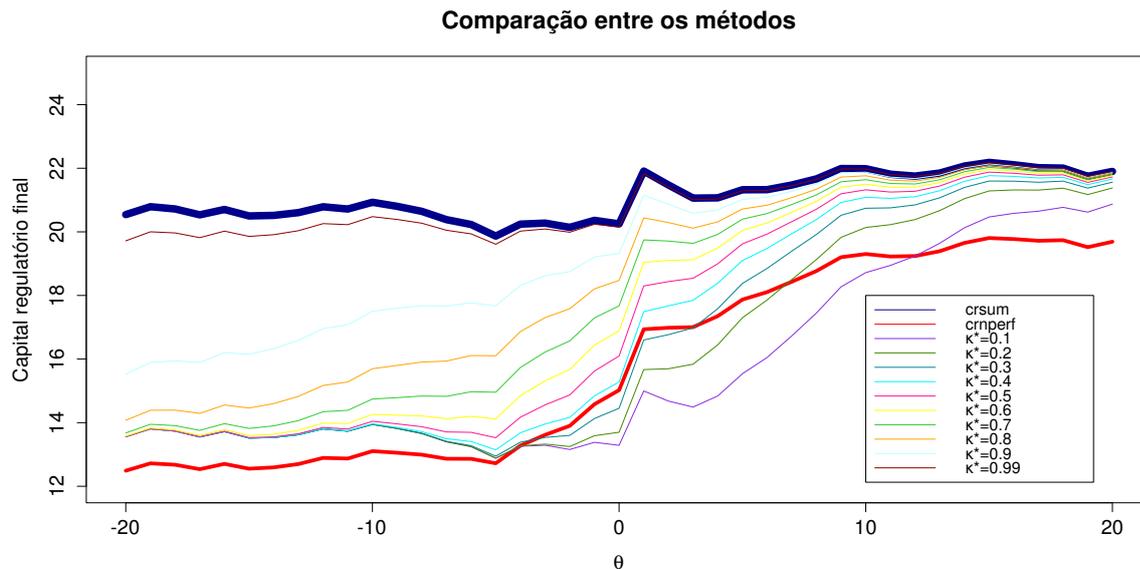


Figura 5.2: Comparando os três métodos: CR_{SUM} , CR_{NPERF} e $CR_{PROP;\xi_n^*}$.

É possível notar pela Figura 5.2 que, quando $\theta \rightarrow \infty$, os capitais regulatórios obtidos pelos métodos proposto e correlação não-perfeita serão iguais ao capital obtido pelo método do somatório. Além disso, conforme abordado, o CR_{NPERF} e o CR_{PROP} são crescentes de acordo com o grau de dependência entre as variáveis perdas agregadas, ou seja, quanto maior o grau de dependência entre as variáveis, maior será o retorno de capital. Pela Tabela 5.2 observe que isto não ocorre em todos os casos devido a aleatoriedade dos dados. Além do CR_{PROP} ser crescente em θ , ele também cresce a medida que o valor de ξ^* (opinião do especialista) aumenta. Por exemplo, ao fixarmos $\theta = -20$ e variarmos os valores de ξ^* , o capital regulatório aumentará conforme aumentamos os valores de ξ^* .

5.2 Estimando uma cópula

No estudo de simulação feito na Seção 5.1, a família de cópulas é fixada, pois o foco era o estudar do comportamento do CR final de todos os métodos, de acordo com o grau de dependência entre as perdas X e Y . No entanto, na prática, podemos ajustar vários modelos aos dados. A escolha da cópula final pode ser feita com base na cópula empírica C_n e em uma família de cópulas \tilde{C} . As distribuições utilizadas nessa seção são $X \sim Weibull(1, 5; 1, 25)$ e $Y \sim Lognormal(0; 0, 5)$. Além disso foi usado o seguinte algoritmo:

- i) Gere valores do par (u, v) de uma cópula qualquer com parâmetro fixado;
- ii) Considere M famílias de cópulas candidatas para modelar os dados;
- iii) Estime os parâmetros das M cópulas candidatas utilizando os dados gerados em $i)$, obtendo $\tilde{C} = (C_1, C_2, \dots, C_M)$;
- iv) Construa a cópula empírica C_n a partir dos dados gerados em $i)$;
- v) Calcule as distâncias (com alguma norma desejada) entre C_n e todas as cópulas de \tilde{C} ;
- vi) Escolha a cópula de \tilde{C} com menor distância para que seja calculado o $CR_{PROP;\xi^*}$.

Observe que no passo $i)$ geramos dados uniformizados. Na prática, uniformizamos as perdas associadas à X e Y e o algoritmo é usado a partir do passo $ii)$.

Consideramos a família de cópulas Gaussiana com $\rho = 0,5$ para gerar 200 observações e as famílias de cópulas “candidatas” como sendo as famílias Gaussiana, t , de Frank e de Ali-Mikhail-Haq (AMH). Os parâmetros de todas estas famílias foram estimados pelo método IFM. Note que a família de cópulas t é biparamétrica (coeficiente de correlação linear ρ e o grau de liberdade ν). No entanto, ao invés de estimar ν , fixamos alguns graus de liberdade ($\nu = 1, 5, 10$ e 80) e, assim, estimamos somente o coeficiente de correlação ρ . A distância utilizada no passo $iv)$ é

$$\bar{d}_{||}(C_n, C_m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left| C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - C_m \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right|.$$

Sendo assim, o \tilde{C} já com os parâmetros estimados e as respectivas distâncias baseadas na cópula empírica é apresentado na Tabela 5.3

Na Tabela 5.3 mostramos os parâmetros estimados das cópulas candidatas, bem como a distância destas à cópula empírica.

