6.a aula: 18mar (resumo)

6.1 A construção do paralelepípedo em (5.5) mostra que se $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ são L.I. então qualquer vetor $\vec{v}$ se escreve na forma

$$\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \tag{1}$$

para certos escalares x_1, x_2, x_3. Por causa disto, dizemos que os vetores e_1, e_2, e_3 *geram* o espaço $\mathbb{V}$, ou que formam um *sistema de geradores* de $\mathbb{V}$. Um conjunto ordenado de vetores L.I. que gera $\mathbb{V}$ é chamado de *base*. Vemos que todo conjunto ordenado de três vetores L.I. é uma base.

6.2 Sejam $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{V}$. Uma expressão do tipo

$$x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n$$

para certos escalares $x_1, \ldots, x_3$ é chamada de uma *combinação linear* de $v_1, \ldots, v_n$. Vimos acima que todo vetor de $\mathbb{V}$ é combinação linear dos vetores de uma base.

6.3 Os escalares x_1, x_2, x_3 em (1) ficam unicamente determinados por $\vec{v}$. De fato, se

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$$

então

$$(x_1 - y_1)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 + (x_3 - y_3)\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Da hipótese de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ serem L.I. segue que $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = x_3 - y_3 = 0$ e portanto

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3.$$

Os escalares x_1, x_2, x_3 em (1) são chamados de *coordenadas* do vetor $\vec{v}$ na base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Escrevemos

$$(\vec{v})_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

6.4 Seja $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ outra base de $\mathbb{V}$. Como E é base, cada vetor de F se escreve como combinação linear dos vetores de E. Assim

$$\begin{aligned}
\vec{f}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\
\vec{f}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\
\vec{f}_3 &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3
\end{aligned}$$

ou

$$(\vec{f}_1\ \vec{f}_2\ \vec{f}_3) = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)A \tag{2}$$

para $A = (a_{ij})$. Suponhamos que y_1, y_2, y_3 são as coordenadas d $\vec{v}$ na base F. Temos

$$\vec{v} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\vec{f}_1\ \vec{f}_2\ \vec{f}_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Substituindo (2) em (3) vem que

$$(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Como $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ é L.I. segue que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Chamamos a A de *matriz de mudança* da base F para a base E e denotamos $A = M_{E/F}$. Logo

$$(\vec{v})_E = M_{E/F}(\vec{v})_F.$$

6.5 Se E, F, G são bases de $\mathbb{V}$, então

$$M_{E/G} = M_{E/F}M_{F/G} \qquad \text{(regra da cadeia)}.$$

Também

$$M_{E/E} = I \qquad \text{(matriz identidade)}.$$

Segue que

$$M_{E/F}M_{F/E} = I = M_{F/E}M_{E/F},$$

isto é, toda matriz de mudança de base $M_{E/F}$ é invertível e

$$M_{E/F}^{-1} = M_{F/E}.$$

Ex. 6.1 Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ e $G = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ bases de $\mathbb{V}$. Suponhamos que E é uma base ortonormal.

(a) Suponhamos que $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$, mas que $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ são paralelos ao plano determinado pelos pontos

$$O, O + \vec{e}_1, O + \vec{e}_2$$

onde O é um ponto qualquer fixado, e que $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ são obtidos a partir de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ por uma rotação de um ângulo α. Escrever a matriz $M_{E/F}$.

(b) Suponhamos agora que $\vec{g}_1 = \vec{f}_1$, mas que $\vec{g}_2$, $\vec{g}_3$ são paralelos ao plano determinado pelos pontos

$$O, O + \vec{f}_2, O + \vec{f}_3,$$

e que $\vec{g}_2$, $\vec{g}_3$ são obtidos a partir de $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ por uma rotação de um ângulo β. Escrever a matriz $M_{F/G}$.

(c) Escrever as matrizes $M_{E/G}$, $M_{F/E}$, $M_{G/F}$, $M_{G/E}$.