ANAIS

7º ENCONTRO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA - 2021

Organizadores: **CHRISTINA BRECH**
DAVID PIRES DIAS

O Encontro promove as atividades e produções do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Universidade de São Paulo - USP
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Christina Brech
David Pires Dias

Organizadores

ANAIS

7º Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

São Paulo, SP, Brasil, 19 e 21 de outubro de 2021

São Paulo
IME-USP
2021

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Reitor
Prof. Dr Vahan Agopyan

Vice-reitor
Prof. Dr. Antonio Carlos Hernandes

Diretor do Instituto de Matemática e Estatística
Prof. Dr. Junior Barrera

Organizadores
Profa. Dra. Christina Brech
Prof. Dr. David Pires Dias

Diagramação, normalização e capa
Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra

E56 Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (7. : 2021 : São Paulo, Brasil).
Anais [do] 7º Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, São Paulo, SP, Brasil, 19 e 21 de outubro de 2021 [recurso eletrônico]. / organizadores Christina Brech, David Pires Dias. -- São Paulo : IME-USP, 2021.

ISBN: 978-65-994252-1-9 (e-book)
Modo de acesso: <https://www.ime.usp.br/posempmat/encontros>

1. Matemática – Estudo e Ensino (Congressos). I. Brech, Christina, org. II. Dias, David Pires, org. III. Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo.

CDD: 510.7

Catalogação na Fonte pelo Serviço de Informação e Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra.
Elaborada pela bibliotecária Maria Lucia Ribeiro – CRB 8/2766.

Qualquer parte desta publicação pode ser reproduzida, desde que citada a fonte.
Proibido qualquer uso para fins comerciais.

Sumário

APRESENTAÇÃO 3

CRONOGRAMA DE ATIVIDADES 4

Trabalhos Apresentados

ÁREA E PERÍMETRO 6

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL APRESENTADOS USANDO UM JOGO DE BÚZIOS 24

AS PRÁTICAS PEDAGÓGICAS EM GEOMETRIA 35

UM ESTUDO COMPARATIVO SOBRE AS ATUAIS PROPOSTAS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO BRASILEIRO E DA EDUCACIÓN SECUNDARIA ARGENTINA 52

INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS: CONVITE PARA O ENSINO DE GEOMETRIA 86

ENSINO DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM COM VÁRIAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS 109

UMA ABORDAGEM DE ENSINO DE MATEMÁTICA POR MEIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA MECÂNICA 131

NÚMEROS REAIS: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA O ENSINO FUNDAMENTAL 140

RACIOCÍNIO CORRELACIONAL 161

PENSAMENTO E LINGUAGEM ALGÉBRICOS 178

Apresentação

O Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (MPEM) do IME-USP iniciou suas atividades em agosto de 2012. Seu objetivo é contribuir para o ensino de matemática na educação básica, complementando a formação de professoras e professores.

O 6º Encontro do MPEM foi realizado em setembro de 2019 e contou com a participação de estudantes e orientadores. O encontro proporcionou uma reflexão sobre as atividades e a produção acadêmica desenvolvidas no programa. Devido à pandemia, em 2020 não houve a realização do evento.

Para esta 7ª edição do encontro, realizada de forma remota nos dias 19 e 21 de outubro de 2021, recebemos onze inscrições, de estudantes em fase adiantada no trabalho de dissertação, e após uma desistência, organizamos as apresentações em comunicações orais de 20 minutos cada, incluindo o tempo de comentários e discussão. O ambiente participativo de todas as pessoas presentes contribuiu para que aquelas e aqueles que apresentaram seus trabalhos recebessem inúmeras sugestões para a continuidade de sua pesquisa. Também, para as e os estudantes presentes que não apresentaram trabalho, foi uma oportunidade para buscar temas e ideias para o desenvolvimento de suas dissertações.

O encontro teve como palestra de abertura "História da Matemática em tempos de negacionismo" proferida pela Profa. Tatiana Roque, professora titular da UFRJ, e foi encerrado com uma plenária, de estudantes e orientadores, discutindo diversos aspectos do programa. Entre os assuntos tratados tivemos: avaliação do programa, esclarecimentos sobre questões regimentais, disciplinas oferecidas, oferta de disciplinas no verão, etc.

Nos anais trazemos os trabalhos apresentados, todos em forma de texto, assim como foram entregues pelos autores.

Agradecemos a contribuição de todas as pessoas.

Christina Brech e David Pires Dias

Cronograma de Atividades

Terça-feira (19/out)

14h00 Abertura

14h10 Palestra

História da matemática em tempos de negacionismo - Tatiana Roque

15h30 Apresentações – Parte I

Fernando Siqueira Vieira Lima *(Vera Helena Giusti de Souza)*
Título: "Área e perímetro: Concepções de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental"

Regina Mariko Nakano *(Viviana Giampaoli)*
Título: "Conceitos básicos de probabilidade e estatística no ensino fundamental apresentados usando um jogo de búzios"

Francisco Lucas Nascimento de Souza *(Bárbara Corominas Valério)*
Título: "As práticas pedagógicas em Geometria: reflexões de futuros professores de Matemática"

16h30 Intervalo - Café (virtual, cada qual com sua caneca)

17h00 Apresentações – Parte II

Ricardo Angelo Monteiro Canale *(Viviana Giampaoli)*
Título: "Um estudo comparativo sobre as atuais propostas curriculares nacionais de Matemática do Ensino Médio brasileiro e da *Educación Secundaria* argentina"

Beatriz Lopes Roldão *(Claudia Cueva Candido)*
Título: "Investigações Matemáticas: Convite para o Ensino de Geometria"

Rodrigo Martins Lopes *(Vera Helena Giusti de Souza)*
Título: "Sequências e séries geométricas no Ensino Médio - uma abordagem com várias representações semióticas."

