9.a aula: 27mar (resumo)

9.1 Uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{V}^3$ é chamada de *ortonormal* se $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário (*símbolo de Kronecker*)). Neste caso, para $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ e $\vec{v} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$ temos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = (v)^t_E(u)_E$ e $||\vec{u}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Por exemplo, se $(\vec{v})^t_E = (a\ b\ c)$ então o conjunto de vetores de $\mathbb{V}^3$ ortogonais a $\vec{v}$ está descrito pela equação linear $ax + by + cz = 0$.

9.2 Suponhamos E ortonormal. Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ são LI então a área de um paralelogramo definido por esses vetores é

$$
\begin{aligned}
\text{area}(\vec{u}, \vec{v}) &= \sqrt{||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} \\
&= ||\vec{u}||||\vec{v}|| \sin\theta \qquad (\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})) \\
&= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 \right)^{1/2} \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right| \qquad (\text{se } x_3 = y_3 = 0)
\end{aligned}
$$

9.3 Suponhamos E ortonormal e positiva. Sejam $(\vec{u})^t_E = (x_1\ x_2\ x_3)$, $(\vec{v})^t_E = (y_1\ y_2\ y_3)$. O *produto vetorial* desses vetores é o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ com

$$
(\vec{u} \times \vec{v})^t_E = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \ \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)
$$

9.4 Notemos que $||\vec{u} \times \vec{v}|| = \text{area}(\vec{u}, \vec{v})$. Assim $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se e somente se $\vec{u}$, $\vec{v}$ são LD. Caso contrário, verificamos que $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$, ou seja, $\vec{u} \times \vec{v}$ tem a direção ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e assim $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ é uma base. Verificamos também que $\det M_{E/F} = ||\vec{u} \times \vec{v}||^2 > 0$, e assim $\vec{u} \times \vec{v}$ tem o sentido que faz com que F seja positiva. Isso caracteriza $\vec{u} \times \vec{v}$ geometricamente em termos de $\vec{u}$, $\vec{v}$, e portanto, independentemente da escolha da base E na definição (9.3).

Ex. 9.1 Demonstrar que se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

Ex. 9.2 Demonstrar que dado um vetor unitário $\vec{n}$, qualquer vetor $\vec{a}$ pode ser decomposto na forma

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{n})\vec{n} + \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n}).$$