16.a aula: 15mai (resumo)

16.1 Proposição. Dada uma matriz simétrica $Q = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$, existe uma matriz de rotação $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ tal que $\tilde{Q} = M^t Q M$ é dada por $\begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{C} \end{pmatrix}$.

Dem. Efetuando a multiplicação, obtemos $\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}/2 \\ \tilde{B}/2 & \tilde{C} \end{pmatrix}$, onde

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta \\ \tilde{B} &= \frac{B}{2} \cos 2\theta + \frac{C - A}{2} \sin 2\theta \\ \tilde{C} &= C \cos^2 \theta + A \sin^2 \theta - B \cos \theta \sin \theta\end{aligned}$$

Se $B = 0$ no precisamos fazer nada e tomamos $\theta = 0$. Se $B \neq 0$, tomamos $\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \left(\frac{A-C}{B} \right)$ e então obtemos $\tilde{B} = 0$. $\square$

16.2 Suponhamos que θ foi escolhido de modo que $\tilde{B} = 0$. Agora os valores de $\tilde{A}$, $\tilde{C}$ são dados pelas fórmulas acima, mas a maneira mais fácil de calculá-los é notar que

$$\tilde{A} + \tilde{C} = A + C$$

e $\det(\tilde{Q}) = \det(M^t Q M) = \det(M^t) \det(Q) \det(M) = \det(Q)$ de modo que

$$\tilde{A}\tilde{C} = AC - \frac{B^2}{4}$$

Assim $\tilde{A}$ e $\tilde{C}$ são raízes da chamada *equação característica* de Q :

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2/4 = 0. \quad (1)$$

O discriminante desta equação é $\Delta = (A - C)^2 + B^2 \geq 0$ de modo que ela sempre possui raízes reais. As raízes desta equação são chamadas de *valores característicos* de Q e serão denotadas com λ_1, λ_2 .

16.3 Resta descrever uma maneira mais prática de determinar a matriz M . Notemos que o membro esquerdo da equação (1) é o determinante do sistema linear

$$\begin{cases} (A - \lambda)x + \frac{B}{2}y = 0 \\ \frac{B}{2}x + (C - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Isso significa que λ é um valor característico precisamente quando o sistema é indeterminado. Seja $\lambda = \lambda_1$ e seja (a, b) uma solução não-trivial do sistema;

multiplicando (a, b) por uma constante ainda temos uma solução e podemos assumir que $a^2 + b^2 = 1$. Então

$$\begin{cases} Aa + \frac{B}{2}b &= \lambda_1 a \\ \frac{B}{2}a + Cb &= \lambda_1 b \end{cases} \quad (2)$$

Estas relações podem ser escritas na forma

$$Q \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (3)$$

e (a, b) é chamado de um *vetor característico* de Q associado a λ_1 . No caso $\lambda = \lambda_2$, afirmamos que $(-b, a)$ já é automaticamente uma solução do sistema

$$\begin{cases} Ax + \frac{B}{2}y &= \lambda_2 x \\ \frac{B}{2}x + Cy &= \lambda_2 y \end{cases} \quad (4)$$

De fato, para a primeira equação (usando a segunda eq. de (2) e $\lambda_1 + \lambda_2 = A + C$)

$$A(-b) + \frac{B}{2}a = -Ab + (\lambda_1 b - Cb) = -b(A + C - \lambda_1) = \lambda_2(-b),$$

e a segunda equação de (4) também é satisfeita por $(-b, a)$ pois o sistema é indeterminado. Agora podemos escrever

$$Q \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \quad (5)$$

e $(-b, a)$ é chamado de um *vetor característico* de Q associado a λ_2 . Juntando (3) e (5) temos

$$Q \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Como a inversa da matriz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ é igual à sua transposta, podemos chamar esta matriz de M e teremos $M^t Q M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. *Concluimos que a matriz M pode ser construída a partir de um vetor característico de Q .*

16.4 Exemplo. Consideremos a cônica $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$. Temos $Q = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e a eq. característica é $\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$. Os valores característicos são $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$. O vetor característico (a, b) associado a λ_1 satisfaz $5a + 3b = 8a$, ou seja, $(a, b) = (1, 1)$ e, normalizando, $(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. Segue que $M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. A base do novo sistema de coordenadas consiste das colunas de M , a saber, $\tilde{E} = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1))$, as novas coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y})$ satisfazem $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} - \tilde{y})$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} + \tilde{y})$ e $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2$, de

modo que a cônica fica $\tilde{x}^2 + \frac{\tilde{y}^2}{2} = 1$. Esta é uma elipse com semi-eixos 1 e 2 nas direções (1, 1) e (-1, 1).

16.5 Exemplo. Consideremos a cônica $4x^2 - 4xy + y^2 - \sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y = 0$. Temos $Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e a eq. característica é $\lambda^2 - 5\lambda = 0$. Os valores característicos são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. O vetor característico (a, b) associado a λ_1 satisfaz $4a - 2b = 0$, ou seja, $(a, b) = (1, 2)$ e, normalizando, $(a, b) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$. Segue que $M = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. A base do novo sistema de coordenadas consiste das colunas de M , a saber, $\tilde{E} = (\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2), \frac{1}{\sqrt{2}}(-2, 1))$, as novas coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y})$ satisfazem $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tilde{x} - 2\tilde{y})$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\tilde{x} + \tilde{y})$ e a equação fica $0\tilde{x}^2 + 5\tilde{y}^2 - \sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}}(\tilde{x} - 2\tilde{y})) - 2\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}}(2\tilde{x} + \tilde{y})) = 0$, o que dá $\tilde{y}^2 - \tilde{x} = 0$. Esta é uma parábola com vértice em (0, 0), e eixo e concavidade na direção e sentido de (1, 2).

No exercício abaixo, está fixado um sistema de coordenadas ortonormal (x, y) .

Ex. 16.1 Descrever as cônicas: (i) $x^2 + 6xy + y^2 = 8$; (ii) $19x^2 - 6xy + 11y^2 = 40$.