Quinta-feira (21/out)

14h00 Apresentações – Parte III

Valter Firmino da Silva Junior *(Bárbara Corominas Valério)*
Título: " Uma abordagem de ensino de matemática por meio de resolução de problemas de engenharia mecânica"

Érika Dudr Pereira *(Vera Helena Giusti de Souza)*
Título: "Números Reais: uma proposta de abordagem para o Ensino Fundamental"

Thiago Dutra de Araújo *(Viviana Giampaoli)*
Título: "O raciocínio correlacional: uma proposta de desenvolvimento a partir do ensino-aprendizagem de modelos de regressão linear no Ensino Médio"

Vinicius Henrique Sbaiz *(Iole de Freitas Druck)*
Título: "Pensamento e Linguagem Algébricos: um olhar sobre a produção de significados matemáticos e didáticos nos anos finais do Ensino Fundamental I"

15h30 Reuniões Paralelas
Estudantes
Professores

16h30 Intervalo - Café (virtual, cada qual com sua caneca)

17h00 Reunião Geral
Informações Gerais
Relatos das reuniões paralelas
Avaliação do programa, sugestões e críticas

Trabalhos Apresentados

ÁREA E PERÍMETRO
Concepções de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental

AREA AND PERIMETER
Elementary School students' conceptions

Fernando Siqueira Vieira Lima [1], Vera Helena Giusti de Souza [2]

[1] Aluno do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática IME-USP; fsvlima@ime.usp.br.
[2] Professora do Departamento de Matemática do IME-USP. Profª Dra. em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, licenciada e Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo; vhgiusti@usp.br.

Resumo: Neste trabalho, apresenta-se parte das conclusões obtidas em pesquisa do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IMEUSP, que tem por objetivo investigar concepções relacionadas às ideias de área e de perímetro de figuras planas, de alguns alunos brasileiros do Ensino Fundamental – Anos Finais. Pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem desses conceitos geométricos mostram que estudantes apresentam equívocos relacionados a essas ideias, como por exemplo confundir uma grandeza com sua medida ou achar que se a área de uma figura plana aumenta, então o perímetro também aumenta. Elaborou-se um conjunto de atividades com base nas ideias de Tall e, por conta da pandemia, entrevistou-se três estudantes de 9º ano do EF, à distância, que mostraram dificuldade em diferenciar curvas abertas de fechadas, entender uma curva fechada como um objeto unidimensional, trabalhar com comparações entre curvas e superfícies sem uso de uma unidade de medida. Também foram analisadas as Definições de Conceito de área e de perímetro e o conjunto de imagens evocadas pelos participantes.

Palavras-chave: Área. Perímetro. Imagem de Conceito. Definição de Conceito. Matemática. Ensino. Didática.

Abstract: In this paper it is presented part of conclusions obtained in a research that aims to investigate some Brazilian Elementary School students conceptions about flat figures area and perimeter. Researches in Mathematics Education show that students have misconceptions about those ideas, as confounding measure with magnitude or believing that perimeter and area are directly proportional. It has been designed a set of questions, based on Tall´s ideas and, as pandemic time passes by, it has been organised online interviews with three Brazilian Elementary School students (14-15 years old). Protocols and audio records analysis show difficulties in many aspects, such differentiating an open curve from a closed one; understanding a closed curve as a one-dimensional object that not includes its interior; working with curves and surfaces without using a unit of measure. Participants area and perimeter Concept Definitions and evoked imagery were also analysed in order to suggest different approaches to this subject.

Keywords: Area. Perimeter. Image Concept. Definition of Concept. Mathematics. Teaching. Didactics.

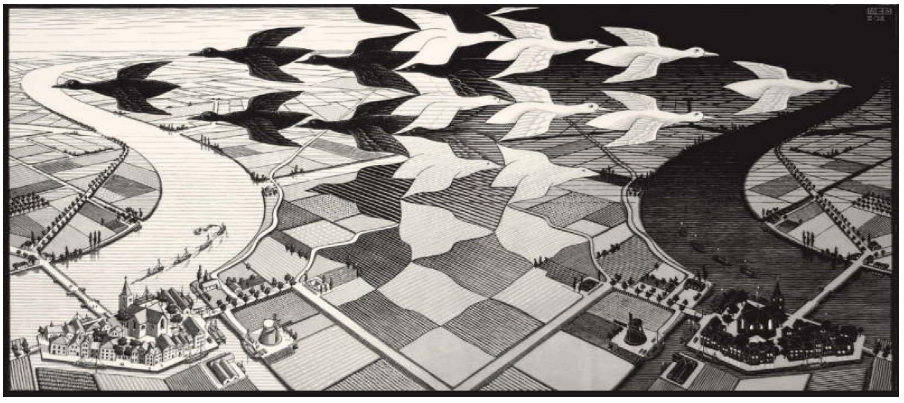
1 INTRODUÇÃO

Segundo Eves (2004), os egípcios, há 1000 a.C, sabiam calcular o perímetro e a área de alguns terrenos à margem do rio Nilo. Ainda segundo o autor, os papiros de Golenishev e Rhind, de 1850 a 1650 a.C aproximadamente, mostram a Geometria utilizada na época e neles é possível identificar 26 exercícios, com suas soluções, a maioria deles com problemas de mensuração, como a área de terrenos.

É possível perceber que a matemática primitiva, com base nos registros do Oriente Antigo, era utilizada em problemas práticos de mensuração. Ainda segundo o autor, neste mesmo período, o Homem começou a estudar a "Matemática" da época de forma mais abstrata, isto é, passamos a estudar a ciência por si mesma.

Seja na Babilônia, Egito, Grécia antiga ou em qualquer outro lugar do planeta, o Homem esteve e está cercado pela natureza e suas formas e estas podem ser expressas por modelos geométricos. Tais modelos passam a inspirar o Homem e este passa a utilizar elementos geométricos para produzir monumentos, artesanatos, obras de arte em geral (ver Figuras 1 e 2), jogos, pavimentações, entre outros.

