18.a aula: 10nov (resumo)

18.1 Conformalidade. *Seja f uma função holomorfa num domínio Ω, e seja $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Sejam γ_1 e γ_2 curvas regulares (i.e. diferenciáveis com derivada não-nula) em Ω tais que $\gamma_j(t_j) = z_0$ para $j = 1, 2$. Então o ângulo entre $f \circ \gamma_1$ e $f \circ \gamma_2$ é igual ao ângulo entre γ_1 e γ_2.*

Dem. Temos $(f \circ \gamma_j)'(t_j) = f'(z_0)\gamma_j'(t_j)$ implicando $\arg(f \circ \gamma_j)'(t_j) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma_j'(t_j)$. Agora $\angle_{z_0}(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \arg(f \circ \gamma_2)'(t_2) - \arg(f \circ \gamma_1)'(t_1) = \arg \gamma_2'(t_2) - \arg \gamma_1'(t_1) = \angle_{z_0}(\gamma_1, \gamma_2)$. q.e.d.

18.2 Conformalidade implica holomorfia: o caso linear Consideremos inicialmente uma transformação linear de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que pode ser escrita em notação complexa como

$$z \mapsto az + b\bar{z}$$

onde a, $b \in \mathbb{C}$. Suponhamos que T preserva o ângulo entre retas orientadas passando pela origem. Vamos provar que necessariamente $b = 0$. Podemos assumir que $a + b \neq 0$ (caso contrário, T levaria o eixo real na origem) e que $a \neq 0$ (senão T levaria ângulos nos seus opostos). Aplicando a hipótese ao eixo real e à reta definida por $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, temos

$$\arg(a\lambda + b\bar{\lambda}) - \arg(a + b) = \arg \lambda - \arg 1,$$

que se reduz a

$$\arg\left(a + b\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right) = \arg(a + b). \tag{1}$$

Se $b \neq 0$, então $a + b\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}$ percorre o círculo de centro a e raio $|b|$, o que contradiz (1). Segue que $b = 0$ e $T(z) = az$, ou seja, T é holomorfa.

18.3 Conformalidade implica holomorfia: o caso geral *Seja $f = u + iv$ definida no domínio Ω e suponhamos que u e v são de classe $\mathcal{C}^1$. Se f preserva o ângulo entre curvas regulares se intersectando em Ω, então f é holomorfa e f' nunca se anula.*

Dem. Se γ é uma curva regular em Ω com $\gamma(t_0) = z_0$, então $f \circ \gamma$ também é diferenciável e

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = a\gamma'(t_0) + b\overline{\gamma'(t_0)}, \tag{2}$$

onde

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right),$$

sendo $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$. A hipótese sobre f juntamente com (2) diz que $z \mapsto az + b\bar{z}$ preserva o ângulo entre retas orientadas pela origem, o que por (18.2) significa que $b = 0$. Mas estas são exatamente as equações de Cauchy-Riemann. Notemos também que $a = f'(z_0)$. q.e.d.

18.4 Exemplos (a) $f(z) = z^2$ é conforme em $z \neq 0$. Temos $u = \Re f = x^2 - y^2$ e $v = \Im f = 2xy$. A família de retas paralelas ao eixo real é levada em uma família de parábolas, e a família de retas paralelas ao eixo imaginário é levada em uma família de parábolas ortogonais às primeiras. Por outro lado, a pré-imagem de retas paralelas aos eixos constituem-se em duas famílias de hipérboles.

(b) $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ satisfaz $f'(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-2})$ e portanto é conforme em $\mathbb{C}^\times \setminus \{-1, 1\}$. Sejam $r = |z|$, $\xi = x/r$, $\eta = y/r$. Então

$$u = \frac{1}{2}(r + r^{-1})\xi \quad \text{e} \quad v = \frac{1}{2}(r - r^{-1})\eta.$$

Visto que $\xi^2 + \eta^2 = 1$, segue que

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}(r + r^{-1})\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}(r - r^{-1})\right]^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{u^2}{\xi^2} - \frac{v^2}{\eta^2} = 1.$$

Isto mostra que a imagem de um círculo $|z| = r < 1$ é uma elipse no plano (u, v), e que a imagem de um segmento radial $z = ct$, $|c| = 1$, $t \in (0, 1)$ é metade de um ramo de uma hipérbole.

Ex. 18.1 Demonstrar a fórmula (2). Em (18.3), verificar também que $b = 0$ são as equações de CR e que $a = f'(z_0)$.

Ex. 18.2 Desenhar a imagem das retas paralelas ao eixos coordenados pela transformação $w = e^z$.

Ex. 18.3 (i) Mostrar que $\zeta = \xi + i\eta = e^z$ leva a faixa $-\pi/2 < y < \pi/2$ sobre o semi-plano $\xi > 0$. (ii) Mostrar que $w = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$ leva $\xi > 0$ em $|w| < 1$. (iii) Deduzir de (i) e (ii) que $w = \tanh \frac{z}{2}$ aplica a faixa $|\Im z| < \pi/2$ sobre o disco unitário $|w| < 1$.

Ex. 18.4 Repetir o Ex. 18.2 para $w = \sin z$.