MAT2219 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 2 – 14/03/2016

Prof. Claudio Gorodski

Primeira parte

1. Uma região $\mathcal{R}$ está delimitada pelas retas $y = 2x$, $x = 1$, $y = 1 + 2x$, $x = 0$.

   a. Esboce um desenho de $\mathcal{R}$ e calcule sua área usando geometria Euclideana.

   b. Escolha a, b, c, d de modo que $x = au + bv$, $y = cu + dv$ aplica a região $\mathcal{R}$ do item anterior sobre o quadrado unitário $\mathcal{S}$ $(0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1)$.

   c. Calcule a área de $\mathcal{R}$ usando o determinante Jacobiano $J = ad - bc$.

2. A região $\mathcal{R}$ está delimitada pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2x + 3$.

   a. Determine a, b, c de modo que $x = u$, $y = au + bv + cuv$ transforma $\mathcal{R}$ no quadrado unitário $\mathcal{S}$.

   b. Um termo não-linear uv foi necessário no item anterior. Qual é a imagem de $\mathcal{R}$ por transformações lineares da forma $x = au + bv$, $y = cu + dv$?

3. Em cada caso, esboçar um desenho da região $\mathcal{R}$ do plano xy que é a imagem do quadrado unitário $\mathcal{S}$ no plano uv.

   a. $x = 3u + 2v$, $y = u + v$.

   b. $x = e^{2u+v}$, $y = e^{u+2v}$.

   c. $x = uv$, $y = v^2 - u^2$.

   d. $x = u$, $y = v(1 + u^2)$.

   e. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$.

4. No ítens (a), (b) e (c) do exercício anterior, calcule a área de $\mathcal{R}$ usando $\int\int_{\mathcal{S}} |J|\, dudv$.

5. Se $\mathcal{R}$ é a região entre $x = 0$ e $x = 1$ debaixo do gráfico $y = f(x) > 0$, então $x = u$, $y = vf(u)$ faz $\mathcal{R}$ corresponder ao quadrado unitário $\mathcal{S}$. Localize os vértices em $\mathcal{R}$ e o ponto correspondente a $(u, v) = (\frac{1}{2}, 1)$. Calcule J e verifique o que já é conhecido:

$$\text{área de } \mathcal{R} = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \int_0^1 J\, du\, dv.$$

6. Use coordenadas polares para calcular $B = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx$.

7. Desenhe a regio $\mathcal{R}$: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y < \infty$. Descreva $\mathcal{R}$ em termos de coordenadas polares. Calcule a integral $\int\int_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2)^{-3/2} dx\, dy$ em coordenadas polares.

8. Usando coordenadas polares, calcule o volume debaixo de $z = x^2 + y^2$ e acima do disco unitário $x^2 + y^2 \leq 1$.

9. Considere o quadrado unitário $\mathcal{S}$ no plano uv. Rode $\mathcal{S}$, mantendo fixo o vértice $(0, 0)$, de um ângulo α na direção anti-horária, para obter um quadrado $\mathcal{R}$ no plano xy. Calcule a massa de $\mathcal{R}$ se sua densidade é dada por $\rho(x, y) = xy$.

Segunda parte

1. Esboçar um desenho da região S e expressar a integral $\int\int_S f(x,y)\,dxdy$ como uma integral iterada em coordenadas polares:

   a. $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\} \qquad (a > 0)$

   b. $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$

   c. $S = \{(x,y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\} \qquad (0 < a < b)$

2. Transformar a integral para coordenadas polares e resolvê-la ($a > 0$):

   a. $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} (x^2 + y^2)\,dy\,dx$

   b. $\int_0^a \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

3. Efetuar uma mudança de coordenadas conveniente para calcular a integral dupla

$$\int\int_S (x - y)^2 \sin^2(x + y)\,dxdy$$

onde S é o paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$.

4. Considere a transformação definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv.$$

   a. Calcular o determinante Jacobiano $J(u, v)$.

   b. Um retângulo T no plano uv tem vértices $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(1,3)$. Esboçar um desenho de sua imagem S no plano xy.

   c. Calcular $\int\int_D xy\,dxdy$, onde $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.