

12.a aula: 10abr (resumo)

12.1 A seguir, usaremos as equações vetoriais de retas e planos para discutir suas posições relativas no espaço. Sejam

$$r : X = A + \alpha \vec{u}, \quad s : X = B + \mu \vec{v}$$

duas retas em $\mathbb{E}^3$. Se $\vec{u}, \vec{v}$ é LD então r e s são *paralelas*, e podemos apenas testar se $A \in s$ ou não para decidir se são paralelas *coincidentes* ou *distintas*. Se $\vec{u}, \vec{v}$ é LI, consideramos $\vec{AB}$. Se a tripla $\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}$ é LD então r e s são retas *concorrentes*; caso contrário, são *reversas*. Em geral, o *ângulo* entre r e s é um ângulo agudo, de modo que seu cosseno é igual ao módulo do cosseno do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

12.2 Sejam agora

$$r : X = A + \lambda u, \quad \pi : X = B + \mu \vec{v} + \nu \vec{w}$$

uma reta e um plano em $\mathbb{E}^3$. Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ é LD então r e π são *paralelos*, e podemos apenas testar se $A \in \pi$ ou não para decidir se r está contida em π ou não. Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ é LI, r e π são *transversos*. Em geral, o *ângulo* entre r e π é um ângulo agudo, de modo que seu cosseno é igual ao módulo do cosseno do ângulo entre um vetor diretor de r e um vetor normal a π .

12.3 Finalmente, consideremos dois planos

$$\pi_i = A_i + \lambda \vec{u}_i + \mu \vec{v}_i, \quad i = 1, 2.$$

Um vetor normal a π_i é $\vec{n}_i = \vec{u}_i \times \vec{v}_i$. Se $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ são LD então π_1 e π_2 são planos *paralelos*, e podemos apenas testar se $A_1 \in \pi_2$ ou não para decidir se são planos paralelos *coincidentes* ou *distintos*. Caso contrário, π_1 e π_2 são *transversos*. Em geral, o *ângulo* entre π_1 e π_2 é um ângulo agudo, de modo que seu cosseno é igual ao módulo do cosseno do ângulo entre $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$.

12.4 Exemplo. Está fixado um sistema de coordenadas ortonormal. Sejam

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

duas retas.

- (a) Verificar que r e s são reversas.
- (b) Determinar a reta t que é perpendicular a r e s .

Resolução. Os vetores diretores de r e s são, resp., $\vec{u} = (1, -1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 2, 1)$, e $\vec{AB} = (0, 1, 2)$. Os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}$ são LI se e somente se o determinante da

matriz 3×3 , cujas colunas são formadas pelas coordenadas de cada um desses vetores, é diferente de zero. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

temos a independência linear e assim o resultado da parte (a). Para terminar, sejam $X = (1 + \lambda, 1 - \lambda, 2) \in r$, $Y = (1, -1 + \mu, 1 + 2\mu) \in s$ pontos arbitrários, e consideremos a reta definida por X e Y :

$$t : Z = X + \nu \vec{XY}$$

Esta reta é concorrente com r e s , e precisamos que seja também ortogonal a cada uma delas, isto é, $\vec{XY} \cdot \vec{u} = \vec{XY} \cdot \vec{v} = 0$. Estas equações lineares são $2\lambda + \mu = 2$ e $\lambda + 5\mu = 4$, o que fornece $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$. Logo

$$t : \begin{cases} x = \frac{5}{3} + 2\nu \\ y = \frac{1}{3} + 2\nu \\ z = 2 - \nu \end{cases}$$

Nos exercícios abaixo, está fixado um sistema de coordenadas ortonormal.

Ex. 12.1 Calcular a projeção ortogonal do vetor $\vec{v} = (-3, 4, -5)$ sobre o plano $\pi : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(2, 0, 1)$.

Ex. 12.2 Calcular o volume do tetraedro com vértices em $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (2, 1, -3)$, $D = (0, 1, -6)$.

Ex. 12.3 Sejam r e s duas retas reversas. Descrever o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos de reta cujas extremidades são um ponto de r e um ponto s . Onde é usada a hipótese de r e s serem reversas?