Figura 1 – "Giorno e Notte" (1938) do artista Maurits Cornelis Escher



Fonte: *site* Floornature, Architecture & Surfaces [1]

[1] Disponível em: <https://www.floornature.com/escher-exhibition-in-treviso-11492/#gallery_link>. Acesso em 26 set. 2021.

Figura 2 – “Composição” (1953) da artista Lygia Clark

Fonte: Flickr do Diário do Comércio [2]

Além da arte, elementos da geometria, como área e perímetro, estão ligados a diversas situações em nosso dia a dia. Um exemplo curioso é o mapa do Estado de Goiás, que cerca completamente o Distrito Federal, que por sua vez, não faz parte do Estado de Goiás. Em um site especializado no turismo de Goiás, podemos observar o seguinte mapa, ver Figura 3.

Figura 3 – Mapa Turístico do Estado de Goiás

Fonte:site do Grupo Evidence de Comunicação [3]

[2] Disponível em: <https://www.flickr.com/photos/66742871@N05/7896972512/in/album-72157631328080912/>. Acesso em 26 set. 2021.
[3] Disponível em: <https://evidencenoticias.com.br/o-ministerio-do-turismo-divulga-o-novo-mapa-do-turismo-brasileiro/>. Acesso em 26 set. 2021.

No mapa, ver Figura 3, podemos notar as diferentes cores representando as diversas regiões do Estado de Goiás, e uma região sem cor, representando o Distrito Federal, que não pertence a Goiás.

O presente trabalho apresenta alguns dos resultados que foram obtidos com a aplicação de um conjunto de atividades que teve como objetivo investigar concepções dos participantes em relação aos conceitos de área e de perímetro, ambos trabalhados como grandezas.

Esse conjunto de atividades foi planejado para ser aplicado de forma presencial, no entanto, passou por algumas adaptações para que pudesse ser realizado de maneira remota no segundo semestre de 2020. A necessidade de fazermos tais adaptações se deve pelo fato da pandemia de Covid-19. Devido à dificuldade em entrevistar alunos da rede pública de ensino nesse período, as entrevistas foram feitas com alunos da rede privada de ensino, todos da mesma instituição de ensino, ao todo foram entrevistados 3 alunos, dois cursavam o 7º ano e um o 9º ano em 2020. Cada estudante participou de 2 entrevistas, entre a primeira e a segunda entrevista, houve um espaço de uma semana.

Destacamos que trabalhos como os de Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996), Facco (2003), D'Amore e Fandiño (2006), Melo (2009), Ferreira (2010) inspiraram o desenvolvimento do conjunto de atividades por nos elaborado. Além desses estudos, procuramos seguir as recomendações da Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental (BNCC, 2018) e não podemos deixar de citar a troca de ideias, críticas e sugestões recebidas pelas participações em congressos como EBRAPEM (Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2018) e ENEM (Encontro Nacional em Educação Matemática, ANO 2019), os Seminários e os Encontros do MPEM (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME USP, 2018 e 2019) e experiências vivenciadas em alguns testes que realizamos com alunos regularmente matriculados nos anos finais do Ensino Fundamental II e anos iniciais do Ensino Médio de duas escolas públicas da capital de São Paulo.

2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

A Geometria, com o passar dos tempos, foi sendo cada vez mais utilizada e atualmente se apresenta fortemente ligada a outras áreas do conhecimento, como Engenharia,

Arquitetura, Química, Geografia, Física e pode ser encontrada nos versos da canção “Aquarela” do compositor Toquinho “(...) E com cinco ou seis retas é fácil fazer um castelo (...)”. O estudo de Geometria possibilita um melhor entendimento de características e propriedades de objetos e de ideias geométricas subjacentes.

A importância do estudo da Geometria é destacada em documentos nacionais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais PNC (BRASIL, 1997) do Ensino Fundamental e recentemente pela Base Comum Curricular BNCC (BRASIL, 2018), homologada no final de 2017.

Em relação ao ensino e à aprendizagem de área e de perímetro de figuras planas, trabalhado ao longo do Ensino Fundamental, estes tem apresentado dificuldades vivenciadas por professores e educadores de Matemática, como mostram pesquisas feitas por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996), Facco (2006), D’Amore e Fandiño (2007), Ferreira (2010) e Melo (2009), motivando assim a busca por abordagens e instrumentos inovadores, na tentativa de viabilizar e tornar mais eficientes os processos de ensino e de aprendizagem.

Tal preocupação com o ensino e a aprendizagem de área de perímetro na Escola Básica encontra força na Brasil (2018), que indica que um aluno do 5º ano do Ensino Fundamental I, deve “Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes”. (Brasil, 2018, p. 297).

De acordo com Douady e Perrin-Glorian (1989, apud FACCO, 2006, p. 28), o estudo de área e de superfície passa por três pólos, o geométrico, em que as superfícies são consideradas como partes do plano; o pólo "grandeza", que se refere às áreas; e o pólo numérico, que se relaciona às medidas.

Ainda de acordo com as autoras, citada por Ferreira (2010, p. 26), a construção do conceito de área como grandeza passa por:

- diferenciar a área de uma figura plana de sua forma, considerando que figuras planas com formas diferentes podem ter mesma área.
- diferenciar a área de uma figura plana do número, uma vez que a uma mesma figura plana, pode-se associar diferentes unidades de medida.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 Imagem de Conceito e Definição de Conceito

De acordo com Tall e Vinner (1981), de forma empírica, indivíduos ao serem apresentados a um determinado conceito, constroem imagens mentais que não são necessariamente coerentes e consistentes. Indo além, essas imagens sofrem influência de experiências vivenciadas, uma vez que tais conceitos podem ser revisitados em novos contextos, como por exemplo a imagem de conceito de número racional.

