13.a aula: 6out (resumo)

13.1 Teorema de Abel. *Dada a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, existe R, $0 \le R \le \infty$, chamado de raio de convergência, com as seguintes propriedades:*

(i) A série converge absolutamente para todo z com $|z| < R$.

(ii) A série diverge para $|z| > R$.

(iii) Na região $|z| < R$, a soma da série é uma função holomorfa, sua derivada é obtida por derivação termo-a-termo, e a série derivada tem o mesmo raio de convergência.

Para z com $|z| = R$, em geral nada se pode afirmar sobre a convergência da série.

Dem. Mostraremos que as asserções do teorema são verdadeiras para R satisfazendo $1/R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (fórmula de Hadamard).

Se $|z| < R$, tomemos ρ tal que $|z| < \rho < R$. Então $1/\rho > 1/R$ e pela definição de limite superior existe n_0 tal que $1/\rho > |a_n|^{1/n}$ ou $|a_n| < 1/\rho^n$ para todo $n \ge n_0$. Segue que $|a_n z^n| < (|z|/\rho)^n$ para $n \ge n_0$. Como $|z|/\rho < 1$, segue do critério de comparação que nossa série de potências é convergente.

Se $|z| > R$ escolhemos ρ tal que $R < \rho < |z|$. Como $1/\rho < 1/R$, existem índices n arbitrariamente grandes tais que $|a_n|^{1/n} > 1/\rho$ ou $|a_n| > 1/\rho^n$. Então $|a_n z^n| > (|z|/\rho)^n$ para infinitos índices n, e os termos da série tendem a infinito.

A série derivada $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ tem o mesmo raio de convergência, pois $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Para $|z| < R$, escrevamos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = s_n(z) + R_n(z)$$

onde s_n é a n-ésima soma parcial e R_n é o "resto", e também

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n'(z).$$

Vamos mostrar que $f'(z) = f_1(z)$.

Consideremos

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f_1(z_0) &= \left(\frac{s_n(z)-s_n(z_0)}{z-z_0} - s_n'(z_0)\right) \\ &\quad + (s_n'(z_0) - f_1(z_0)) + \left(\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right) \qquad (1)\end{aligned}$$

onde $z \ne z_0$ e $|z|, |z_0| < \rho < R$. O terceiro termo do membro direito de (1) em módulo é igual a

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k (z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \cdots + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1})\right| \le \sum_{k=n}^{\infty} k |a_k| \rho^{k-1}$$

onde o membro direito é o resto de uma série convergente que portanto tende a zero com $n \to \infty$. O segundo termo do membro direito de (1) tende a zero por definição de f_1, e o primeiro tende a zero com $z \to z_0$. q.e.d.

13.2 Fato Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existe, então é igual ao raio de convergência de $\sum_{n=0}^{n} a_n z^n$.

13.3 Mostramos em (13.1) que uma função analítica é holomorfa em seu disco de convergência. Iterando esse resultado, obtemos que:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$
$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots$$
$$f''(z) = 2a_2 + 6a_3 z + 12a_4 z^2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(k)}(z) = k!a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1} z + \frac{(k+2)!}{2!} a_{k+2} z^2 + \cdots$$

Em particular $a_k = f^{(k)}(0)/k!$ para todo $k \geq 0$, o que dá a unicidade da representação de uma função holomorfa em série de potências centrada num ponto.

13.4 Exemplos (i) Derivando termo a termo $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$ obtemos
$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n+1)z^n + \cdots$$
com raio de convergência 1. Esta série também pode ser obtida multiplicando a primeira série por si mesma.

(ii) Temos $\operatorname{Log}(1+z) = \int_0^z \frac{dz}{z+1}$ para qualquer caminho contido em $B(0,1)$ e $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$, de onde vem

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \cdots$$

com $R = 1$. Analogamente

$$\arctan z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots \tag{2}$$

com $R = 1$, onde a integral é calculada ao longo de um caminho contido em $B(0,1)$.

(iii) A partir da série de Taylor de $w = \arctan z$ dada em (2), podemos deduzir o trecho inicial da série de Taylor de $\tan w$. Como é uma função ímpar, $\tan w = a_1 w + a_3 w^3 + a_5 w^5 + \cdots$ e substituindo em (2) obtemos um sistema linear nos a_i que é facilmente resolvido:

$$\tan w = w + \frac{1}{3}w^3 + \frac{2}{15}w^5 + \cdots$$

com $R = \pi/2$.

Ex. 13.1 Calcular o raio de convergência das seguintes séries: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (n!) z^n$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^{3n}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

Ex. 13.2 Mostre que $\operatorname{Log} \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ para $|z| < 1$.

Ex. 13.3 Mostre que

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$$

para $|z+1| < 1$.

Ex. 13.4 Qual é o coeficiente de z^7 na série de Taylor de $\tan z$?

Ex. 13.5 Deduzir daquela de $\cos z$ os três primeiros termos não-nulos das série de Taylor de $\cos^2 z$ e $\sec z$ centradas em 0.