



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome PROVA FINAL - RESOLUÇÃO Nº USP MAT 112
Curso BACHARELADO EM MATEMÁTICA Período DIURNO
Disciplina VETORES E GEOMETRIA Código USP PROF. C. GORODSKI

Data 24 / 06 / 14 Nota () Pag

1.
$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad P = (1, 2, 3)$$

VETOR DIRETOR

DE $\vec{r}$: $\vec{u} = (2, 1, -1)$

VETOR DIRETOR

DE $\vec{s}$:

$$\vec{v} = (1, 1, 0)$$

$$s: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

A RETA DESEJADA TEM DIREÇÃO

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

RESP.: $X = (1, 2, 3) + \lambda (1, -1, 1)$

$$2. \quad r: X = \underbrace{(1, 1, 1)}_{=A} + \lambda \underbrace{(-2, 1, 0)}_{=\vec{u}}$$

$$s: X = \underbrace{(1, 2, -2)}_{=B} + \mu \underbrace{(1, 0, 2)}_{=\vec{v}}$$

$\alpha. \quad \pi$ CONTÉM $r \in E$ $\Rightarrow \pi$ É PARALELO
PARALELO A s $\Rightarrow$ A $\vec{u}, \vec{v}$

VETOR NORMAL
A π : $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, 4, -1)$

$$\pi: 2x + 4y - z = d$$

$$A \in r \subset \pi \Rightarrow d = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 1 = 5$$

$$\therefore \boxed{\pi: 2x + 4y - z = 5}$$

$$b. \quad \left. \begin{array}{l} s // \pi \\ B \in s \end{array} \right\} \Rightarrow d(s, \pi) = d(B, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - (-2) - 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{21}}$$

$$\therefore \boxed{d(s, \pi) = \sqrt{\frac{7}{3}}}$$

$$3. \quad r: X = \underbrace{(0,0,0)}_{=A} + 2 \underbrace{(1,0,0)}_{=\vec{u}}$$

$$P = (x, y, z)$$

$$s: X = \underbrace{(0,0,1)}_{=B} + \mu \underbrace{(0,1,0)}_{=\vec{v}}$$

$$a. \quad d(P, r) = d(P, s)$$

$$\frac{\|\vec{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\vec{BP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} \quad (1)$$

$$\vec{AP} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, z, -y)$$

$$\vec{BP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & z-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-z+1, 0, x)$$

$$\begin{aligned} \text{DE (1):} \quad z^2 + y^2 &= (1-z)^2 + x^2 \\ &= z^2 - 2z + 1 + x^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{2} (x^2 - y^2 + 1)$$

b. PARABOLOÍDE HIPERBÓLICO.

$$4. \quad \overbrace{3x^2 + 8xy - 3y^2 - 2x + 14y - 3 = 0}^{f(x,y)}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad L = (-2 \quad 14)$$

BUSCA DE CENTROS: $Qv_0 = -\frac{1}{2}L^t \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

$\therefore (-1, 1)$ É CENTRO DA CÔNICA

$$f(-1, 1) = 3 - 8 - 3 + 2 + 14 - 3 = 5$$

APÓS TRANSLAÇÃO $\begin{cases} x = -1 + \xi \\ y = 1 + \eta \end{cases}$, CÔNICA FICA

$$3\xi^2 + 8\xi\eta - 3\eta^2 + 5 = 0$$

EQ. CARACTERÍSTICA: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25 = 0$ VALORES CARACT.: $\lambda = \pm 5$

VETORES CARACT.

$$\lambda_1 = 5 \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, 1)$$

$$\lambda_2 = -5$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

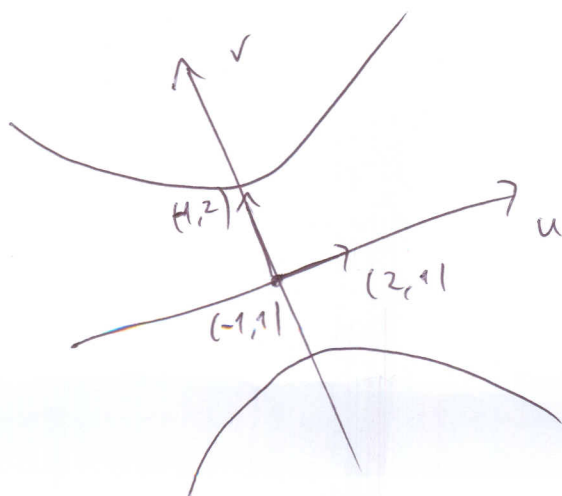
$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-1, 2)$$

APÓS ROTAÇÃO $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, CÔNICA FICA

$$5u^2 - 5v^2 + 5 = 0$$

ou

$$\boxed{-u^2 + v^2 = 1} \quad \text{HIPÉRBOLE}$$



$$5. \quad 2y^2 + 3z^2 + 4xz = 1$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{EQ. CARACT.: } 0 &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda+2 & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda+3 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) + 4(\lambda-2) \\ &= -(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda-4) \\ &= -(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+1) \end{aligned}$$

VALORES
CARACT.: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1$

APÓS ROTAÇÃO, A QUÁDRICA FICA

$$2\xi^2 + 4\eta^2 - \zeta^2 = 1$$

HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA