15.a aula: 8mai (resumo)

15.1 Exemplos familiares de secções cônicas são as seguintes curvas, descritas pelas respectivas equações em um sistema de coordenadas ortonormal: círculo, $x^2 + y^2 = R^2$ ($R > 0$: raio); elipse, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a, $b > 0$: semi-eixos); hipérbole, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a, $b > 0$; $2a$: distância entre os ramos; $y = \pm\frac{b}{a}x$: retas assímptotas); $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), parábola; $x^2 - y^2 = 0$, duas retas concorrentes; $(x - y + 1)(x - y - 1) = 0$, duas retas paralelas; $(x - y + 1)^2 = 0$, uma reta; $x^2 + y^2 = -1$, o conjunto vazio.

15.2 Sejam (O, E), (O', F) sistemas de coordenadas em $\mathbb{E}^2$, onde $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. Então a matriz de mudança

$$M_{E/F} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 \end{aligned}$$

e para todo ponto $X \in \mathbb{E}^2$

$$\begin{aligned} (X)_{O,E} &= (\vec{O}X)_E = (\vec{O}O')_E + (\vec{O}'X)_E = (\vec{O}O')_E + M_{E/F}(\vec{O}'X)_F \\ &= (O')_{O,E} + M_{E/F}(X)_{O',F} \end{aligned}$$

Sendo $(X)_{O,E} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $(X)_{O',F} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ e $(O')_{E,O} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$, nós então temos a *fórmula de mudança de coordenadas*:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ x_2 &= x_2^0 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned}$$

15.3 No caso em que as bases E e F são ortonormais, isto é, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = \delta_{ij}$, temos $a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$, $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$ e portanto $M^tM = I$. Segue que $M^{-1} = M^t$; em geral, matrizes com esta propriedade são chamadas de *ortogonais*.

15.4 Seja $\mathcal{C}$ a cônica descrita por uma equação $f(x, y) = 0$ onde

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

Queremos entender como f se transforma sob uma mudança de coordenadas. Consideremos então uma mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a\,\tilde{x} + c\,\tilde{y} \\ y &= y_0 + b\,\tilde{x} + d\,\tilde{y} \end{aligned}$$

Sendo $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$,

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

podemos escrever

$$v = v_0 + M\tilde{v}$$

e

$$f(v) = v^t Q v + L v + c$$

onde

$$Q = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix}, \quad c = F.$$

Um cálculo rápido mostra que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{v}) &= f(v_0 + M\tilde{v}) \\ &= \tilde{v}^t(M^t Q M)\tilde{v} + (L + 2v_0^t Q)M\tilde{v} + f(v_0). \end{aligned}$$

`Nos exercícios abaixo, está fixado um sistema de coordenadas ortonormal.`

Ex. 15.1 Efetuar uma mudança de coodenadas para reconhecer a curva dada pela equação $x^2 + 2y^2 - x - y + 1 = 0$. (Sugestão: "Completar os quadrados".)

Ex. 15.2 Efetuar a mudança de coordenadas $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} + \tilde{y})$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} - \tilde{y})$ na equação $xy = 1$. Qual é a curva? Desenhá-la nos dois sistemas de coordenadas.

Ex. 15.3 Seja $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ onde f é um polinômio quadrático. Demonstrar que $\mathcal{C}$ é *centralmente simétrica* em relação à origem (i.e. $(x, y) \in \mathcal{C}$ sse $(-x-y) \in \mathcal{C}$) se f não possui termos de grau um.