11.a aula: 29set (resumo)

11.1 Desenvolvimento de funções holomorfas em séries de potências. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em um ponto $z_0 \in \Omega$. Então existe $r > 0$ tal que para todo $z \in B(z_0, r)$ vale*

$$\begin{aligned} f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots \end{aligned}$$

isto é

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

Dem. Seja C um círculo centrado em z_0 e contido em Ω, e seja r seu raio. Pela fórmula integral de Cauchy, podemos escrever

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \left(1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^{n-1} + \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n \right), \end{aligned}$$

e assim,

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} + (z - z_0)\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} + \cdots + (z - z_0)^{n-1}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^n} + (z - z_0)^n \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)^n}.$$

Dividindo por $2\pi i$ e integrando ao longo de C ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z - z_0)^{n-1} + R_n \end{aligned}$$

onde

$$R_n = \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)(\xi - z_0)^n}$$

Sejam $M = \max_C |f|$ e $s = |z - z_0| < r$. Então:

$$|R_n| \leq \frac{s^n}{2\pi} \frac{2\pi r M}{(r - s) r^n} = \frac{rM}{r - s}\left(\frac{s}{r}\right)^n.$$

Como $r/s < 1$, temos $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. q.e.d.

11.2 Observações e exemplos. Usamos em (11.1) a identidade

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1} + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Além disso, o raio de convergência da séries de Taylor obtida em (11.1) é pelo menos a menor distância de z_0 à fronteira de Ω. O raio pode ser maior, mas não há garantias que ela representará a função f nos pontos comuns a Ω e ao disco de convergência. Uma função representável por uma série de potências numa bola aberta (de raio positivo) centrada num ponto z_0 é dita *analítica* em z_0. Mostramos acima que uma função holomorfa num ponto é analítica nesse ponto. A recíproca também vale, e será vista numa aula futura.

Calculando as derivadas, obtemos:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Tratam-se aqui de funções inteiras, convergem pois as séries para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ex. 11.1 Expandir $\frac{2z+3}{z+1}$ em potências de $z-1$. Qual é o raio de convergência?

Ex. 11.2 Mostre que

$$\frac{1+2z}{z^2+z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \cdots$$

para $0 < |z| < 1$.