Observando a Tabela 5.3, vemos que a cópula que tem a menor distância é a Gaussiana com $\hat{\rho} = 0,4552$, fato esperado, pois os dados foram gerados a partir de uma família Gaussiana e, assim, a estrutura de dependência desta família foi refletida aos dados e captadas na escolha da cópula. No entanto, as cópulas C_5 ($t_{\hat{\rho}=0,45523;\nu=80}$) e C_6 (Frank com parâmetro estimado igual a 3,0454) também apresentaram distância pequenas. No caso da cópula C_5 , como a cópula t aproxima-se da Gaussiana quando $\nu \rightarrow \infty$ a distância entre estas cópulas e a empírica é, praticamente, a mesma. Já a cópula

Tabela 5.3: Cópulas de \tilde{C} com respectivas estimativas dos parâmetros e distâncias.

| \tilde{C} | Família | Parâmetro | Distância \bar{d}_1 |
|-------------|--------------|-----------|-----------------------|
| C_1 | Gaussiana | 0.45520 | 0.005965153 |
| C_2 | $t_{\nu=1}$ | 0.26442 | 0.021838732 |
| C_3 | $t_{\nu=5}$ | 0.42647 | 0.007813121 |
| C_4 | $t_{\nu=10}$ | 0.44647 | 0.006492369 |
| C_5 | $t_{\nu=80}$ | 0.45523 | 0.005980726 |
| C_6 | Frank | 3.0454 | 0.005979630 |
| C_7 | AMH | 0.91746 | 0.009135232 |

C_6 tem algumas características de dependência similares à cópula Gaussiana, como por exemplo, a simetria e maior dependência nas caudas, e, por isso, a sua distância à cópula empírica é muito próxima às distâncias associadas aos modelos Gaussiana e t .

Uma maneira para visualizar esta distância é o gráfico da diagonal das cópulas de \tilde{C} comparando-as com a diagonal da cópula empírica, i.e., compara-se $C_m(u, u), u \in I$, e $C_n(u, u), u \in I, C_m \in \tilde{C}$.

Nota-se pela Figura 5.4 que as cópulas C_1, C_5 e C_6 tem diagonal próxima a C_n , indicando que tais cópulas se ajustam melhor aos dados. Contudo, esse gráfico somente mostra o ajuste de uma cópula à empírica na diagonal $(u, u), u \in I$.

Uma outra ferramenta gráfica é o gráfico das curvas de nível de uma cópula e da cópula empírica.

Os gráficos da Figura 5.6 são mais completos do que os da Figura 5.4, pois mostram o quão próximo as cópulas pertencentes a \tilde{C} estão da cópula empírica em vários níveis. A Figura 5.6, assim como a Figura 5.4, também mostra que as cópulas mais próximas à empírica são as C_1, C_5 e C_6 .

Após a escolha da cópula que melhor se ajusta aos dados, determinamos o CR segundo o método proposto. O CR_{SOMA} não depende da cópula escolhida e, com relação ao CR_{CONV} , teoricamente, a escolha da cópula deve mudar os valores de CR_{CONV} , no entanto, determinamos tal capital com base no algoritmo apresentado na Seção 4.1, sendo que tal algoritmo não exige a escolha da cópula, pois a distribuição da soma é feita com base nas observações de $X + Y$, dispensando, assim, o uso da cópula. O cálculo do $CR_{PROP;\xi^*}$ (para vários valores de ξ^*) envolve o modelo de cópula. Assim, para cada

