17.a aula: 20mai (resumo)

17.1 Proposição. Dado um polinômio quadrático

$$f(v) = v^t Q v + L v + c \tag{1}$$

com em (15.4), quando existe uma translação

$$v = v_0 + \tilde{v}$$

tal que $\tilde{f}(\tilde{v}) = f(v_0 + \tilde{v})$ não tem a parte linear? Ora, usando (15.4) temos

$$\tilde{f}(\tilde{v}) = \tilde{v}^t Q \tilde{v} + (L + 2v_0^t Q)\tilde{v} + f(v_0) \tag{2}$$

de modo que deveríamos escolher v_0 tal que $L + 2v_0^t Q = 0$, ou seja,

$$Q v_0 = -\frac{1}{2} L^t. \tag{3}$$

Este é um sistema linear 2×2 que sempre tem uma solução se $\det Q \neq 0$, mas pode ou não ter soluções se $\det Q = 0$. Observe que o termo quadrático permanece inalterado após a mudança.

17.2 Geometricamente, eliminar o termo linear equivale a transladar a curva até que a origem seja um centro dela. De fato, se f não tem termo linear então $f(-v) = f(v)$. Em geral, um ponto é chamado de *centro* de uma curva se o simétrico de qualquer ponto da curva, em relação ao ponto em questão, também é um ponto da curva. Nem todas as seções cônicas possum centros. Além disso, caso exista, o centro não precisa ser único. Por exemplo, completando o quadrado de $x^2 - 2x + y^2 = 0$ obtemos $(x-1)^2 + y^2 = 1$ e então a mudança de coordenadas $x = 1 + \tilde{x}$, $y = \tilde{y}$ transforma a equação em $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1$, que é um circunferência centrada na origem do novo sistema de coordenadas.

17.3 Exemplo. Consideremos a cônica $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$. O sistema (3) fica

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Neste caso, $\det Q = 0$, mas há solução. Podemos tomar $x_0 = 3$, $y_0 = 0$. De acordo com (2), calculamos $f(3, 0) = -1$ e obtemos $\tilde{x}^2 - 4\tilde{x}\tilde{y} + 4\tilde{y}^2 - 1 = 0$. Neste ponto, poderíamos efetuar uma rotação para eliminar o termo misto, mas é mais eficiente notar que podemos fatorar a equação em $(\tilde{x} - 2\tilde{y})^2 - 1 = 0$, de modo a obter $\tilde{x} - 2\tilde{y} = \pm 1$ ou ainda, $x - 2y = 4$ ou $x - 2y = 2$, que é um par de retas paralelas. Note que um par de retas paralelas possui uma infinidade de centros, a saber, a reta paralela equidistante às retas; essa infinidade de centros corresponde à infinidade de soluções do sistema linear acima.

17.4 (*Classificação das cônicas*) Seja $\mathcal{C}$ uma cônica dada por $f(v) = 0$ como em (1). Podemos determinar as possibilidades para $\mathcal{C}$ em termos do sinal de

$\det Q$. Uma rotação elimina o termo quadrático misto e $\det \tilde{Q} = \det Q$, de modo que podemos assumir de antemão que $B = 0$. Agora $\det Q = AC$. (1) $\det Q > 0$. Então A e C têm o mesmo sinal, que podemos assumir positivo, multiplicando a equação por -1, se necessário. Como $\det Q \neq 0$, podemos efetuar uma translação e assumir $L = 0$. Chegamos a $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$. (a) $F < 0$: elipse (circunferência se $A = C$). (b) $F = 0$: um ponto ($(0,0)$). (c) $F > 0$: vazio. (2) $\det Q < 0$. Como no caso (1), chegamos a $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ onde A e C têm sinais opostos. Podemos assumir $A > 0$, $C < 0$. (a) $F \neq 0$: hipeérbole. (b) $F = 0$: par de retas concorrentes (na origem). (3) $\det Q = 0$. Então $A = 0$ ou $C = 0$. Intercambiando x e y podemos assumir $C = 0$. A equação fica $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$. (a) $A = 0$: uma reta. (b) $A \neq 0$: (i) $E \neq 0$: parábola. (ii) $E = 0$: duas retas paralelas, uma reta ou vazio.

17.5 Exemplo. Consideremos a cônica $\sqrt{3}xy + y^2 - 1 = 0$. Temos

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

e $\det Q = -3/4 < 0$. Então a curva é uma hipérbole ou um par de retas concorrentes. Não há termo linear, então a origem é um centro. Como $(0,0)$ não satisfaz a equação, trata-se do primeiro caso.

`Nos exercícios abaixo, está fixado um sistema de coordenadas ortonormal` (x, y).

Ex. 17.1 Usar uma translação e uma rotação para identificar a curva e esboçar um desenho de seu gráfico: $7x^2 + 5y^2 + 2\sqrt{3}xy - (14 + 2\sqrt{3})x - (10 + 2\sqrt{3})y + 8 + 2\sqrt{3} = 0$.

Ex. 17.2 Classificar segundo m as cônicas de equações: (i) $x^2 + 4y^2 + 2mxy - 1 = 0$. (ii) $mx^2 - 2xy + my^2 - 2x + 2y + 3 = 0$.

Ex. 17.3 Determinar o lugar geométrico dos centros das cônicas de equação $x^2 - y^2 + 2m^2x + 4my - 1 = 0$.