Ainda segundo os autores, a *imagem de conceito* está relacionada à estrutura cognitiva do indivíduo que, no caso da Matemática, é acessada pela diversidade de ideias e experiências acumuladas desse indivíduo e que estão associadas ao conceito. A imagem de conceito é constituída por todas as imagens mentais, representações visuais, verbalizações e impressões associadas ao conceito. Quanto maior for a qualidade de ideias ligadas a esse conceito, mais favorável será a formação da imagem de conceito.

Segundo Cornu (1981, apud TALL, 1988, p.1) "Dentro da atividade matemática, as noções matemáticas não são usadas apenas de acordo com sua definição formal, mas também por meio de representações mentais que podem diferir para diferentes pessoas[4]" (TALL, 1988, p.2, tradução nossa). O autor ainda revela que é possível um indivíduo utilizar corretamente definições formais, inclusive aplicar corretamente fórmulas matemáticas, porém ao mesmo tempo, pode desenvolver conflitos entre imagens de conceito diferentes.

De acordo com Tall e Vinner (1981), a *definição de conceito* é o texto escrito em palavras pelo qual um indivíduo "define" um conceito. Esta definição pode ou não ser coerente com a definição formal, aceita pela comunidade matemática.

Ainda segundo o autor, a compreensão de um conceito está ligada à formação de uma imagem de conceito associada ao objeto de conhecimento. Quando se apresenta um conceito matemático por meio de uma definição formal, é esperado que o aprendiz construa imagens conceituais associadas a essa definição.

A partir dos trabalhos apresentados anteriormente, que retratam dificuldades encontradas por professores e educadores no ensino e na aprendizagem dos conceitos de área

[4] Within mathematical activity, mathematical notions are not only used according to their formal definition, but also through mental representations which may differ for different people.

e de perímetro, e colocados nossos objetivos, escolhemos como referencial teórico as ideias de Parzysz (2006) e de Tall e Vinner (1981) para responder nossas duas questões de pesquisa.

- As imagens individuais dos participantes são suficientes para que não confundam área e perímetro de figuras planas?
- Os participantes articulam uma geometria de observação e uma geometria proto-axiomática?

3.2 A Geometria Paradigmática de Bernard Parzysz

Com base em estudos de Van Hiele (1984), Houdement & Kuzniak (1998) e Henry (1999), Parzysz (2006) afirma que a Geometria ensinada na Escola Primária à Universidade, deveria evoluir de uma geometria de observação para uma geometria de demonstração. De acordo com o autor, uma geometria de observação é caracterizada pela forma com que os objetos são percebidos, considerando formas, cores, tamanhos entre outras características ou propriedades. Na geometria de demonstração, os objetos são abstratos e a existência desses é garantida pelo modelo de geometria em questão, diferente do modelo Euclideano. Dessa forma, Parzysz defende que as práticas nas séries inicias deveriam começar com uma modelagem do espaço físico e, ao longo dos anos de escolaridade, desenvolver o estudo de objetos abstratos, esse é o nível alcançado nas Universidades. De acordo com o autor, essa evolução pode ser "dividida" em quatro paradigmas, G0, G1, G2 e G3.

O quadro teórico proposto por Parzysz com os quatro paradigmas pode ser visualizado no Quadro 1.

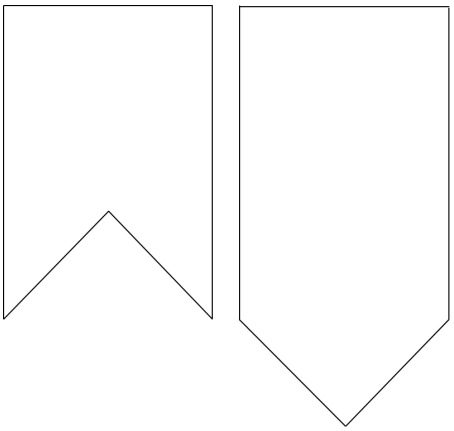
Quadro 1 - Quadro teórico proposto por Parzysz

Geometrias não axiomáticas			Geometrias axiomáticas	
Tipo de geometria	Concreta (G0)	Espaço-gráfico (G1)	Proto-axiomática (G2)	Axiomática (G3)
Objetos	Físicos		Teóricos	
Validações	perceptivo-dedutivas		hipotético-dedutivas	

Fonte: PARZYSZ, 2006, p. 130.

Ao compararmos o pentágono da esquerda com o pentágono da direita, ver Figura 4, o que o leitor pode afirmar quanto à área e ao perímetro?

Figura 4 – Comparação entre os perímetros dos pentágonos



Fonte: Acervo Pessoal

O leitor que recortou cada um dos pentágonos e os sobrepôs, pode concluir que os perímetros são os mesmos e as áreas são diferentes, ou de forma mais precisa, o pentágono da direita possui área maior. Esse é um exemplo de solução em G0.

O leitor que mediu o contorno de cada um dos pentágonos, também pode concluir que os pentágonos possuem mesmo perímetro. E para comparar as áreas, pode-se decompor o pentágono da direita em um retângulo e um triângulo e assim concluir que a área do pentágono da direita é maior que o da esquerda.

Quanto ao leitor que calculou todas as medidas e fez uso das fórmulas para cálculo de área e de perímetro de polígonos, esse também concluí que os perímetros são os mesmos e a área do pentágono da direita é maior que o da esquerda. E assim tem-se um exemplo de solução em G2.

4 METODOLOGIA

Um dos objetivos de nosso projeto foi analisar qual a imagem de conceito evocada pelos participantes (entrevistados) em relação à área e ao perímetro de figuras planas, bem como quais concepções carregam a respeito desses conceitos. Aplicamos um conjunto de atividades com o objetivo de verificar se os participantes transitam bem entre uma geometria

de observação e uma geometria proto-axiomática. Para isso, seguimos os preceitos da entrevista reflexiva.

