8.a aula: 25mar (resumo)

8.1 Seja $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$. O *módulo* $||\vec{v}||$ (*norma* ou *comprimento*) de $\vec{v}$ é a medida de qualquer segmento (orientado) que representa $\vec{v}$: Se $\vec{v} = \vec{AB}$ então

$$||\vec{v}|| = \text{med}(AB).$$

Esta definição independe do segumento representante escolhido. Suponhamos agora que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não-nulos. Escolhemos uma origem O e representamos $\vec{u} = \vec{OU}$, $\vec{v} = \vec{OV}$. O *produto escalar* de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é o escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \text{med}(OU) \cdot \text{med}(OV) \cdot \cos(\text{med}(\angle(UOV)));$$

e se pelo menos um dentre eles fôr o vetor nulo, pomos $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Novamente, a definição independe dos representantes escolhidos. Em particular,

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

para todo $\vec{v}$, e

$$\cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||}$$

se $\vec{u}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$.

8.2 Para todos $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ valem:

1. $||\alpha\vec{v}|| = |\alpha|||\vec{v}||$
2. $||\vec{v}|| \geq 0$; e $||\vec{v}|| = 0$ se e somente se $\vec{v} = \vec{0}$.
3. $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$

8.3 Suponhamos que $\vec{v}$ é não-nulo. Para definir a *projeção ortogonal* de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$, escolhemos $O \in \mathbb{E}^3$, representamos $\vec{u} = \vec{OU}$, $\vec{v} = \vec{OV}$, tomamos o pé da perpendicular à reta OV por U, que chamamos de U', e pomos $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{OU'}$. Considerando o triângulo retângulo $OU'U$, vemos que

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} &= ||\vec{u}|| \cdot \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v}))\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} \\ &= (\vec{u} \cdot \vec{v})\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||^2} \\ &= (\vec{u} \cdot \hat{v})\hat{v} \end{aligned}$$

onde $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ é o *versor* (vetor unitário) na direção $\vec{v}$.

8.4 *(Propriedades algébricas)*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (simetria)

2. $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$ (homogeneidade de grau 1)

3. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ e $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$ (distributividade)

(2) e (3) também expressam a *bilinearidade* do produto escalar.

8.5 Temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{se e somente se } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são ortogonais.}$$

Além disso, considere o triângulo ABC. Sejam a, b, c as medidas dos lados BC, CA, AB e θ a medida do ângulo ACB. Então

$$\begin{aligned} c^2 &= ||\vec{AB}||^2 \\ &= ||\vec{CB} - \vec{CA}||^2 \\ &= ||\vec{CB}||^2 + ||\vec{CA}||^2 - 2(\vec{CB} \cdot \vec{CA}) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \end{aligned}$$

e reobtemos a *Lei dos cossenos* da geometria Euclideana.

8.6 Teorema. *Se o circuncentro O de um triangulo ABC dado é escolhido como origem, então o vetor posição de seu ortocentro é igual à soma dos vetores posição de seus vértices.*

Dem. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ os vetores posição dos vértices A, B, C. O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, portanto é equidistante dos vértices. Assim $||\vec{a}|| = ||\vec{b}|| = ||\vec{c}||$. Seja H o ponto do plano determinado por A, B, C tal que $\vec{H} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Calculamos

$$\vec{CH} \cdot \vec{AB} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) = -||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 = 0,$$

mostrando que as retas CH e AB são perpendiculares. Assim, H pertence à altura baixada de C sobre AB. Analogamente, mostramos que H pertence às outras alturas do triângulo. Logo, H é o ortocentro (centro da circunferência *inscrita* no triângulo). $\square$

8.7 Corolários. As alturas de um triângulo são concorrentes. Em qualquer triângulo, o circuncentro O, o baricentro M, e o ortocentro H são colineares. De fato, $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{OH}$. Assim, O, H, M coincidem se e somente se dois deles coincidem, e, caso contrário, a reta por eles é chamada de *reta de Euler.*

Ex. 8.1 Demonstre que as diagonais de um paralelogramo são ortogonais se e somente ele é um losango.

Ex. 8.2 Suponha que a soma de três vetores de mesmo comprimento é nula. Demonstre que o ângulo formado entre dois quaisquer deles é 120^o.