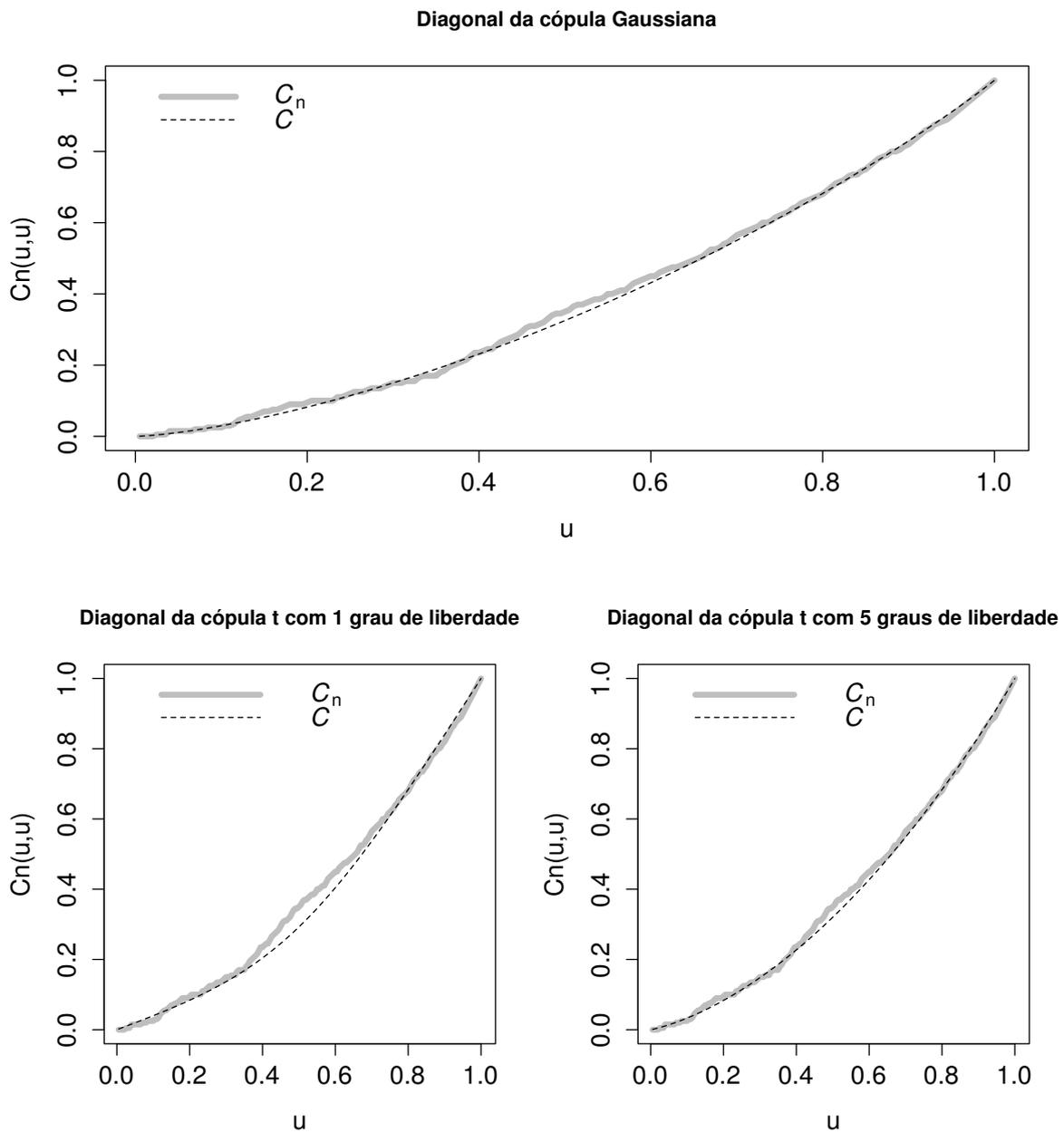


Figura 5.3: Comparação entre as diagonais das cópulas pertencentes à \tilde{C} e C_n .

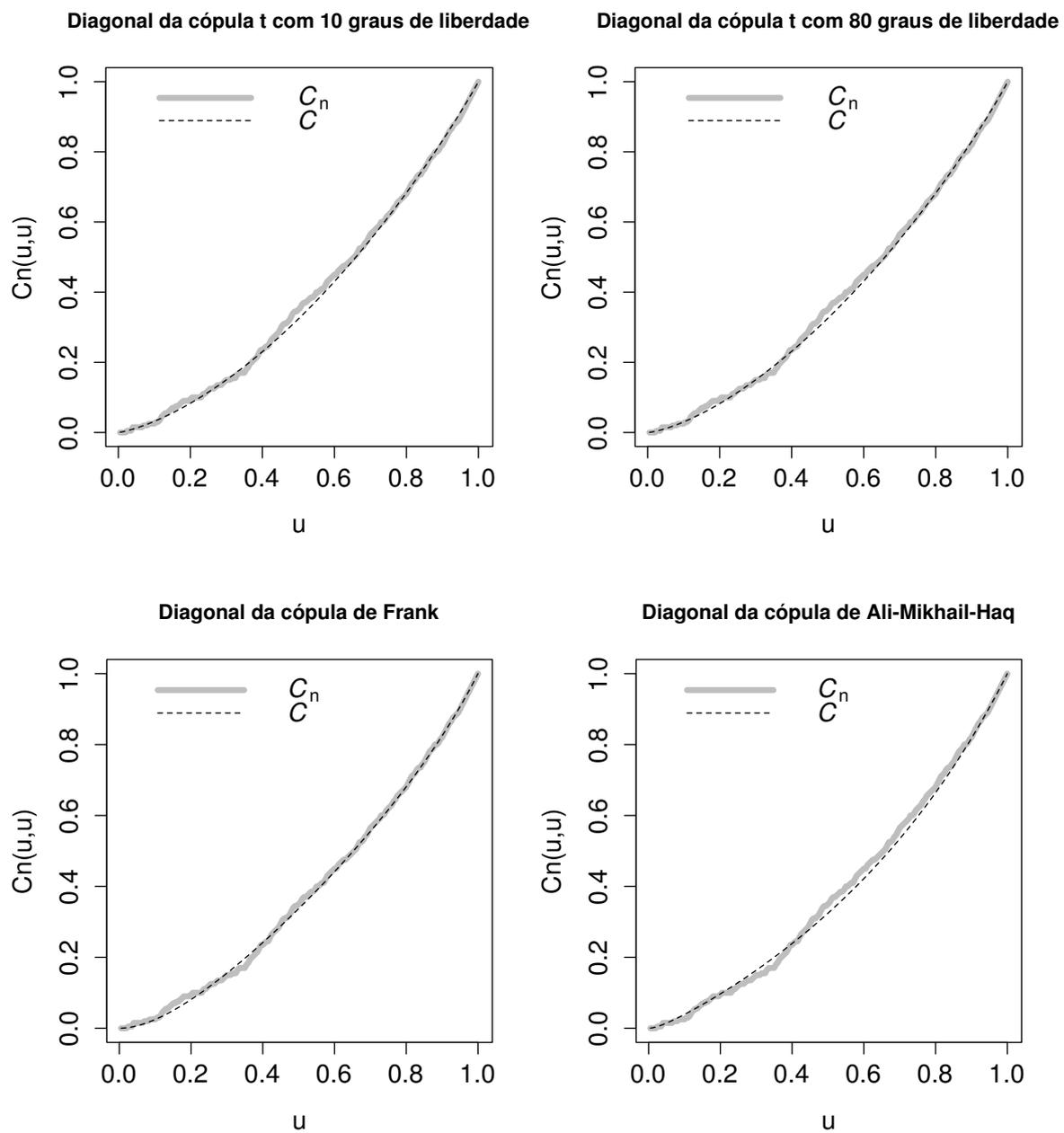


Figura 5.4: Comparação entre as diagonais das cópulas pertencentes à \tilde{C} e C_n .

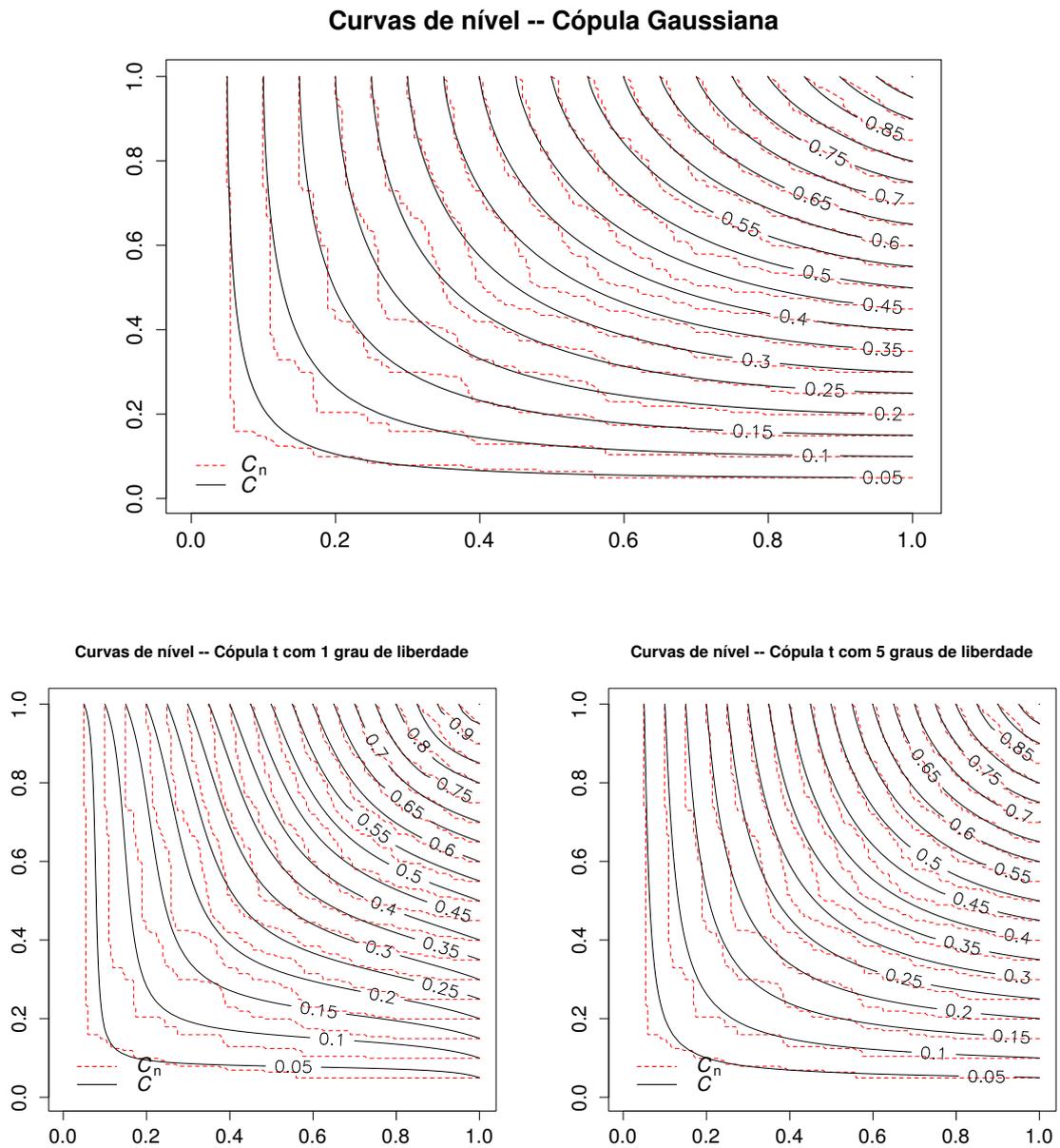


Figura 5.5: Comparação entre as curvas de nível das cópulas pertencentes à \tilde{C} e C_n .

