Instituto de Matemática e Estatística da USP
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Prova de Seleção - Novembro de 2013

Nome:____

Parte 1. Cálculo.

Questão 1 Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$, pede-se:

(a) intervalos de crescimento e de decrescimento da função;

(b) intervalos em que a função possui concavidade para cima e para baixo;

(c) limites da função, quando x tende para mais infinito e para menos infinito, e esboço do gráfico de f;

(d) pontos de máximo e mínimo (observando se são locais e/ou globais) e pontos de inflexão da função.

Questão 2 Diga se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando cada uma de suas respostas:

(a) Toda função derivável em um ponto de seu domínio é contínua nesse mesmo ponto.

(b) Toda função contínua num ponto de seu domínio é derivável nesse mesmo ponto.

Questão 3 Calcule a área da região K dada por $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 10$ e $0 < y < \frac{1}{(1+x)^2}\}$.

Parte 2. Álgebra.

Questão 4 Lembre-se que o *Princípio da Indução Finita* diz que se uma asserção dependente de um número natural $N \in \mathbb{N}$ valer para $N = N_0$ e, se sua validade para $N = M$ implicar sua validade para $N = M + 1$, então a asserção será válida para todo $N \in \mathbb{N}$, tal que $N \geq N_0$.

Use o Princípio da Indução Finita para mostrar que, para todo $N \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6}.$$

Questão 5 Lembramos que dois números inteiros a e b serão congruentes módulo o número c, se o número c dividir a diferença $b - a$, e, neste caso, escrevemos $a \equiv b \mod c$.

Mostre que a equação $x^2 + y^2 = z^2$ não tem soluções inteiras em que ambos x e y sejam números ímpares. (Sugestão: use congruências módulo 4 nos dois lados da equação.)

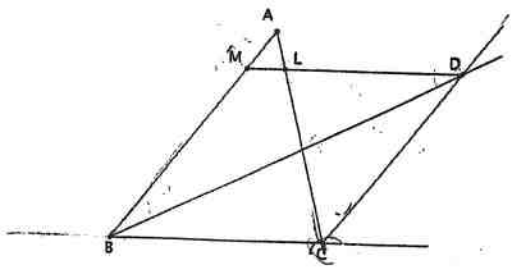
Parte 3. Geometria.

Notação: $\overleftrightarrow{PQ}$ denota a reta contendo os dois pontos P e Q; $\angle PQR$ denota o ângulo de vértice Q, formado pelas semirretas $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{QR}$; $\triangle PQR$ é o triângulo de vértices P, Q e R.

Questão 6 Dado o triângulo $\triangle ABC$, suponha que D seja o ponto de intersecção da bissetriz do ângulo interno em B com a bissetriz do ângulo externo em C, e que a paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ contendo o ponto D intersecte os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ nos pontos L e M, respectivamente. (Veja a Figura 1 a seguir.)

(a) Mostre que $\triangle DLC$ e $\triangle MDB$ são isósceles.

(b) Exprima o comprimento LM em função de LC e de MB.



Questão 7 A seguir é dada uma construção que resolve o problema proposto. Justifique as passagens solicitadas.

Problema: Dado um triângulo $\triangle ABC$, determinar um ponto X sobre o lado $\overline{AB}$ e um ponto Y sobre o lado $\overline{AC}$ de modo que as retas $\overleftrightarrow{XY}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ sejam paralelas e $XY = BX + YC$.

Construção dada:

1. Traçar a bissetriz do $\angle ACB$ e do $\angle ABC$.
2. Seja P o ponto de intersecção das bissetrizes traçadas no passo anterior. (**Justifique por que o ponto P existe.**)
3. Traçar por P a reta, s, paralela ao lado $\overline{CB}$. **(Justique a existência de s.)**
4. Seja X o ponto comum a s e a $\overleftrightarrow{AB}$, e seja Y o ponto comum a s e a $\overleftrightarrow{CA}$.
5. X e Y são os pontos procurados. **(Justifique por que estes pontos verificam as condições solicitadas.)**