MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
EXAME DE ADMISSÃO PARA 2019

NOME: ____

Documento: ____

Parte I. Cálculo

I.1 (2,0 pontos) Dada a função

$$\begin{aligned} g:\ \mathbb{R} &\to\ ]-1,1[\\ x &\mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{aligned}$$

prove que:

(a) g é derivável em $x = 0$;

(b) g é bijetiva.

I.2 (2,0 pontos) Considere um triângulo isósceles de vértices A, B e C, com os lados AB e AC de mesma medida, e M o ponto médio do segmento BC. Determine o ponto P pertencente ao segmento AM que minimiza a soma das distâncias de P aos três vértices do triângulo.

I.3 (2,0 pontos) Calcule a área da região K dada por:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \sqrt{4 - x^2}\}.$$

Parte II. Álgebra

II.1 (2 pontos) Enuncie o critério de Eisenstein de irreducibilidade de polinômios. Mostre que $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$. [Sugestão: use o critério em $q(x) = p(x+1)$.]

II.2 (2 pontos) Explique o algoritmo da divisão de polinômios para calcular o máximo divisor comum entre dois polinômios.

Parte III. Geometria

III.1 (2 pontos) Demonstre o Teorema da Bissetriz Interna: *dado o triângulo ΔABC seja $D \in \overline{BC}$ tal que a reta AD seja a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, vale a relação $AB/BD = AC/CD$.* [Sugestão: trace uma paralela à bissetriz por B ou por C e use o Teorema de Tales.]

III.2 (2 pontos) Exponha e explique para um aluno do ensino médio uma obtenção da média geométrica de dois segmentos usando régua e compasso. [Lembre-se que $\overline{PQ}$ é a média geométrica de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se $AB/PQ = PQ/CD$.]