Mestrado Profissional em Ensino da Matemática do IMEUSP

Exame de Admissão: 24 de novembro de 2012

PARTE I: CÁLCULO (6 pontos no total)

1. Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

   a) Determine o domínio de f e verifique que $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$.

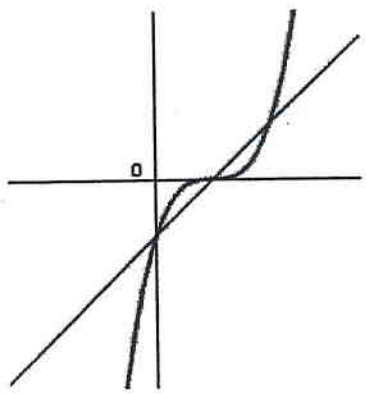
   b) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função.

   c) Estude a concavidade.

   d) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1_-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1_+} f(x)$

   e) Esboce o gráfico de f.

2. Considere as funções reais $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ e $g(x) = x - 1$ cujos gráficos são dados abaixo.



   a) Determine os pontos $(x_0, f(x_0))$ do gráfico da função f em que a reta tangente é paralela ao gráfico da função g.

   b) Calcule a área da região limitada pelos gráficos de f e g.

3. Decida se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique suas afirmações.

   a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$, então f é derivável em x_0.

   b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in \mathbb{R}$, então f é contínua em x_0.

   c) A função $F(x) = \ln(x^2 + 1)$ é uma primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

PARTE II: ÁLGEBRA (4 pontos no total)

1. JUSTIFICANDO SUAS RESPOSTAS E RACIOCÍNIOS.

   a) Diga qual é o maior inteiro que pode ser somado ao dividendo sem alterar o quociente, quando se divide 451 por 37.

   b) Prove que se $a, b, p \in \mathbb{Z}$, p é um número ímpar e $a^2 + 2b^2 = 2p$ então a é um número par e b é um número ímpar.

2. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros munido das operações usuais de adição $(+)$ e de multiplicação $(\cdot)$. Sendo $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, definimos a relação de **congruência módulo p** em $\mathbb{Z}$ como segue:

   DEF.: Dados x, $y \in \mathbb{Z}$, dizemos que x **é congruente a y módulo** p se $p \,|\, (x - y)$ (p divide $(x - y)$), e escrevemos $x \equiv y \,(mod\, p)$.

   (a) Mostre que essa é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

   (b) Prove que vale:

   "$x \equiv y \,(mod\, p) \iff$ são iguais os restos da divisão de x e de y por p."

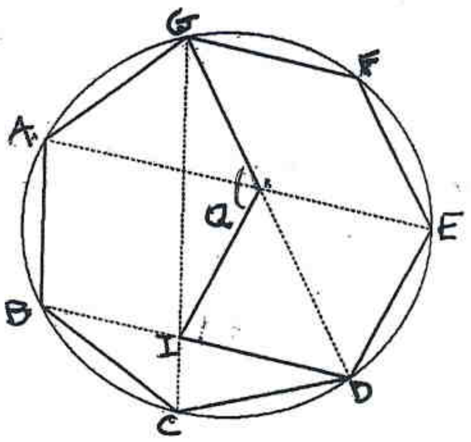
   (c) Descreva a classe de equivalência do número 1 por essa relação, ou seja, caracterize o conjunto de todos os $x \in \mathbb{Z}$ tais que $x \equiv 1 \,(mod\, p)$.

   (d) Sendo $\mathbb{Z}_p$ o conjunto formado por todas as classes de congruência módulo p, quantos são os elementos de $\mathbb{Z}_p$? Por que?

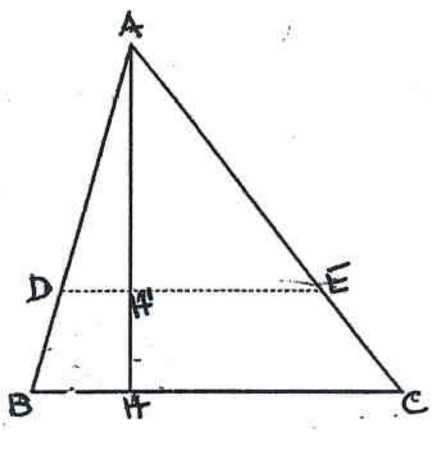
   <u>Obs.:</u> $\mathbb{Z}_p$ é chamado de conjunto dos inteiros módulo p.

PARTE III: GEOMETRIA (4 pontos no total)

1. Dado o heptágono regular A, B, C, D, E, F, G inscrito na circunferência de centro O, mostre que os segmentos DI, IH e HG são congruentes ao lado do heptágono, justificando todas as suas afirmações.



2. O segmento $\overline{DE}$, paralelo ao $\overline{BC}$ do triângulo ΔABC da figura o divide em duas regiões com a mesma área. O lado $\overline{BC}$ tem comprimento 10 e a altura $\overline{AH}$ relativa a esse lado mede 7.



Na solução do problema acima, seu aluno afirmou que a medida da altura do triângulo ΔADE deve ser 3,5. Ele está correto? Justifique sua resposta, descrevendo os possíveis passos para se chegar à resposta do problema.

3. Enuncie e demonstre o Teorema de Pitágoras.