3.a aula: 6mar (resumo)

3.1 Sejam $A, B, C \in \mathbb{E}$ pontos não-colineares. Então esses pontos determinam um plano. O segmento determinado por B e C é descrito por $X = A + \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$ para $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$. Segue que o triângulo ABC é descrito por $X = A + \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$ para $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 1$.

3.2 Uma idéia geral é fixar um ponto O (*origem*) e representar qualquer ponto P pelo vetor $\vec{OP}$ (*vetor-posição*).

3.3 Sejam ABC um triângulo. Sejam A', B', C' os pontos médios dos segmentos BC, CA, AB , resp. Então, por exemplo, $\vec{AA'} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$. Os segmentos AA', BB', CC' são chamados de *medianas* do triângulo ABC . Seja M o ponto do segmento AA' que divide este segmento na razão de $2 : 1$. Então $M = A + \frac{2}{3}\vec{AA'}$. Fixemos uma origem O e sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{m}$ os vetores-posição de A, B, C e M , resp. Então

$$\vec{AA'} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a})$$

e

$$\vec{m} = \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{AA'},$$

logo

$$\vec{m} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}). \quad (1)$$

Como a fórmula (1) é simétrica em relação aos vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, uma conta similar mostra que: se N (resp. P) é o ponto de BB' (resp. CC') que divide este segmento na razão de $2 : 1$ e $\vec{n} = \vec{ON}$ ($\vec{p} = \vec{OP}$), então

$$\vec{n} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{m} = \vec{p}.$$

Isto mostra que o ponto $M = N = P$ pertence às três medianas. Mostramos que *as medianas de um triângulo são concorrentes num ponto (o chamado baricentro) que as divide na razão $2 : 1$.*

3.4 Seja $A_1, \dots, A_n$ um sistema de n pontos materiais com massas $m_1, \dots, m_n$, resp. O *centro de massa* do sistema é o ponto A que resolve a equação vetorial

$$m_1\vec{AA}_1 + \dots + m_n\vec{AA}_n = \vec{0}. \quad (2)$$

Fixemos uma origem O e seja $\vec{a}_i$ o vetor posição de A_i . Então a solução de (2) é o único ponto A com vetor posição

$$\vec{a} = \frac{1}{m}(\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_n), \quad (3)$$

onde

$$m = m_1 + \dots + m_n$$

é a massa total do sistema. Nessa discussão, faz sentido (geométrico) considerar massas negativas (às vezes, chamadas de *psuedo-massas*), mas não é admitido que a massa total m seja nula.

3.5 O centro de massa de um sistema de dois pontos satisfaz $A = A_1 + \frac{m_2}{m} \vec{A_1 A_2}$; em particular, pertence à reta $A_1 A_2$ (ao segmento $A_1 A_2$ se $m_1, m_2 > 0$).

Ex. 3.1 Os lados de um triângulo são paralelos às medianas doutro. Demonstre que as medianas do segundo triângulo são paralelas aos lados do primeiro.

Ex. 3.2 Demonstrar que se um sistema de pontos materiais é dividido em dois subsistemas, e cada subsistema é substituído por um ponto material representando seu centro de massa, então o centro de massa do sistema resultante de dois pontos materiais coincide com o centro de massa do sistema original. (Sugestão: Usar a equação (3).)