

20.a aula: 29mai (resumo)

20.1 Proposição. Dada uma matriz simétrica Q de ordem 3, existe uma matriz ortogonal M (isto é, $M^{-1} = M^t$) tal que M^tQM é uma matriz diagonal.

Dem. (Esboço) Seja $Q = (a_{ij})$. A equação característica de Q é $\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$. As raízes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ desta equação, chamados valores característicos,

são precisamente os valores de λ para qual o sistema $Qv = \lambda v$, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

é indeterminado. Sejam v_1, v_2, v_3 as soluções correspondentes a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, normalizadas tais que $\|v_i\| = 1$. Então a matriz M , cuja i -ésima coluna é v_i , é ortogonal. Como $Qv_i = \lambda_i v_i$ para $i = 1, 2, 3$, segue que $QM = MD$ com $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Logo $M^{-1}QM = D$. $\square$

20.2 Exemplo. Seja $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. A equação característica é

$(2 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0$. Temos então $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Calculamos $M =$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. Se $3x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz - 2yz = 1$ é uma superfície

quádrica, vemos então que a mudança de coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$

transforma a equação em $2\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 + 6\tilde{z}^2 = 1$. Concluimos que se trata de um elipsóide centrado na origem com semi-eixos $1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6}$, respectivamente nas direções de $(1, -1, 0), (1, 1, 1), (-1, -1, 2)$ (nas coordenadas antigas).

20.3 Exemplo. Descreveremos a superfície quádrica de equação $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz - 2x + 2y + 2z - 2 = 0$. O termo linear $L = (-2 \ 2 \ 2)$ é não-nulo, então tentamos efetuar inicialmente uma translação para eliminá-lo. Queremos

resolver $Qv_0 = -\frac{1}{2}L^t$ em $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Temos $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e assim

$x_0 = -1, y_0 + z_0 = 2$, e a solução geral é $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 1) + \lambda(0, 1, -1)$, isto é, os centros da superfície formam uma reta. Fazemos $(x, y, z) = (-1, 1, 1) + (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Com $f(-1, 1, 1) = 1$, a nova equação fica $\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\tilde{y} + 2\tilde{x}\tilde{z} + 1 = 0$. A equação característica é $-\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$. Transformamos a equação da superfície em $-2\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 1$, e a reconhecemos como um cilindro hiperbólico (ou hiperbolóide de translação). Os eixos da hipérbole-geratriz do hiperbolóide são os vetores característicos correspondentes aos valores característicos 2, -1, isto é, $(2, 1, 1)$ e $(1, -1, -1)$, respectivamente. O outro vetor característico $(0, 1, -1)$, correspondente ao valor característico 0, é a direção da reta de centros.

Nos exercícios abaixo, está fixado um sistema de coordenadas ortonormal (x, y, z) .

Ex. 20.1 Estudar as quádricas: (i) $2(xy + yz + xz + y - z) - 10 = 0$; (ii) $4x^2 - 6xz - 4y = 8$; (iii) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4yz - 6y + 1 = 0$.