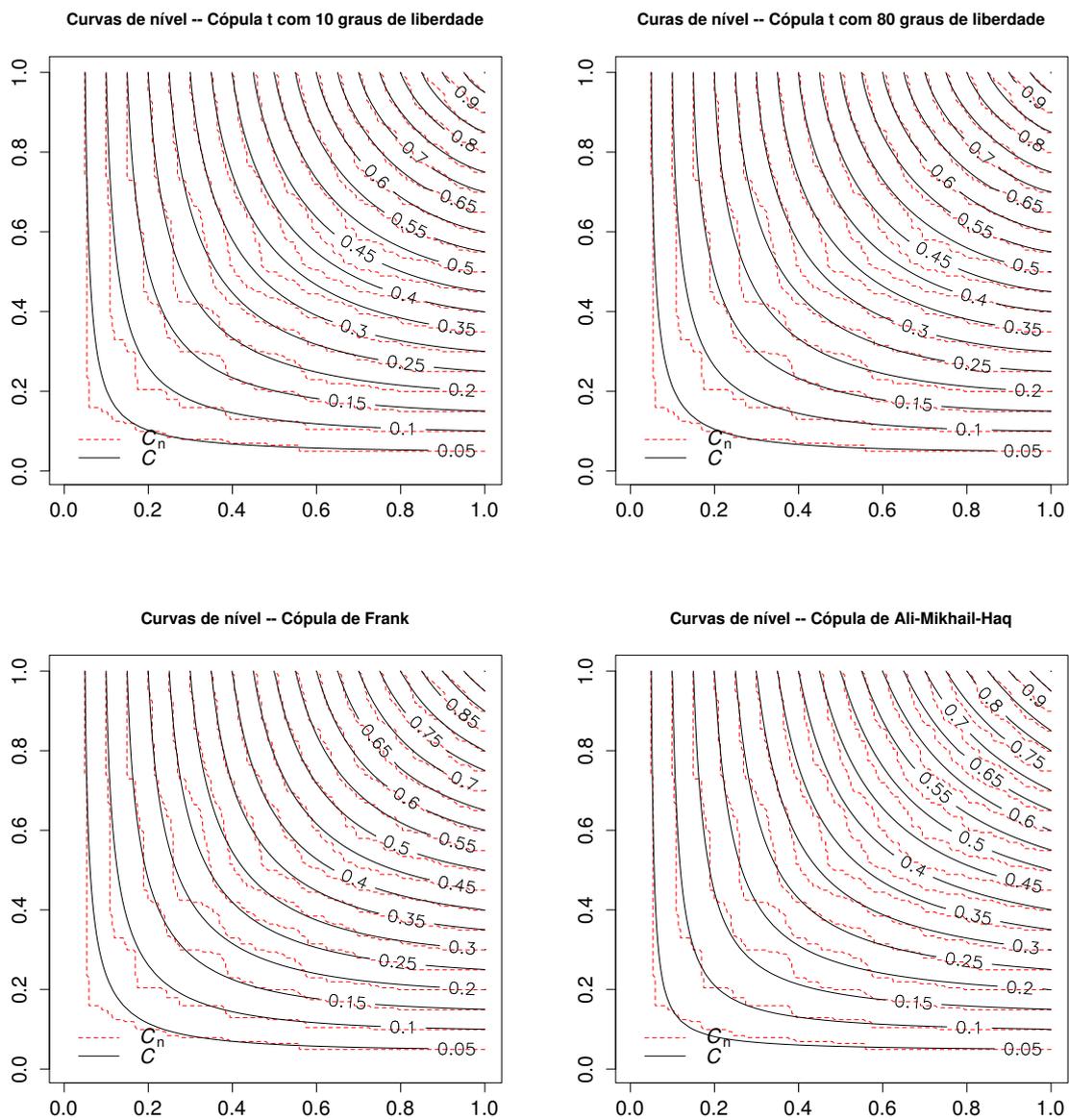


Figura 5.6: Comparação entre as curvas de nível das cópulas pertencentes à \tilde{C} e C_n .

cópula considerada teremos diferentes valores para $CR_{PROP;\xi^*}$.

Obtemos o valor do $CR_{PROP;\xi^*}$ (para vários níveis de ξ^*) utilizando a cópula Gaussiana com parâmetro $\rho = 0,4552$. Os resultados são mostrados na Tabela 5.4.

Finalmente, calculamos os CRs pelo método proposto com todas as cópulas candidatas pertencentes à \tilde{C} , a fim de comparar os capitais resultantes. Analisamos o comportamento do $CR_{PROP;\xi^*}$, variando ξ^* , comparando cada uma das cópulas C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 e C_7 com a cópula C_1 . Os resultados são vistos na Figura 5.7.

Tabela 5.4: Valores dos CR's obtidos através da cópula Gaussiana.

| ξ^* | $CR_{PROP;\xi^*}$ |
|---------|-------------------|
| 0.1 | 2.757391 |
| 0.2 | 3.160975 |
| 0.3 | 3.561636 |
| 0.4 | 3.890347 |
| 0.5 | 4.162816 |
| 0.6 | 4.39823 |
| 0.7 | 4.611219 |
| 0.8 | 4.812946 |
| 0.9 | 5.01286 |
| 1 | 5.220274 |

| | |
|-------------|----------|
| CR_{SOMA} | 5.220274 |
| CR_{CONV} | 3.64003 |

Podemos observar alguns fatos a partir da Figura 5.7. Os CR obtidos pelo método proposto utilizando as cópulas C_4 e C_5 tem um comportamento muito próximo do CR proposto a partir da cópula C_1 . Este fato pode ser devido às características similares dessas cópulas e por serem todas da classe elíptica (Gaussiana e t com graus de liberdade, respectivamente, 10 e 80). O uso da cópula t com 1 grau de liberdade retorna o CR proposto mais distante em relação ao obtido utilizando a cópula C_1 , sendo que esta cópula é aquela que tem a maior distância à cópula empírica. Já as outras 5 cópulas, quando comparamos o CR proposto com o obtido pela cópula C_1 , têm diferenças relativamente pequenas e a distância de tais cópulas à empírica também são relativamente pequenas,