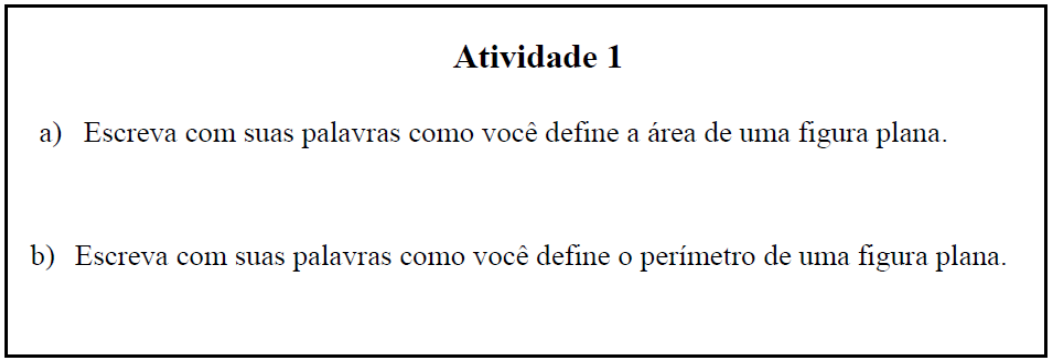
Por meio da entrevista reflexiva, há a possibilidade de construção de conhecimento, à medida que a interação entre participante (entrevistado) e entrevistador avança, o conhecimento vai ser organizando junto com uma reflexão. (SZYMANSKI, 2011, p.10). Assim, à medida que cada item da atividade ia sendo respondido pelo participante, um novo item não iniciava antes de uma discussão sobre a resposta apresentada.

5 APLICAÇÃO DE ALGUNS ITENS DA ATIVIDADE I

A seguir, apresentamos alguns do resultados observados após a aplicação da Atividade 1, a partir das respostas obtidas dos 3 participantes da entrevista. Denominaremos estes participantes por P1, P2 e P3, sendo que, em 2020, P1 cursou o 9º ano, P2 e P3 cursaram o 7º, todos do Ensino Fundamental II.

O objetivo com as atividades **(a)** e **(b)**, ver Figura 4, é trazer à luz as respectivas *definições de conceito* dos participantes, referente aos conceitos de área e de perímetro de uma figura plana.

Figura 4 – Itens (a) e (b) da Atividade 1



Fonte: Acervo Pessoal

Quanto às respostas obtidas do item **(a)**, tivemos as seguintes verbalizações:

P1: “A área de uma figura plana é calculada de acordo com a quantidade de lados que ela possui. A área também pode ser considerada a parte interna da figura. Existem diferentes fórmulas para calcular a área das diferentes figuras”

P2: “Essa figura tem alguma especificação ou é qualquer uma?”. O entrevistador responde, “é sobre uma figura qualquer”. P2 diz, “Mas por exemplo, eu não lembro como define a área de um triângulo e do trapézio, lembro só do quadrado e do retângulo que eu creio que sejam os mais fáceis... Vou falar do quadrado e do retângulo que são os únicos que eu sei calcular a área”. Na folha de respostas P2 escreve: “No caso de um quadrado ou retângulo multiplicamos um lado vezes o outro lado (no retângulo altura vezes a largura)”.

P3: “Seria o todo de uma figura, ou seja, a área seria formada pelos lados da figura como um quadrado”.

Já as verbalizações obtidas do item **(b)**, foram:

P1: “Então primeiramente o mais óbvio, perímetro é a soma de todos os lados”

P2: “Somamos a medida de todos os seus lados”

P3: “O perímetro de uma figura plana seria a soma de todos os seus lados”

Com base nas respostas obtidas nos itens **(a)** e **(b)**, destacamos que tanto P1 como P2 apresentam uma definição apoiada pelo número de lados dos polígonos (regulares e convexos), semelhante à forma como esses conceitos são apresentados em materiais didáticos. P3 tenta definir área de uma forma mais geral, porém fica limitado à área do quadrado. Todos os participantes apresentaram concepções geométricas (ligadas à forma) e numéricas (ligadas à medida) e, em geral, de maneira não muita clara. Nenhum tipo de concepção ligada à grandeza foi mencionada.

No item **(g)** da Atividade 1, o participante recebe uma folha de papel A3, que representa uma região limitada do plano e pares de colares de barbante, que representam curvas fechadas, ver Figura 5. Espera-se que o participante disponha os barbantes de 2 maneiras diferentes e caso um colar não seja colocado na região interna do outro colar, esta situação será estimulada pelo entrevistador. O objetivo é que durante a entrevista reflexiva, seja discutida as ideias de regiões limitadas no plano, utilizando uma terminologia correta.

Figura 5 – Item (g) da Atividade 1

g) Você recebeu uma folha de papel que representa uma região limitada plana e alguns colares de barbante que representam curvas fechadas. Escolha dois desses colares e use-os sobre a folha, à vontade. Crie duas situações que você considera diferentes. Justifique.

Fonte: Acervo Pessoal

Durante a entrevista, todos os participantes precisaram ser estimulados a formar uma situação em que uma curva, representada pelo colar de barbante, ficasse completamente no interior de outra curva, representada por outro colar de barbante. P1 e P3 não compreenderam a figura formada e disseram que essa situação seria inviável pois as áreas estariam sobrepostas. Quanto perguntados, disseram que ao se depararem com uma curva fechada (objeto unidimensional), sempre completam o interior dessa curva, formando assim uma figura bidimensional.

O item **(j)** faz parte do conjunto de atividades aplicado no primeiro dia de entrevista, ver Figura 6, nele o participante trabalha os conceitos de região interna e de fronteira, sob os paradigmas G0-G1. Neste item, o participante manipula o mapa estilizado do Estado de Goiás que cerca totalmente o Distrito Federal, importante região brasileira que possui destaque em livros de História, Geografia, Atlas, na grande mídia e nas discussões políticas. O objetivo é convidar o participante a destacar a fronteira utilizando barbante e as regiões internas e externas com canetas coloridas e assim fazer com que o participante possa refletir sobre a região do Estado de Goiás, desconsiderando para isso a região pertencente ao Distrito Federal. Essa representação utilizando mapas estilizados, são representados por uma figura com "buraco", objeto geométrico de interesse de nosso estudo. Nesta atividade, uma nota é apresentada ao participante da atividade para lembrar de que o Distrito Federal não pertence ao Estado de Goiás.

