

10.a aula: 1abr (resumo)

10.1 (*Propriedades algébricas do produto vetorial*) Para todos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ valem:

1. $\vec{u}, \vec{v}$ é LD se e somente se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.
2. $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$ (*anti-comutatividade*).
3. (a) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.
 (b) $(\alpha \vec{u}) \times \vec{v} = \alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (\alpha \vec{v})$
4. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} + (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{0}$ (*identidade de Jacobi*)

(3) e (4) representam a *bilinearidade*. Não vale a associatividade, e identidade de Jacobi está no seu lugar.

10.2 Suponhamos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ é LI, fixemos uma origem O e consideremos o paralelepípedo determinado por $O, U = O + \vec{u}, V = O + \vec{v}, W = O + \vec{w}$. Note que seu volume independe da escolha do ponto O . Calculemos esse volume:

$$\begin{aligned}
 \text{vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \text{area}(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \text{altura} \\
 &= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\text{proj}_{\vec{u} \times \vec{v}} \vec{w}\| \\
 &= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos \varphi \quad (\varphi: \text{ângulo agudo entre } \vec{w} \text{ e a} \\
 &\quad \text{direção de } \vec{u} \times \vec{v}) \\
 &= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\cos \theta| \quad (\theta = \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})) \\
 &= |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \\
 &= |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}|
 \end{aligned}$$

10.3 Seja E uma base ortonormal e positiva. Sejam $(\vec{u})_E^t = (x_1 \ x_2 \ x_3)$, $(\vec{v})_E^t = (y_1 \ y_2 \ y_3)$, $(\vec{w})_E^t = (z_1 \ z_2 \ z_3)$. Então

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Ex. 10.1 Demonstrar que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{w} + \vec{u}) = 2(\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w})$ para todos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Ex. 10.2 Demonstrar que $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$ para todos $\vec{u}, \vec{v}$.

Ex. 10.3 Suponha que três vetores satisfazem $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Demonstrar que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}$. Deduzir daí a “Lei dos senos” da geometria Euclideana.