MAT2219 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 3 – 22/03/2016

Prof. Claudio Gorodski

Primeira parte

1. Determine os limites de integração $\int\int\int dxdydz$ e o volume dos seguintes sólidos:

   a. O cubo com lados de comprimento 2 e centrado no ponto $(0, 0, 0)$.

   b. Metade do cubo acima: a parte acima do plano xy.

   c. Uma parte do mesmo cubo: o prisma sobre o plano $z = y$.

   d. Uma parte do mesmo cubo: sobre os planos $z = y$ e $z = 0$.

   e. Uma parte do mesmo cubo: sobre $z = x$ e debaixo de $z = y$.

   f. A parte do mesmo cubo onde $x \leq y \leq z$. Que forma tem essa região?

   g. O tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + 2z = 2$.

   h. O tetraedro com vértices $(0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 4)$. Determine primeiramente o plano que contem os últimos três pontos.

   i. A parte do tetraedro em item (g) debaixo de $z = 1/2$.

   j. O volume sobre $z = 0$ debaixo do cone $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - z$.

2. Calcule o volume e o centróide do sólido $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.

3. Calcular o volume dos sólidos delimitados pelas superfícies indicadas:

   a. A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ por cima, o parabolóide $x^2 + y^2 = 4z$ por baixo.

   b. O plano $z = 0$, o cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Qual é o volume no interior de $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 16$? Qual é o hipervolume" da pirâmide 4-dimensional delimitada por $x + y + z + w = 1$ (e pelos planos xy, xz, xw, yz, yw, zw)?

5. Calcule as derivadas parciais $\partial I/\partial x$, $\partial I/\partial y$, $\partial^2 I/\partial y \partial z$ de

$$I = \int_0^z \int_0^y \int_0^x f(x, y, z) dxdydz.$$

6. Calcule o momento de inércia $\int\int\int l^2 dV$ do cubo $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$, onde l é a distância a:

   a. O eixo x,

b. O lado $y = 1 = z$,

c. A diagonal $x = y = z$.

7. Transforme as coordenadas Cartesianas xyz nas coordenadas cilíndricas $r\theta z$ nas coordenadas esféricas $\rho\phi\theta$.

a. $(D, 0, 0)$

b. $(0, -D, 0)$

c. $(3, 4, 5)$

8. Transforme as coordenadas esféricas $\rho\phi\theta$ nas coordenadas xyz e $r\theta z$.

a. $\rho = 4$, $\phi = \pi/4$, $\theta = -\pi/4$.

b. $\rho = 2$, $\phi = \pi/3$, $\theta = -\pi/3$.

c. $\rho = 1$, $\phi = \pi$, $\theta =$ arbitrário.

9. Calcule o ângulo ϕ para o ponto com coordenadas esféricas $r\theta z$.

10. Observando os limites de integração, descreva cada região e encontre seu volume.

a. $\int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta$

b. $\int_0^{\pi} \int_0^{1} \int_0^{1+r^2} r dz dr d\theta$

c. $\int_0^{2\pi} \int_0^{1} \int_0^{2-z} r dz dr d\theta$

d. $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} r dz dr d\theta$

e. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{1} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$

f. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec\phi}^{2} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$

g. $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\sin\phi} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$

h. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_1^{3} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$

i. $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$

j. $\int_0^{1} \int_0^{1} \int_0^{1} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$

11. Descreva o sólido determinado por $0 \leq \rho \leq 1 - \cos\phi$ e calcule seu volume.

12. Calcule a massa de um planeta de raio R, se sua densidade varia com o raio ρ de acordo com $\delta = (\rho + 1)/\rho$. Note a densidade infinita no centro, mas a massa finita $M = \int\int\int \rho dV$

13. Uma mudança de variáveis *linear* é da forma $x = au + bv + cw$, $y = du + ev + fw$, $z = gu + hv + iw$. Escreva os seis termos do determinante J. Três desses termos têm sinal negativo.

14. Calcule o determinante Jacobiano para a mudança de coordenadas Cartesianas para cilíndricas.

Segunda parte

1. Calcular as integrais triplas:

   a. $\int\int\int_S (1+x+y+z)^{-3}\,dxdydz$, onde S é o sólido delimitado pelos três planos coordenados e pelo plano $x+y+z=1$.

   b. $\int\int\int_S xyz\,dxdydz$, onde $S=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$.

2. Mudar a ordem de integração de modo que a primeira integração seja com respeito a y.

   a. $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[\int_{\sqrt{x^2-y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right)dx.$

   b. $\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right)dx.$

3. Calcular o valor das integrais triplas mudando para coordenadas esféricas:

   a. $\int\int\int_S dxdydz$, onde S é a esfera sólida de raio a e centro na origem.

   b. $\int\int\int_S dxdydz$, onde S é o sólido delimitado por duas esferas concêntricas de raios a e b, onde $0<a<b$, cujo centro é a origem.

   c. $\int\int\int_S [(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{-1/2}\,dxdydz$, onde S é a esfera sólida de raio R e centro na origem, e (a,b,c) é um ponto no exterior da esfera.

4. Um cone circular reto sólido homogêneo tem altura h. Mostre que a distância de seu centróide à base é $h/4$.