13.a aula: 24abr (resumo)

13.1 A seguir, discutiremos distâncias. A distância entre dois pontos $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$ é

$$d(P,Q) = ||\vec{PQ}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Em geral, a distância entre dois subconjuntos de $\mathbb{E}^3$ é a menor distância entre um ponto do primeiro subconjunto e um ponto do segundo subconjunto.

13.2 A distância entre um ponto P e uma reta $r : X = A + \lambda\vec{v}$ é a distância de P ao pé da reta perpendicular a r por P; seja P' esse ponto. Então $\vec{A}P' = \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{A}P$ e assim $||\vec{A}P|| = \frac{|\vec{A}P\cdot\vec{v}|}{||\vec{v}||}$, de onde (cf. Ex.10.2)

$$d(P,r) = ||\vec{P}P'|| = \sqrt{||\vec{A}P||^2 - \frac{(\vec{A}P\cdot\vec{v})^2}{||\vec{v}||^2}} = \frac{|\vec{A}P\times\vec{v}|}{||\vec{v}||}$$

13.3 A distância entre um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e um plano $\pi : (X - A)\cdot\vec{n} = 0$ é a distância de P ao pé da reta perpendicular a π por P; seja P' esse ponto. Então $\vec{P}P' = \mathrm{proj}_{\vec{n}}\vec{P}A$ e assim $d(P,\pi) = ||\vec{P}P'|| = \frac{|\vec{P}A\cdot\vec{n}|}{||\vec{n}||}$. Sendo $\vec{n} = (a, b, c)$ e $A = (x_1, y_1, z_1) \in \pi$, temos a equação não-paramétrica do plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ onde $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$. Logo

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

13.4 A distância entre uma reta r e um plano π só tem interesse se a reta é paralela ao plano (caso contrário, é zero). Nesse caso, $d(r,\pi) = d(P,\pi)$ onde $P \in r$ é arbitrá rio. Similarmente o caso da distância entre dois planos. Consideremos agora a distância entre duas retas $r : X = A + \lambda\vec{u}$ e $s : X = B + \lambda\vec{v}$. Aqui o caso interessante é aquele em que r e s são reversas. Temos $d(r,s) = d(P,Q)$ onde $P \in r$ e $Q \in s$ são os pontos mais próximos entre si. O segmento PQ é perpendicular a r e s, e $\vec{u}\times\vec{v}$ é um vetor normal a essas retas, então $\vec{P}Q = \mathrm{proj}_{\vec{u}\times\vec{v}}\overrightarrow{AB}$. Agora

$$d(r,s) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}\times\vec{v}|}{\vec{u}\times\vec{v}}.$$

`Nos exercícios abaixo, está fixado um sistema de coordenadas ortonormal.`

Ex. 13.1 Descrever o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de $(1, 2, 3)$ e $(5, 2, 7)$.

Ex. 13.2 Sejam $\pi_1 : (X - A) \cdot \vec{n} = 0$ e $\pi_2 : (X - B) \cdot \vec{n} = 0$ dois planos paralelos. Demonstre que

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\vec{A}B \cdot \vec{n}|}{||\vec{n}||}.$$

Ex. 13.3 Determinar o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{E}^3$ que são eqüidistantes das retas paralelas r, s, t que passam pelos pontos $A = (-1, 2, 0)$, $B = (3, 0, 4)$, $C = (1, -1, 5)$, respectivamente, e cuja direção é dada pelo vetor $\vec{v} = (1, 2, 4)$.

Ex. 13.4 Sejam $r : X = (0, 3, 2) + \lambda(1, -1, 2)$ e $k \geq 0$. Determinar os planos que contêm a reta r e distam k da origem. (Discutir as soluções do problema em função de k.)