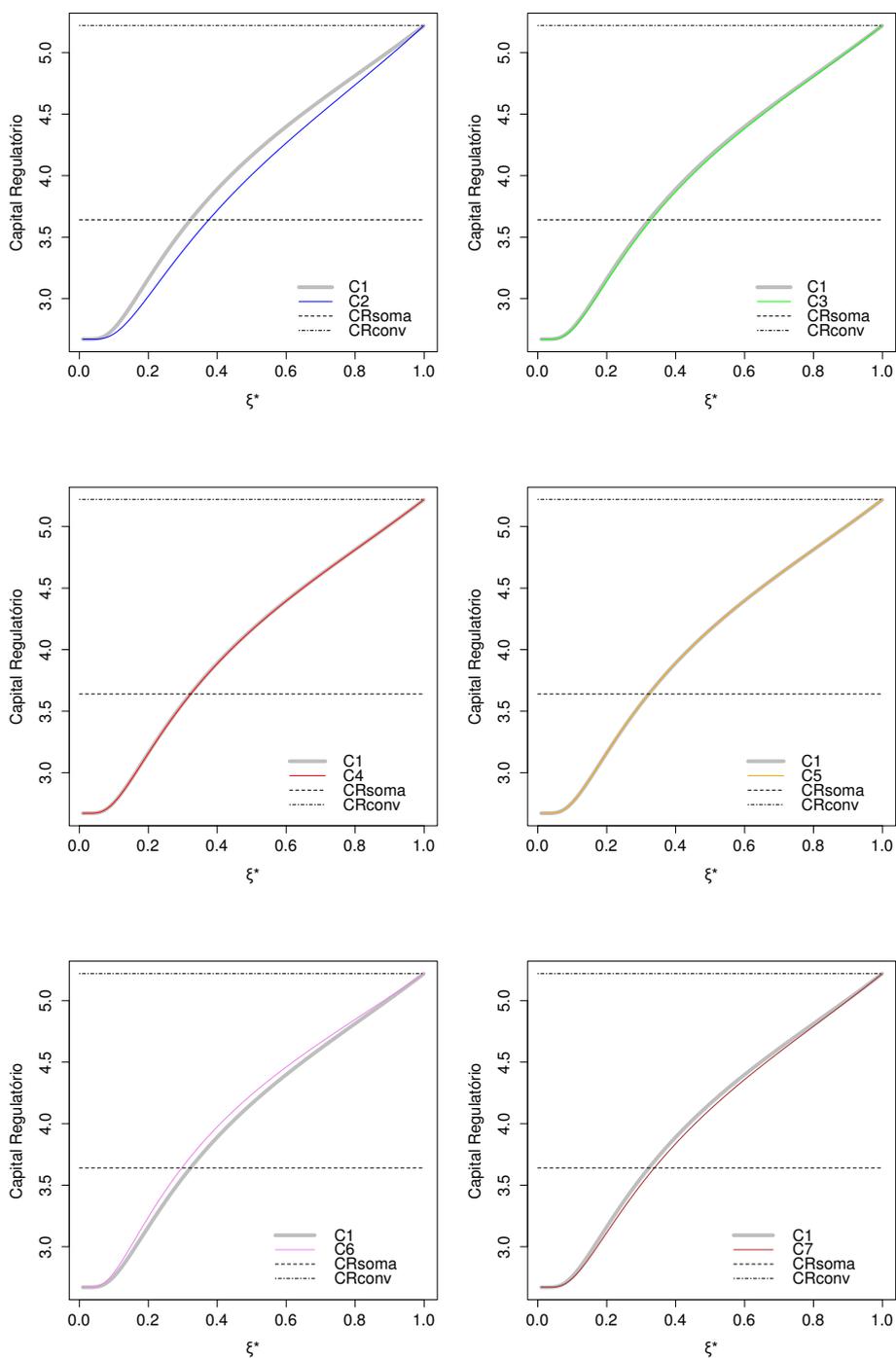


Figura 5.7: Comparação entre os CR proposto por diferentes cópulas com a cópula Gaussiana escolhida.

na ordem de 10^{-3} . Cabe ressaltar que isto talvez tenha ocorrido pela quantidade de dados gerados, que foram 200. Na prática, as instituições têm poucas observações, e, assim, o cálculo do CR se torna mais sensível em relação ao modelo de cópula escolhido.

Capítulo 6

Conclusões

Sempre ocorreram perdas operacionais dentro das instituições financeiras, embora não eram classificadas como risco operacional. Após vários desses acontecimentos, os analistas chegaram a conclusão de que essas perdas não podiam ser classificadas como risco de crédito ou mercado e sim como risco operacional. Isso fez com que o risco operacional passasse a ser observado com mais cuidado, aumentando consideravelmente os estudos sobre o mesmo. Hoje existem vários profissionais, como matemáticos e estatísticos, que dedicam seus estudos somente para o risco operacional.

A literatura sobre metodologias para o cálculo do capital para o risco operacional ainda é bem escassa. Não existem muitos métodos para o cálculo do capital regulatório na literatura. Ao longo do tempo, as instituições financeiras aumentaram os registros de perdas e isso fez com que o Comitê de Basileia permitisse o uso de metodologias próprias de mensuração, desde que as mesmas cumprissem as regras qualitativas e quantitativas impostas.

