**19.a aula: 27mai (resumo)**

**19.1** O *hiperbolóide de uma folha* é a superfície definida pela equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1. \tag{1}$$

Note que $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = \sqrt{d^2 - 1}$ onde $d$ é a distância de $(x, y, z)$ ao eixo $z$. Isso mostra que todos os pontos à distância $d$ de tal eixo estão à mesma altura $z$, portanto trata-se de uma superfície de revolução em torno do eixo $z$ (além disso, o sinal de $\pm$ antes da raiz quadrada mostra que a superfície é reflexionalmente simétrica em relação ao plano $z = 0$). Seu perfil, obtido pela secção pelo plano $x = 0$, é $y^2 - z^2 = 1$, a saber, uma hipérbole. A ausência de termo linear na equação indica que a origem é um centro da superfície. As superfícies

$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2$$

com $r > 0$ também são hiperbolóides de uma folha com uma "cintura" que depende de $r$.

**19.2** O hiperboloíde de uma folha (1) é uma superfícíe *regrada*, isto é, folheada por retas. Para ver isso, consideremos os pontos $(x_0, y_0, 0)$ com $x_0^2 + y_0^2 = 1$ que compõem a cintura e busquemos vetores diretores $(a, b, c)$ tais que a reta $r : (x, y, z) = (x_0, y_0, 0) + \lambda(a, b, c)$ esteja inteiramente contida na superície. Substituindo em (1), obtemos que $2(ax_0 + by_0) + \lambda(a^2 + b^2 - c^2) = 0$ para todo $\lambda \neq 0$. Segue que $ax_0 + by_0 = 0$ e $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, e as soluções (normalizadas) são $(a, b, c) = (-y_0, x_0, \pm 1)$. Obtemos então duas retas

$$r^{\pm}_{(x_0,y_0)} : \begin{cases} x = x_0 - \lambda y_0 \\ y = y_0 + \lambda x_0 \\ z = \pm\lambda \end{cases}$$

contidas no hiperbolóide concorrentes em $(x_0, y_0, 0)$. Seja agora $(x_1, y_1, 0) \neq (x_0, y_0, 0)$ com $x_1^2 + y_1^2 = 1$ outro ponto da cintura e verifiquemos que as retas $r^{+}_{(x_0,y_0)}$ e $r^{+}_{(x_1,y_1)}$ são reversas. O critério do determinate fornece

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & 0 \\ -y_0 & x_0 & 1 \\ -y_1 & x_1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x_0x_1 + y_0y_1) - 2 < 2\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - 2 = 0$$

e elas são reversas. Similarmente, $r^{-}_{(x_0,y_0)}$ e $r^{-}_{(x_1,y_1)}$ são reversas.

**19.3** O *cone* (circular) é definido por

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Trata-se de uma caso limite do hiperbolóide de uma folha, quando a cintura tende a desaparacer ($r \to 0$). Também é uma superície de revolução.

**19.4** O *hiperbolóide de duas folhas* é definido por

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 \quad \text{ou} \quad -x^2 - y^2 + z^2 = 1.$$

Notemos que $z^2 = x^2 + y^2 + 1 \geq 1$ ou $|z| \geq 1$. É uma superfície de revolução em torno do eixo $z$ com perfil em $x = 0$ dado por $-y^2 + z^2 = 1$, em outras palavras, uma hipérbole, mas agora com orientação diferente da obtida em (19.1). Os hiperboloídes de duas folhas

$$x^2 + y^2 - z^2 = -r^2$$

se aproximam do cone quando $r \to 0$, agora pelo lado interno.

**19.5** Consideremos agora equações com termo linear. O *parabolóide de revolução* é

$$x^2 + y^2 - z = 0 \quad \text{ou} \quad z = x^2 + y^2.$$

Trata-se de uma superfície de revolução com perfil em $x = 0$ dado pela parábola $z = y^2$. O *parabolóide elíptico* é dado por

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

onde $a$, $b > 0$. O *parabolóide hiperbólico* é

$$x^2 - y^2 - z = 0 \quad \text{ou} \quad z = x^2 - y^2.$$

As secções por planos $z = k$, $k \neq 0$ são hipérboles, e as por planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas com concavidades opostas. De fato, pode ser obtido como união das parábolas $z = -y^2 + k^2$, $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$), cujos vértices $(k, 0, k^2)$ compõem a parábola $z = x^2$, $y = 0$. A rotação $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$, $w = z$ de $45^0$ em torno do eixo $z$ leva o parabolóide em $w = 2uv$, de modo que $z = xy$ também é uma equação comumente utilizada para descrever esta superfície.

`Nos exercícios abaixo, está fixado um sistema de coordenadas ortonormal` $(x, y, z)$.

**Ex. 19.1** Esboçar um desenho do gráfico em cada caso: (i) *cilindro elíptico* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (ii) *cilindro hiperbólico* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. (iii) *cilindro parabólico* $x^2 = 2py$, $p \neq 0$.

**Ex. 19.2** Demonstrar que por cada ponto do parabolóide hiperbólico passam exatamente duas retas inteiramentes contidas na superfície.

**Ex. 19.3** Calcular o centro da superfície de equação $6x^2 + 7y^2 - 14z^2 + 8yz + 24xz - 12xy + 24x - 26y + 16z = 17$.