14.a aula: 6mai (resumo)

14.1 Uma *secção cônica* é uma curva plana obtida pela intersecção e um plano com um cone em $\mathbb{E}^3$. O grego Apolônio de Pérgamo (circa 200 AEC) escreveu um tratado fundamental sobre seções cônicas. Mais tarde, Kepler as usou para modelar movimentos de corpos celestes e Newton explicou esses modelos em termos de campos gravitacionais. Seções cônicas incluem em particular as familiares elipse, hipérbole e parábola.

14.2 Fixemos um sistema de coordenadas ortonormal em $\mathbb{E}^3$, and denotêmo-las com x, y, z. Então $z^2 = x^2 + y^2$ é a equação de um cone circular reto com vértice na origem. Consideremos a família de planos $\pi_{\theta,s}$ que passam pelo ponto $A = (s, 0, s)$ com vetor normal $\vec{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$. Então $\pi_{\theta,s}$ tem equação não-paramétrica $\sin\theta x + \cos\theta z = d$ onde $d = s(\sin\theta + \cos\theta)$, e equação vetorial $X = A + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$ onde $\vec{u} = (\cos\theta, 0, -\sin\theta)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$. Assim $\pi_{\theta,s} : (x, y, z) = (s + \lambda\cos\theta, \mu, s - \lambda\sin\theta)$. Note que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é um conjunto ortonormal de vetores. Agora temos um sistema de coordenadas ortonormal $(A, (\vec{u}, \vec{v}))$ no plano π, que fica identificado com $\mathbb{E}^2$. A equação da secção cônica em λ, μ é obtida combinando-se as equações do cone e do plano:

$$\lambda^2 \cos 2\theta + \mu^2 + 2d\lambda\cos\theta = 0. \tag{1}$$

O tipo de curva obtida depende de θ e d (ou θ e s).

14.3 De outro ponto de vista, consideremos o luigar geométrico $\mathcal{C}$ dos pontos X do plano $\mathbb{E}^2$ cuja distância a um ponto dado F (chamado de *foco*) mantém uma proporção constante com distância a uma reta r dada (chamada de *diretriz*):

$$d(X, F) = e \cdot d(X, r)$$

onde $e > 0$. Escolhendo um sistema de coordenadas ortonormal com $F = (0, 0)$ e $r : y = b$, $b < 0$, temos que $\mathcal{C}$ fica descrito pela equação $\sqrt{x^2 + y^2} = e|y - b|$ ou

$$x^2 + (1 - e^2)y^2 = e^2 b(b - 2y) \tag{2}$$

O tipo de curva obtida depende de e.

14.4 Em ambos os casos, as equações obtidas (1) e (2) tem a forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3}$$

onde $A, \ldots, F \in \mathbb{R}$, a saber, *equação polinomial quadrática.* Faremos um estudo sistemático das curvas planas definidas por tais equações.

`Nos exercícios abaixo, está fixado um sistema de coordenadas ortonormal.`

Ex. 14.1 Revisar as equações usuais da elipse, hipérbole e parábola.

Ex. 14.2 Verificar que a equação (1) representa um círculo se $\theta = 0$, elipse se $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, parábola se $\theta = \frac{\pi}{4}$ e hipérbole se $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. (Sugestão: "Completar o quadrado".)

Ex. 14.3 Verificar que a equação (2) representa elipse se $0 < e < 1$, parábola se $e = 1$ e (dois ramos) de hipérbole se $e > 1$. (Sugestão: "Completar o quadrado".)

Ex. 14.4 Verificar que a equação polinomial quadrática (3) permanece uma equação polinomial quadrática (com outros coeficientes) sob uma mudança de coordenadas da forma

$$\begin{cases} x = x_0 + a\tilde{x} + c\tilde{y}, \\ y = y_0 + b\tilde{x} + d\tilde{y}. \end{cases}$$