MAT2116 – Álgebra Linear
Lista de Exercícios 2 – 13/03/2008

Prof. Claudio Gorodski

1. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbf{R}^3$ são subespaços vetoriais?

   a. O plano de vetores com coordenada $x_1 = 0$.

   b. O plano de vetores com coordenada $x_1 = 1$.

   c. O subconjunto dos vetores satisfazendo $x_1 x_2 = 0$.

   d. O vetor $(0, 0, 0)$.

   e. As combinações lineares dos vetores $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (2, 0, 1)$.

   f. Os vetores satisfazendo $3x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

2. Descreva o espaço-de-colunas e o espaço-nulo das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Qual é o menor subespaço de matrizes 3 por 3 que contém todas as matrizes simétricas e todas as matrizes triangulares inferiores? Qual é o maior subespaço que está contido em ambos esses subespaços?

4. Seja P o plano em $\mathbf{R}^3$ de equação $x + 2y + z = 6$. Qual é a equação do plano P_0 contendo a origem que é paralelo a P? São P e P_0 subespaços de $\mathbf{R}^3$?

5. Quais dos seguintes são subespaços de $\mathbf{R}^\infty$?

   a. As sequências $(x_1, x_2, \ldots)$ com $x_i = 0$ a partir de algum índice em diante.

   b. As sequências decrescentes: $x_{i+1} \leq x_i$ para todo i.

   c. As progressões aritméticas: $x_{i+1} - x_i$ é constante para todo i.

6. Mostre que as matrizes 2 por 2 ortogonais (isto é, satisfazendo $A^t = A^{-1}$) não formam um subespaço do espaço vetorial de todas as matrizes 2 por 2.

7. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Triangularize a matriz e determine as variáveis livres e a solução geral de $Ax = 0$. Então aplique eliminação de Gauss a $Ax = b$ para calcular as condições para que $Ax = b$ admita soluções, e calcule a solução geral.

8. Determine a solução geral de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

como a soma de uma solução particular de $Ax = b$ e a solução geral de $Ax = 0$.

9. Determine o espaço-de-colunas $\mathrm{im}(A)$ da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Calcular o valor de c para que seja possível resolver

$$\begin{array}{ccccccc} u & + & v & + & 2w & = & 2 \\ 2u & + & 3v & - & w & = & 5 \\ 3u & + & 4v & + & w & = & c. \end{array}$$

11. Exiba um sistema 2 por 3 $Ax = b$ cuja solução geral seja

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12. Exiba um sistema 2 por 2 $Ax = b$ que não admite soluções mas tal que $Ax = 0$ admite muitas soluções.