Figura 6 – Item (j) da Atividade 1

Fonte: Acervo Pessoal

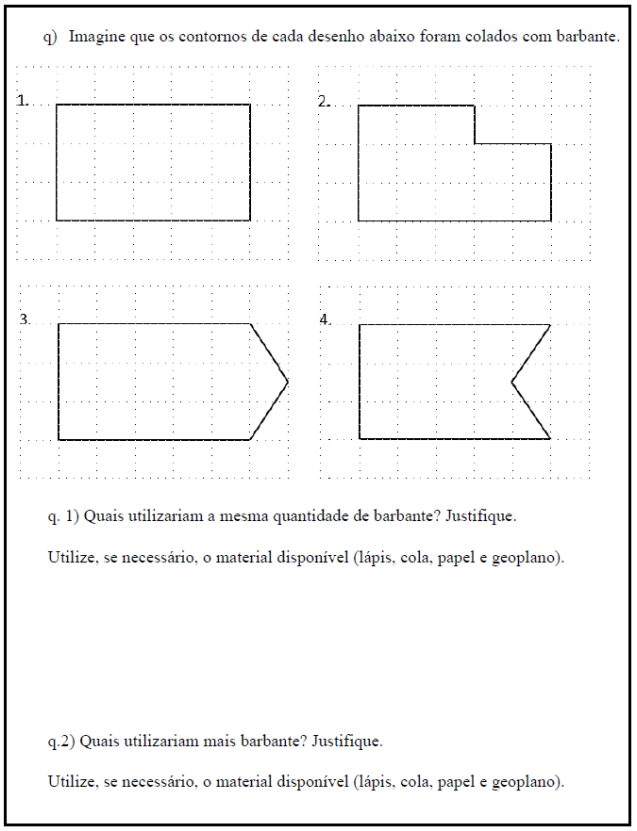
Neste item, P2 e P3 tiveram dificuldade em destacar a fronteira do Estado de Goiás, mesmo marcando o Distrito Federal como uma região exterior ao Estado de Goiás, isto é, os participantes colaram o barbante sobre a fronteira que o Estado de Goiás faz com os outros Estados, porém tiveram dificuldade em colar o barbante na fronteira entre o Estado de Goiás e o Distrito Federal. Todos os três participantes começaram a denominar a fronteira do Distrito Federal por "fronteira interna". No caso em que consideramos apenas a região interna do Estado de Goiás, P2 denominou a região do Distrito Federal por "região externa que está no interior do Estado de Goiás". Apesar das discussões sobre a coerência desses termos, P2 e P3 continuaram usando esses termos até parte da Atividade 2.

No item **(q)**, ver Figura 7, os participantes receberam uma folha de papel tamanho A4, nela estão impressos quatro polígonos, numerados de 1 a 4, cada um sob uma malha quadrada, as malhas são idênticas. Esses polígonos obedecem as seguintes relações, entre outras:

- Os polígonos 1 e 2 possuem mesmo perímetro e a área do polígono 1 é visivelmente maior do que a área do polígono 2.

- Os polígonos 3 e 4 possuem mesmo perímetro com a área do polígono 3 sendo visivelmente maior do que a área do polígono 4.

Figura 7 – Item (q) da Atividade 1



Fonte: Acervo Pessoal

O objetivo dessa atividade é convidar o participante a refletir, diante dos quatro desenhos, sobre quais possuem a mesma quantidade de barbante gasto para marcar sua fronteira, caso as fronteiras fossem demarcadas por barbante. E também destacar quais dos polígonos precisariam de uma quantidade maior de barbante gasto para demarcar sua fronteira, caso essa demarcação fosse realizada. Para auxiliar a resposta desses questionamentos, o participante poderia utilizar livremente Geoplano, lápis, compasso, cola e papel.

Embora a região interna das figuras não estejam sendo trabalhadas de forma explicita, acreditamos que o fato das figuras possuirem áreas visivelmente diferentes contribua para a dissociação entre área e perímetro.

Em relação ao item **(q)**, P1, P2 e P3 apresentam dificuldade para resolvê-lo, relatando que o fato de terem que fazer comparações entre figuras, sem uso de medida, deixou a atividade difícil. Um ponto comum entre os participantes foi conseguir concluir que a figura 1 e a figura 2 possuem mesmo perímetro e que a figura 3 e a figura 4 também possuem mesmo perímetro. A maior dificuldade ficou em comparar o perímetro da figura 1 com o da figura 3. P2 utilizou uma tira de barbante e concluiu que os perímetros eram os mesmos, concluindo que todas as figuras possuíam mesmo perímetro. P1 ao ser estimulado sobre as condições de existência de um triângulo, utiliza a desigualdade triangular para afirmar que o perímetro da figura 3 é maior que o perímetro da figura 1. Durante algumas tentativas de P1 de verificar qual figura possuía o maior perímetro, ideias como "se eu cortar a área na metade, terei metade do perímetro". P3 no início da atividade afirma que a figura 1 tem perímetro maior que a figura 2, em seguida diz que estava pensando em área e não no contorno, e a partir daí, consegue comparar o contorno da figura 1 com o da figura 2. Na comparação entre a figura 1 e a figura 3, P3 concluí que os perímetros são os mesmos pois se "quebrássemos um dos lados do retângulo ao meio, teríamos a figura 2".

Todos os participantes se impressionam ao verificar que era possível resolver corretamente a atividade, sem auxílio de medida.

