Mestrado Profissional em Ensino da Matemática do IMEUSP

Prova de Seleção: 26 de maio de 2012

PARTE I: CÁLCULO

1) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x^3 + x^2$ e seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1. Calcule a área da região do plano limitada pelo gráfico de f e pela reta r.

2) Para $j = 1, 2, 3$, sejam $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < b_3$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável até 3ª ordem e tal que:

- $f'(x) > 0$ nos intervalos $]-\infty, a_1[$ e $]a_2, a_3[$;
- $f'(x) < 0$ nos intervalos $]a_1, a_2[$ e $]a_3, +\infty[$;
- $f''(x) > 0$ nos intervalos $]b_1, b_2[$ e $]b_3, +\infty[$;
- $f''(x) < 0$ nos intervalos $]-\infty, b_1[$ e $]b_2, b_3[$;
- $f(a_1) = 3$, $f(a_2) = -1$ e $f(a_3) = 2$;
- $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$.

a) Esboce o gráfico de f.

b) Determine mínimos e máximos locais e globais de f.

c) Discuta o número de soluções da equação $f(x) = 0$ em função de k.

3) Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa. **Justifique**:

a) Se f é descontínua em p, então $|f|$ também é descontínua em p.

b) A função $f(x) = |x^2 + 2x + 3|$ é derivável em $\mathbb{R}$.

c) Se x for irracional, então $\sqrt[3]{x+8}$ será irracional.

4) Encontre o ponto da curva $y = 2/x$, com $x > 0$, que está mais próximo da origem.

PARTE II: ÁLGEBRA:

5) Seja $b \in \mathbb{Z}$. Mostre que $5 \,|\, b$ (5 divide b) se, e somente se, a soma dos algarismos de b representados na base 6 for múltiplo de 5.

6) Prove que $7 \,|\, (2^{3n} - 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, utilizando o *princípio da indução finita* ou resultados válidos para *congruências módulo* 7.

7) Seja "+" a operação de adição em $\mathbb{N}$, com suas propriedades usuais. A partir disso, definimos a relação $\sim$ no conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por

$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow m + n' = m' + n.$$

a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) Descreva a classe do par $(0, 0)$ pela relação $\sim$.

c) Mostre que se $(m_1, n_1) \sim (m_3, n_3)$ e $(m_2, n_2) \sim (m_4, n_4)$, então $(m_1 + m_2, n_1 + n_2) \sim (m_3 + m_4, n_3 + n_4)$, para todos $m_i, n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 4$.

d) Denotemos a classe do par (a, b) por $\overline{(a, b)}$. O item c) garante que podemos definir uma adição "$\oplus$" entre $\sim$-classes de equivalência por $\overline{(m_1, n_1)} \oplus \overline{(m_2, n_2)} = \overline{(m_1 + m_2, n_1 + n_2)}$. Com essa definição de adição $\oplus$, mostre que $\overline{(0, 0)}$ é seu elemento neutro e que a classe $\overline{(n, m)}$ é a oposta da classe $\overline{(m, n)}$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

PARTE IV: GEOMETRIA

Lembramos que os enunciados abaixo são alguns dos postulados da geometria euclideana plana:

P1 Dados dois pontos distintos A e B, existe uma única reta r_{AB}, à qual esses dois pontos pertencem.

P2 Para cada reta r, existe um bijeção f_r entre seus pontos e os números reais. Dizemos que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, se $|f_{r_{AB}}(B) - f_{r_{AB}}(A)| = |f_{r_{CD}}(D) - f_{r_{CD}}(C)|$. Denotaremos o tamanho do segmento $\overline{AB}$ por AB.

P3 **(Separação do Plano)** Cada reta r divide o plano em dois conjuntos convexos e disjuntos H_1 e H_2, tais que se $A \in H_1$ e $B \in H_2$, então existe um ponto comum à reta r e ao segmento $\overline{AB}$.

P4 Existe uma função m que associa a cada ângulo $\angle AOB$ um número real $m(\angle AOB) \in]0, 180[$, tal que se C for um ponto interior de $\angle AOB$ então $m(\angle AOB) = m(\angle AOC) + m(\angle COB)$.

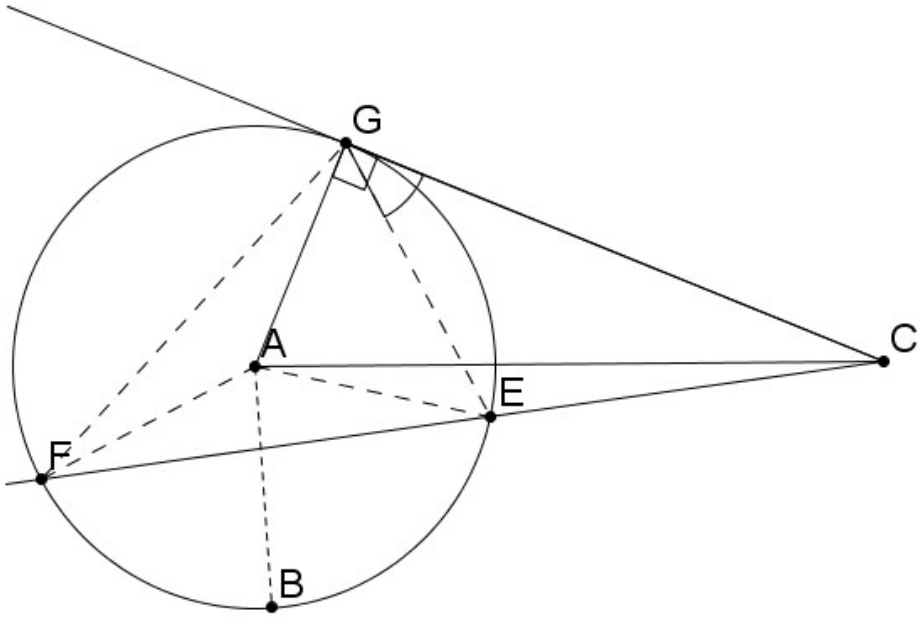
P5 **(LAL)** Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $m(\angle BAC) = m(\angle EDF)$, então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

P6 **(Postulado das Paralelas)** Dada uma reta r e um ponto P fora dela, existe uma única reta s contendo P e disjunta de r.

8) São dados a circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$ e o ponto C no exterior dessa circunferência. Sejam E, F, G na circunferência, tais que r_{CG} seja tangente a ela, e C esteja na reta r_{EF}, com E entre F e C.

a) Mostre que $m(\angle CFG) = m(\angle CGE)$.

b) Mostre que $CG^2 = CE \cdot CF$.



9) Se trocarmos o postulado **P6** (das paralelas) pelo enunciado **P'6** (*dada uma reta r e um ponto P fora dela, existem pelo menos duas retas distintas s_1 e s_2 contendo P e disjuntas de r*), e podendo usar os demais postulados, mostre que existe também um terceira reta s_3 distinta de s_1 e de s_2, contendo P e disjunta de r.