4.a aula: 11mar (resumo)

3.1 Podemos “dividir” um vetor por um vetor paralelo não-nulo. De fato, sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores paralelos onde $\vec{v} \neq \vec{0}$. Então existe um único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$. Neste caso, escrevemos

$$\frac{\vec{u}}{\vec{v}} = \alpha.$$

3.2 Lema. Três pontos A_1, A_2, A_3 são colineares se e somente se existem escalares m_1, m_2, m_3 tais que

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0 \quad \text{e} \quad m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + m_3\overrightarrow{OA_3} = \vec{0}.$$

Dem. Se os pontos são colineares, então $\overrightarrow{A_1A_3}$ e $\overrightarrow{A_3A_2}$ são paralelos e assim

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_3A_2}} = \alpha.$$

Então $\overrightarrow{A_3A_1} + \alpha\overrightarrow{A_3A_2} = \vec{0}$, o que diz que A_3 é o centro de massa de A_1, A_2 equipados com as massas $m_1 = 1$, $m_2 = \alpha$. Assim, para qualquer origem O, temos

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{OA_3} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2}$$

e basta escolher $m_3 = -m_1 - m_2$ para ter as equações desejadas. Reciprocamente, se as equações do enunciado estão satisfeitas, então

$$m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{OA_3}$$

implica que A_3 é o centro de massa de A_1, A_2 e portanto está na reta A_1A_2. $\square$

3.3 Teorema de Menelau. Considere um triângulo ABC. Sejam A', B', C' pontos nas retas BC, CA, AB. Então esses pontos são colineares se e somente se

$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = -1. \tag{1}$$

Dem. Suponhamos que vale a relação (1). Sejam a, $b \in \mathbb{R}$ tais que $-\frac{b}{a} = \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}$. Então $a\overrightarrow{C'A} - b\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$. Isso diz que C' é o centro de massa de A e B equipados com massas a e $-b$, logo

$$(a - b)\overrightarrow{OC'} = a\overrightarrow{OA} - b\overrightarrow{OB}. \tag{2}$$

Escolha agora $c \in \mathbb{R}$ tal que $-\frac{c}{b} = \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}$. Então $b\overrightarrow{A'B} - c\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$. Isso diz que A' é o centro de massa de B e C equipados com massas b e $-c$, logo

$$(b - c)\overrightarrow{OA'} = b\overrightarrow{OB} - c\overrightarrow{OC}. \tag{3}$$

Agora (1) fornece

$$-\frac{a}{c} = \frac{\vec{CB'}}{\vec{B'A}},$$

o que diz que $c\vec{B'C} - a\vec{B'A} = \vec{0}$, isto é, B' é o centro de massa de C e A equipados com massas c e $-a$, logo

$$(c-a)\vec{OB'} = c\vec{OC} - a\vec{OA}. \tag{4}$$

Sejam $m_A = b-c$, $m_B = c-a$, $m_C = a-b$. Então somando (2), (3) e (4), obtemos que

$$m_A + m_B + m_C = 0 \quad \text{e} \quad m_A\vec{OA'} + m_B\vec{OB'} + m_C\vec{OC'} = \vec{0}.$$

Pelo Lema 3.2, sabemos que A', B', C' são colineares. A recíproca fica como exercício.

Ex. 4.1 Suponha que A', B', C' são colineares e mostre que vale a relação (1).