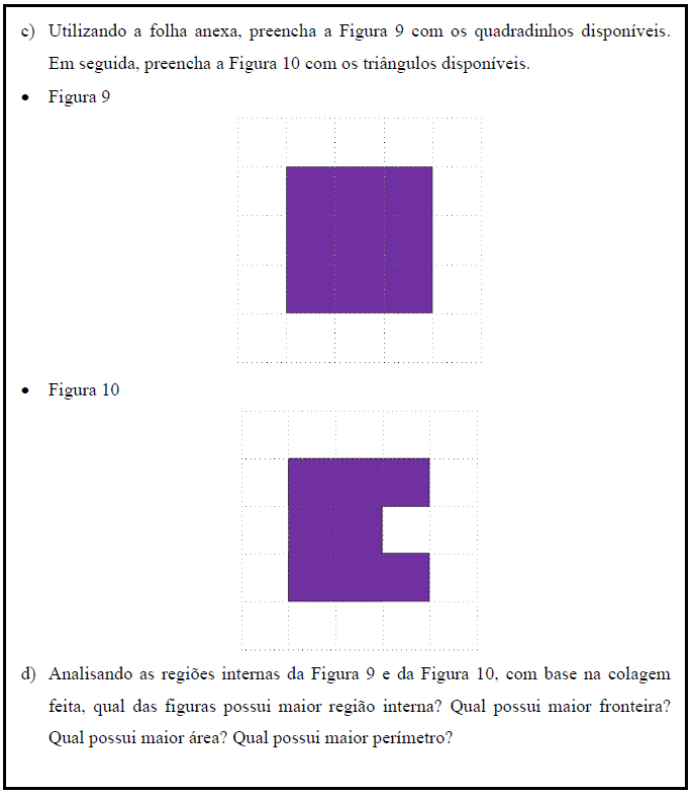
Ainda em relação ao item **(q)**, torna-se preocupante o fato de os participantes não conseguirem fazer comparações, mesmo com auxílio de materiais concretos, incluindo, por exemplo, o compasso. A dependência de medida para resolver a atividade justifica nossa preocupação em trabalhar mais os conceitos de área e de perímetro como grandezas.

6 APLICAÇÃO DE ALGUNS ITENS DA ATIVIDADE

Com os itens **(c)** e **(d)** da Atividade 2, ver Figura 8, o participante foi convidado a pavimentar a figura 9 utilizando, para isso, quadrados "congruentes" e para pavimentar a figura 10, triângulos isósceles "congruentes" , tanto os quadrados como os triângulos forma feitos com papel Canson. O objetivo destes dois itens é proporcionar ao participante a experiência de manipular duas figuras planas cuja área de uma (figura 10) é visivelmente menor do que a área da outra (figura 9), porém utilizando unidades de medida diferentes e de tal maneira que a figura de maior área (figura 9) possui como medida de área 9 quadrados e a figura de menor área (figura 10), 16 triângulos como medida de área. O que colocamos em

cheque com esse item é o entendimento de área como medida, mostrando que um número real positivo não é suficiente para definir a medida de uma superfície ou seu contorno, valorizando a diferença entre os conceitos de área e de perímetro de uma figura plana. Com isso, enriquecer a imagem de conceito do participante, relacionada à região interna e à fronteira.

Figura 8 – Itens (c) e (d) da Atividade 2



Fonte: Acervo Pessoal

Nos itens **(c)** e **(d)**, apenas P1 verbaliza que entre o conjunto de figuras a de maior área também é a de maior região interna, o mesmo para fronteira e perímetro. P2 e P3 afirmaram não saber calcular a área da figura 10 (por ser não convexa) e a partir da fase de discussão, percebem que a pavimentação que estavam fazendo se relacionava com a área da figura.

7 CONCLUSÃO

Diante das informações coletadas, em relação às *Definições de Conceito* dos participantes, estas se mostraram limitadas a um conjunto restrito de figuras planas poligonais e convexas. As concepções geométricas e sobretudo numéricas foram mencionadas, mas

concepções ligadas à grandeza não foram mencionadas e assim, com base em nosso referencial teórico, consideramos que as imagens individuais de P1, P2 e P3 não são suficientes para que estes não confundam área e perímetro, ou seja, não apresentam uma estrutura cognitiva total suficiente em relação aos conceitos de área e de perímetro.

Destacamos que duas Atividades aplicadas em 2 dias se mostraram insuficientes para mudar concepções que estão "enraizadas" nos participantes, como por exemplo generalizar relações não necessariamente verdadeiras entre área e perímetro ou ¨abrir mão¨ do uso de uma medida em Geometria.

Quanto aos Paradigmas de Parzysz (2006), percebemos que os participantes se mostraram, por vezes, com muita dificuldade em fazer comparações entre as figuras, nenhum deles, por exemplo, utilizou a ideia de sobreposição para comparar a região interna ou a fronteira. Foi possível notar também uma grande necessidade, por parte dos participantes, de trabalhar com medidas para efetuar as atividades, o que pode explicar a dificuldade em efetuar comparações. Algumas concepções ligadas a essa comparação foram sendo construídas ao longo das atividades, porém recomendamos que os estudantes passem por mais experiências em situações que necessitem comparar áreas e perímetros de figuras planas mais gerais, sem auxílio de medida, uma vez que materiais didáticos já trazem diversas situações com medida. Ao final da atividade 2, os participantes, quando solicitado, apresentaram exemplos de duas figuras A e B, de tal forma que a área da figura A era menor do que área da figura B, porém o perímetro da figura B era maior do que o perímetro da figura A (sem uso de medida).

