11.a aula: 8abr (resumo)

11.1 Com intuito de introduzir as equações da **geometria analítica**, vamos inicialmente discutir equações vetoriais para retas e planos. Sejam A, $B \in \mathbb{E}^3$ dois pontos (distintos). Então fica determinada uma única reta r por esses pontos. Temos $X \in r$ se e somente se A, B, X são colineares sse $\vec{AB}$, $\vec{AX}$ são LD sse $\vec{AX} = \alpha\vec{AB}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ (já que $\vec{AB} \neq \vec{0}$) sse $X = A + \alpha\vec{AB}$. Chegamos então à equação vetorial da reta:

$$r : X = A + \alpha\vec{AB}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ao invés de A e B, pode-se também especificar uma reta dando $A \in \mathbb{E}^3$ e $v \in \mathbb{V}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$r : X = A + \alpha\vec{v}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, $\vec{v}$ é chamado de *vetor diretor* de r. Note que esta equação de r depende de escolhas e portanto não está unicamente determinada.

11.2 Sejam agora A, B, $C \in \mathbb{E}^3$ três pontos não-colineares. Então fica determinado um único plano π. Note que $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ são LI, mas $X \in \pi$ sse $\vec{AX}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ são LD sse $\vec{AX} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$ para alguns α, $\beta \in \mathbb{R}$. Chegamos então à equação vetorial do plano:

$$\pi : X = A + \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ao invés de A, B, C pode-se também especificar um plano dando $A \in \mathbb{E}^3$ e $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ LI:

$$\pi : X = A + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são chamados de *vetores diretores* de π. Note que esta equação de π depende de escolhas e portanto não está unicamente determinada.

11.3 Outra maneira de especificar um plano π em $\mathbb{E}^3$ é dar um ponto A pertencente ao plano e um vetor $\vec{n}$ que aponta na direção normal ao plano. Neste caso, $X \in \pi$ sse $\vec{AX} \perp \vec{n}$ sse $\vec{AX} \cdot \vec{n} = 0$:

$$\pi : (X - A) \cdot \vec{n} = 0.$$

11.4 As equações acima ficam mais úteis quando expressas em termos de um sistema de coordenadas. Fixemos uma origem $O \in \mathbb{E}^3$. Cada $P \in \mathbb{E}^3$ determina um vetor posição $\vec{OP} \in \mathbb{V}^3$ e fica determinado por este: $P = O + \vec{OP}$. Fixemos uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{V}^3$. Chamaremos o par (O, E) de um *sistema de coordenadas* em $\mathbb{E}^3$ e, nesse sistema, atribuiremos ao ponto P as coordenadas de seu vetor posição na base E. Assim $P = (x_1, x_2, x_3)$ sse $\vec{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$.

11.5 Fixemos de uma vez por todas (O, E) e omitamos a sua referência. Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (m, n, p)$, $X = (x, y, z)$. Agora de (11.1) e

(11.2) temos: *Equações paramétricas da reta*:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Equações paramétricas do plano:

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Além disso, sendo $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{n} = (a, b, c)$, de (11.3) temos: *Equação não-paramétrica do plano*:

$$\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

ou

$$\pi : ax + by + cz = d.$$

11.6 Aplicação. *Demonstrar que num triângulo retângulo, um cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela.* O segredo é escolher o sistema de coordenadas adaptado ao problema, de modo que as equações fiquem simplificadas. Seja então ABC um triângulo reto em A e escolhamos $A = O$, $\vec{e}_1 = \vec{A}B/||\vec{A}B||$, $\vec{e}_1 = \vec{A}C/||\vec{A}C||$. Então (O, E) é um sistema de coordenadas ortonormal e $A = (0, 0)$, $B = (\alpha, 0)$, $C = (0, \beta)$ onde α, $\beta > 0$. Se D é o pé da altura do triângulo por A, a medida da projeção é $||\vec{B}D|| = |\vec{A}B \cdot \frac{\vec{C}B}{||\vec{C}B||}| = |(\alpha, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\alpha, -\beta)| = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. A hipotenusa por sua vez mede $||\vec{C}B|| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, e a média geométrica desses valores é α, que é a medida do cateto AB.

Ex. 11.1 Determinar, em função de a, se existir, o ponto de interseção da reta $r : (x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(1, -1, 2)$ com o plano $\pi : ax + y + z = 1$. Interpretar geometricamente.

Ex. 11.2 Calcular os valores das medidas do ângulos entre uma diagonal de um cubo e uma diagonal de uma de suas faces.

Ex. 11.3 Sejam A, B, C, D as áreas das faces de um tetraedro. Suponha que as três arestas que se encontram no vértice oposto à face de área D são mutuamente ortogonais. Demonstrar que $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$.