8.a aula: 30ago (resumo)

8.1 Um subconjunto A de $\mathbb{C}$ é chamado de *estrelado* se existe um ponto $z_0 \in A$, chamado de *centro*, tal que o segmento $[z_0, z]$ está inteiramente contido em A para todo $z \in A$. Note que o centro não precisa ser único. Um subconjunto A de $\mathbb{C}$ é chamado de *convexo* se $[z, w] \subset A$ para todos z, $w \in A$. Todo conjunto convexo é estrelado, e qaulquer um de seus pontos é um centro. Exemplos de conjuntos estrelados são: bolas abertas, o plano cortado ao longo do semi-eixo real negativo (denotado $\mathbb{C}^-$). O plano furado $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ não é estrelado.

8.2 Condição de integrabilidade para conjuntos estrelados. *Seja Ω um domínio estrelado com centro z_0. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua tal que $\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi = 0$ para a fronteira $\partial\Delta$ de qualquer triângulo Δ que tem z_0 como vértice. Então f admite primitivas em Ω e*

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f(\xi)\, d\xi$$

é uma primitiva de f em Ω. Segue que $\int_C f(\xi)\, d\xi = 0$ para toda curva fechada C em Ω.

Dem. Fixemos $z_1 \in \Omega$. Então $[z_0, z_1] \subset \Omega$, pois Ω é estrelado com centro z_0. Além disso, se z está suficientemente próximo de z_1, então o triângulo Δ com vértices z_0, z_1, z está contido em Ω, pois Ω é aberto. Por hipótese, a integral de f ao longo de $\partial\Delta = [z_0, z_1] + [z_1, z] + [z, z_0]$ se anula, e assim

$$F(z) = \int_{[z_0,z_1]} f(\xi)\, d\xi + \int_{[z_1,z]} f(\xi)\, d\xi = F(z_1) + \int_{[z_1,z]} f(\xi)\, d\xi.$$

Segue daqui, como em (7.3), que $F'(z_1) = f(z_1)$. q.e.d.

8.3 Lema integral de Goursat. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Então*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$$

para todo triângulo $\Delta \subset \Omega$.

Dem. Notação:

$$a(\Delta) := \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz.$$

Conectando os pontos médios dos lados de Δ, nós o subdividimos em quatro triângulos congruentes Δ_ν, $\nu = 1, \ldots, 4$, e

$$a(\Delta) = \sum_{\nu=1}^{4} a(\Delta_\nu),$$

pois os segmentos conectando os pontos médios são percorridos duas vezes, em sentidos opostos, causando o cancelamento das integrais correspondentes, enquanto que a união dos lados remanescentes dos Δ_ν é Δ.

Dentre $a(\Delta_\nu)$, selecionamos aquele com o maior módulo, e denotamos o trîngulo correspondente Δ^1. Obtemos

$$|a(\Delta)| \leq 4|a(\Delta^1)|.$$

Continuando o processo de subdivisão, obtemos uma seqüência

$$\Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \cdots \supset \Delta^n \supset \cdots$$

de triângulos satisfazendo

$$|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)|, \qquad n = 1,\, 2, \ldots \tag{1}$$

Além disso,

$$L(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta), \qquad n = 1,\, 2, \ldots \tag{2}$$

Os triângulos Δ^n convergem para um ponto $z_0 \in \Omega$ no sentido de que estarão contidos numa bola aberta $|z - z_0| < \delta$ de raio $\delta > 0$ prescrito para n suficientemente grande. Como f é holomorfa em Ω, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon$$

ou

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)| < \epsilon |z - z_0| \tag{3}$$

para $|z - z_0| < \delta$.

Como 1 e z admitem as primitivas z e $z^2/2$, temos

$$\int_{\partial\Delta^n} dz = \int_{\partial\Delta^n} z\, dz = 0$$

e portanto

$$a(\Delta^n) = \int_{\partial\Delta^n} f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)\, dz.$$

Segue de (3) que

$$|a(\Delta^n)| \leq \epsilon \int_{\partial\Delta^n} |z - z_0|\, |dz| \leq \epsilon L(\partial\Delta_n)^2.$$

Usando (1) e (2) vem que

$$|a(\Delta)| \leq \epsilon L(\Delta)^2.$$

Como $\epsilon > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, isso mostra que $a(\Delta) = 0$, como desejado. q.e.d.

8.4 Teorema integral de Cauchy em domínios estrelados. *Sejam Ω um domínio estrelado de $\mathbb{C}$ com centro z_0 e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então f admite primitivas em Ω e*

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\xi)\, d\xi$$

é uma primitiva de f em Ω. Segue que $\int_C f(\xi)\,d\xi = 0$ para toda curva fechada C em Ω.

Dem. Como f é holomorfa em Ω, temos $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ para todo triângulo $\Delta \subset \Omega$ em vista do Lema integral de Goursat (8.3). O resultado desejado segue então da condição de integrabilidade para conjuntos estrelados (8.2). q.e.d.

Ex. 8.1 Mostre que $\int_C \frac{1}{z}\,dz \neq 0$, onde C é o círculo $|z| = R$, $R > 0$. Note que o integrando é uma função holomorfa em $\mathbb{C}^\times$. Por que este resultado não contradiz (8.4)?

Ex. 8.2 (a) Mostre que $\int_{[1,z]} \frac{1}{z}\,dz$ é uma primitiva de $\frac{1}{z}$ em $\mathbb{C}^-$. (b) Calcule essa integral usando como caminho entre 1 e $z = re^{i\theta}$ o segmento $[1, r]$ seguido do arco circular W de r até z. (c) Conclua que $\operatorname{Log} z = \int_{[1,z]} \frac{1}{z}\,dz$.