Em vista de tudo o que foi apresentado e discutido até aqui, é importante salientar que este texto agrega à literatura uma nova metodologia de modelagem da dependência estocástica presente entre as variáveis que caracterizam as perdas em distintas classes de risco (em que tais variáveis são obtidas através do LDA) para retornar um capital regulatório mais coerente com a realidade da instituição financeira do que o método usual e proposto em 2004 pelo Basileia II (método do somatório).

Neste texto apresentamos três alternativas ao método do somatório, o método da convolução, método da correlação não-perfeita e uma nova proposta de cálculo de CR. Uma vantagem importante no uso do novo método é a adição de um índice que quantifica a opinião de especialistas, tanto

das instituições quanto dos seus reguladores, facilitando um acordo entre ambos na alocação do CR. Outro ponto importante associado ao novo método é que a família de funções que obedecem as características discutidas no Capítulo 4.3 está em aberto. Apresentamos uma única família que possui algumas propriedades condizentes com o problema, mas é possível determinar (ou escolher) outras famílias com outras propriedades e até mesmo incluir outro índice, refletindo de forma mais eficiente a opinião, ou opiniões, dos especialistas. O método proposto aborda o caso bivariado, ou seja, se baseia na probabilidade de dois eventos de perdas inesperadas ocorrerem conjuntamente, o que pode ser considerado uma outra vantagem do método, pois permite a modelagem da dependência. Por outro lado, isto também traz algumas complicações, no ponto de vista institucional, pois, em nível 1 (pelo Basileia II), há um total de 56 unidades de risco. A extensão para o caso multivariado do método proposto não parece ser simples, mas de um modo geral, as extensões do caso bivariado para um multivariado em diversos problemas não são triviais (ainda mais quando estamos abordando o conceito de cópula multivariada). Porém, como alternativa multivariada, é possível agrupar as variáveis envolvidas, POA's, duas a duas e utilizá-lo como apresentado no nosso trabalho e, por fim, somar os capitais resultantes para se obter o CR total para as 56 unidades de risco.

Uma outra metodologia que se destaca é a proposta por Frachot et al. (2004), o método da correlação não-perfeita, em que na construção da distribuição de perda agregada é considerado que as variáveis frequências são correlacionadas e as severidades independentes. A vantagem desse método é que o capital regulatório total é obtido através de uma única fórmula, além de tal método ser multivariado e fácil de implementar. Já a desvantagem desse método é que a medida de correlação considerada para o cálculo do capital regulatório é a de Pearson, que não capta toda a estrutura de dependência entre as variáveis.

No cenário financeiro, o que não deve ser ignorado é que a dependência entre as perdas, seja ela captada duas a duas ou de alguma outra forma, deve ser levada em consideração. Fixar a estrutura de dependência entre as variáveis não deve ser uma regra.

Na prática, na determinação de CR associado a RO, considerando o método proposto, as instituições financeiras devem estimar uma série de parâmetros, das distribuições das severidades e frequência, os opvar's das POA's, suas respectivas esperanças e ainda determinar uma cópula (e estimar seus parâmetros) para modelar a dependência entre tais POA's. No entanto, existem diversos trabalhos

na literatura discutindo estimação de parâmetros, utilizando métodos frequentistas ou Bayesianas, e suas propriedades, assim como a estimação de uma determinada cópula.

Referências Bibliográficas

- ALEMANY, R., BOLANCÉ, C. & GUILLÉN, M. (2013). A nonparametric approach to calculating value-at-risk. *Insurance: Mathematics and Economics* 52 255–262.
- ALEXANDER, C. (2003). Operational risk aggregation. *Operational Risk* .
- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M. & HEATH, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance* .
- BANCO CENTRAL DO BRASIL, . (2006). *Resolução nº 3.380*. Acesso em 16/04/2013, URL <http://www.bcb.gov.br/pre/normativos/busca/normativo.asp?tipo=res&ano=2006&numero=3380>.
- BANCO CENTRAL DO BRASIL, . (2009). *Comunicado 019028*. Acesso em 03/05/2013, URL <https://www3.bcb.gov.br/normativo/detalharNormativo.do?method=detalharNormativo&N=109093617>.
- BARLOW, R. E. & PROSCHAN, F. (1975). Statistical theory of reliability and life testing: probability models. Tech. rep., DTIC Document.
- BARRIGA, L. & ROSENGREN, E. S. (2006). Overview of operational risk management at financial institutions. *Managing Enterprise Risk: What the Electric Industry Experience Implies for Contemporary Business: What the Electric Industry Experience Implies for Contemporary Business* 119.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, . (1997). *Core Effective Principles in Banking Supervision*. Bank for International Settlements. Acesso em 15/04/2013, URL <http://www.bis.org/publ/bcbs30a.htm>.

- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, . (2001a). *Operational risk*. Bank for International Settlements. Acesso em 15/04/2013, URL <http://www.bis.org/publ/bcbsca07.pdf>.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, . (2003). *Third Consultative Paper: The New Basel Capital Accord*. Bank for International Settlements. Acesso em 06/07/2013, URL <http://www.bis.org/bcbs/bcbscp3.pdf>.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, . (2004). *International convergence of capital measurement and capital standards: a revised framework*. Bank for International Settlements. Acesso em 15/04/2013, URL <http://www.bis.org/publ/bcbs107.htm>.
- BLOCK, H. W., SAVITS, T. H. & SHAKED, M. (1982). Some concepts of negative dependence. *The Annals of Probability* .
- BÖCKER, K. & KLÜPPELBERG, C. (2008). Modelling and measuring multivariate operational risk with lévy copulas. *Journal of Operational Risk* .
- CHAVEZ-DEMOULIN, V., EMBRECHTS, P. & NEŠLEHOVÁ, J. (2006). Quantitative models for operational risk: extremes, dependence and aggregation. *Journal of Banking & Finance* .
- CHERUBINI, U., LUCIANO, E. & VECCHIATO, W. (2004). *Copula methods in finance*. Wiley.
- COLEMAN, R. (2000). Using modelling in operational risk management. *self* .
- COLEMAN, R. (2003). Statistical techniques and qualitative adjustments for lda. *ORRF XVII at BaFin in Bonn* .
- CRUZ, M. G. (2002). *Modeling, measuring and hedging operational risk*. John Wiley & Sons New York.
- DEHEUVELS, P. (1979). La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. un test non paramétrique d'indépendance. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.(5)* .
- DELOACH, J. W. & ANDERSEN, A. (2000). Financial Times Prentice Hall.
- DOS SANTOS SILVA, R. & LOPES, H. F. (2008). Copula, marginal distributions and model selection: a bayesian note. *Statistics and Computing* 18 313–320.

- DURRLEMAN, V., NIKEGHBALI, A. & RONCALLI, T. (2000). Which copula is the right one.
- EMBRECHTS, P., LINDSKOG, F. & MCNEIL, A. (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. *Handbook of heavy tailed distributions in finance* .
- EMBRECHTS, P., MCNEIL, A. & STRAUMANN, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *Risk management: value at risk and beyond* .
- EMBRECHTS, P. & PUCETTI, G. (2006). Aggregating risk capital, with an application to operational risk. *The Geneva Risk and Insurance Review* .
- FRACHOT, A., GEORGES, P. & RONCALLI, T. (2001). Loss distribution approach for operational risk. *Manuscript. Groupe de Recherche Operationnelle, Credit Lyonnais, France. April. <http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/lda.pdf>* .
- FRACHOT, A., RONCALLI, T. & SALOMON, E. (2004). The correlation problem in operational risk. *OperationalRisk Risk's Newsletter* .
- FRAHM, G., JUNKER, M. & SZIMAYER, A. (2003). Elliptical copulas: applicability and limitations. *Statistics & Probability Letters* .
- GIACOMETTI, R. (2008). *Aggregation issues in operational risk*. Ph.D. thesis, School of Management, Syracuse University.
- GUIMARÃES, T. A. (2003). *Implementação do método de distribuição de perdas para risco operacional*. Master's thesis.
- HERRING, R. J. (2002). The basel 2 approach to bank operational risk: Regulation on the wrong track. *Journal of Risk Finance, The* 4 42–45.
- JOE, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*, vol. 73. CRC Press.
- JOE, H. & XU, J. J. (1996). The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. Tech. rep., Technical report.
- JORION, P. (1997). *Value at risk: the new benchmark for controlling market risk*, vol. 2. McGraw-Hill New York.

- JORION, P. ET AL. (2010). *Financial Risk Manager Handbook+ Test Bank: FRM Part I*, vol. 625. John Wiley & Sons.
- JOUANIN, J.-F., RIBOULET, G. & RONCALLI, T. (2004). Financial applications of copula functions .
- KIMELDORF, G. & SAMPSON, A. R. (1989). A framework for positive dependence. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* .
- KÖRNERT, J. (2003). The barings crises of 1890 and 1995: causes, courses, consequences and the danger of domino effects. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money* .
- LEHMANN, E. L. (1966). Some concepts of dependence. *The Annals of Mathematical Statistics* .
- LIMA, E. L. (1995). *Curso de análise*, vol. 1. Instituto de matemática pura e aplicada.
- MARSHALL, A. W. & OLKIN, I. (1988). Families of multivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association* .
- MARSHALL, C. (2001). *Measuring and managing operational risks in financial institutions: tools, techniques, and other resources*. John Wiley.
- MCGEEHAN, P. (2004). Merrill lynch ordered to pay for sexual bias. *New York Times* .
- MCKAY, P. & MCDONALD, I. (2006). Refco's creditors sue austrian bank. *The wall street journal*
Acesso em 02/03/2014, URL <http://online.wsj.com/news/articles/SB114597872295935358>.
- NELSEN, R. B. (2006). *An introduction to copulas*. Springer.
- PEACHEY, A. N. (2011). *Great financial disasters of our time*, vol. 21. BWV Verlag.
- POWER, M. (2005). The invention of operational risk. *Review of International Political Economy* 12
577-599.
- PRESSMAN, S. (1997). Rogue trader: How i brought down barings bank and shook the financial world-leeson, n.
- SILVA, M. F. (2005). *Estimação e teste de hipótese baseados em verossimilhanças perfiladas*. Ph.D. thesis, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.

- SMITH, M. S. (2011). Bayesian approaches to copula modelling .
- UENO, A. S. C. (2010). Modelos causais no cálculo de capital para risco operacional: investigação do uso de redes neurais artificiais como modelo avançado de mensuração de capital .
- VIOLA, M. L. L. (2009). Tipos de dependência entre variáveis aleatórias e teoria de cópulas. .
- YAN, J. (2007). Enjoy the joy of copulas: With a package copula. *Journal of Statistical Software* .