18.a aula: 22mai (resumo)

18.1 Chamaremos de **superfície quádrica** a uma superfície definida por uma equação polinomial de grau dois em três variáveis:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\qquad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0. \end{aligned}$$

Em notação matricial:

$$v^tQv + Lv + c = 0$$

onde $Q = (a_{ij})$ é uma matrix simétrica de ordem 3, $L = (b_j)$ é uma matrix-linha 1×3 e $v^t = (x_1\ x_2\ x_3)$.

18.2 A *superfície esférica* ou *esfera* de centro $P = (x_0, y_0, z_0)$ e raio $r > 0$ consiste dos pontos que distam r de P. Sua equação é então

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(x_0x + y_0y + z_0z) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0.$$

Aqui Q é a matriz identidade e $L = 2(x_0\ y_0\ z_0)$. A esfera é uma superfície *limitada* e *rotacionalmente simétrica*. De fato, qualquer reta passando pelo seu centro é um eixo de rotação. Por quatro pontos não-coplanares passa uma única esfera. O plano tangente à esfera por um ponto (x_1, y_1, z_1) é $(x_1 - x_0)x + (y_1 - y_0)y + (z_1 - z_0)z = r^2 - x_0x_1 - y_0y_1 - z_0z_1$.

18.3 O *cilindro* (circular, reto) é definido por

$$x^2 + y^2 = r^2$$

onde $r > 0$. Como z não comparace na equação, o cilindro é invariante por translação na direção do eixo z. Trata-se de uma superfície *ilimitada* e rotacionalmente simétrica. O plano tangente ao cilindro por um ponto (x_1, y_1, z_1) é $x_1x + y_1y = r^2$. Também

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

define um cilindro cuja secção transversal é uma elipse.

18.4 O *elipsóide* é definido por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

É reflexionalmente simétrico em relação aos planos coordenados. Será uma superfície de rotação se dois dentre a, b, c forem iguais.

`Nos exercícios abaixo, está fixado um sistema de coordenadas ortonormal` (x, y, z).

Ex. 18.1 Verificar quais equações representam uma esfera, em cujos casos calcular o centro e o raio: (i) $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$; (ii) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$; (iii) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x - 8y - z - 1 = 0$; (iv) $x^2 + y^2 + z^2 + z = 0$.

Ex. 18.2 Determinar as coordenadas do centro e o raio da circunferência intersecção do plano $x + y + z = 1$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Ex. 18.3 Determinar o centro e os eixos dos elipsóides: (i)$x^2+12y^2+15z^2-3z = 0$; (ii) $4x^2 + 36y^2 + z^2 - 18x + 72y + 2z = 100$; (iii) $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 6x + 16z - 10y - 1 = 0$.