Essa atividade foi aplicada no segundo semestre de 2020 e os resultados corroboram nossa preocupação, e a dos autores aqui citados, com o ensino e a aprendizagem de área e de perímetro na Educação Básica brasileira. Mostram ainda que o trabalho realizado ao longo do período escolar básico obrigatório brasileiro, relacionado aos conceitos de área e de perímetro de figuras planas, não colaborou, de forma eficiente, para o grupo pesquisado, Imagens de Conceito individuais ricas em concepções e com estrutura cognitiva suficiente para um trabalho autônomo em problemas relacionados, o que pode ter impossibilitado uma compreensão melhor do mundo, uma vez que área e perímetro são elementos geométricos que fazem parte do nosso dia a dia, assim como defendemos neste texto.

REFERÊNCIAS

BALTAR, Paula Moreira. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes**: une étude de l'acquisition des relations entre les longuers et les aires au collège. 1996. 241 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Université Joseph Fourier, Grenoble, França, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica**. Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEB, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

D'AMORE, B.; FANDIÑO, M. I. Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. **Relime**, México, v. 10, n. 1, p. 39-68, 2007.

DOUADY, Régine; PERRIN-GLORIAN, Marie Jeanne. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**, v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 1ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FACCO, Sônia Regina. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental**: estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2003. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

FERREIRA, Lúcia de Fátima Durão **Conceito de área:** uma proposta sob a ótica de ensino-aprendizagem. 2010. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

MELO, Mônica Maria do Campelo de. **Efeitos de uma sequência didática na construção do conceito de perímetro**. 2009. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2009.

PARZYSZ, B. La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs de écoles: de quois s'agit-it? **Quaderni di Ricerca in Didattica**, Italia, v. 17, p. 128-151, 2006.

SILVA, Anderson Douglas Pereira Rodrigues. Análise de uma tarefa de comparação de área nos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no apprenti géomètre 2. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

SZYMANSKI, H. **A entrevista na pesquisa em educação**: a prática reflexiva. 1. ed. Brasília: Liber Livro, 2004.

TALL, David; Concept image and concept definition. **Senior Secondary Mathematics Education**, Inglaterra, p. 37-41, jan, 1988.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, New York, n. 12, p. 151-169, may, 1981.

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL APRESENTADOS USANDO UM JOGO DE BÚZIOS

BASIC CONCEPTS OF PROBABILITY AND STATISTICS IN ELEMENTARY SCHOOL PRESENTED USING A BUZIOS GAME

Regina Mariko Nakano [1], Viviana Giampaoli [2]

[1] Estudante do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (IME-USP); regina.nakano@usp.br
[2] Docente orientadora do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (IME-USP); vivig@ime.usp.br

Resumo: Este trabalho consiste no estudo sobre estratégias de ensino de temas de Probabilidade e Estatística a partir de um jogo de búzios praticado nas comunidades quilombolas de Barra do Turvo, São Paulo, sendo que este não é um jogo tradicional de adivinhação. Pretende-se explicitar algumas das possibilidades didáticas deste jogo apresentando como as habilidades previstas na Base Nacional Curricular Comum - BNCC para o ensino fundamental podem ser desenvolvidas a partir dele.

Palavras-chave: Jogo de búzios. Probabilidade e Estatística. Educação Matemática. Saberes quilombolas.

Abstract: This work consists of a study about strategies to teach Probability and Statistics topics considering a buzios game played in quilombola communities in Barra do Turvo, São Paulo, which is not a traditional guessing game. It is intended to explain some of the didactic possibilities of this game showing how the skills in the Common National Curriculum Base - BNCC for elementary school can be developed from it.

Keywords: Buzios game. Probability and Statistics. Mathematics Education. Quilombola knowledge.

1 INTRODUÇÃO

O jogo de búzios consiste num jogo infantil no qual se utiliza uma peneira e grãos de milho pintados na parte côncava do mesmo, tendo sua origem no jogo de artes divinatórias das religiões de matriz africana também chamado de búzios, este faz parte da cultura de comunidades quilombolas de Barra do Turvo. Tivemos a oportunidade de conhecer este jogo por meio da oficina da infância desenvolvida como parte das atividades do projeto de cultura

e extensão Saberes em Diálogo.

Percebemos o potencial do mesmo para explorar vários conceitos de Probabilidade e Estatística no ensino fundamental I, a reflexão sobre estes temas torna-se relevante porque é a primeira vez que esta área está sendo contemplada na documentação oficial como uma unidade temática específica na área de Matemática.

Além do mais, ele permite trabalhar de maneira interdisciplinar o resgate e a valorização da cultura quilombola. Dado que em termos de legislação, currículos, medidas que contemplam a Educação Quilombola têm sido implementadas ao longo do tempo. Por exemplo, a lei nº 10.639/2003 determina obrigatório o ensino da história e cultura afro-brasileira e africana nas escolas públicas e particulares, incluindo o ensino fundamental e o ensino médio.

Por sua vez, a lei 12.288/2010, institui o Estatuto da Igualdade Racial, visando combater a discriminação étnica no Brasil e garantindo à população negra a efetivação da igualdade de oportunidade. Assim com este trabalho pretendemos de alguma forma efetivar ou colocar na prática o que está previsto nestas importantes leis.

2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

O objetivo principal deste trabalho é:

- Identificar e estabelecer relações entre os conteúdos oficiais da Matemática no ensino fundamental e o jogo de búzios

Para atingir esse objetivo, revisamos conteúdos presentes nos livros didáticos de Matemática, participamos de reuniões com os professores que lecionam em Barra do Turvo, além disso o texto deste trabalho fez parte do curso de formação continuada desenvolvido para os professores como parte das atividades do primeiro semestre do projeto Saberes em Diálogo.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Utilizamos como referencial teórico fontes que descrevem aspectos sobre o uso de jogos no ensino de Probabilidade e Estatística nos anos iniciais e a relevância da construção de um ensino menos determinístico.

Recentemente, os currículos escolares do ensino fundamental passaram a incluir mais conteúdos sobre Probabilidade, justificado pela necessidade de fazer com que os estudantes se habituem a lidar com fenômenos aleatórios, que costumam ser vistos com maior frequência no cotidiano como na meteorologia, esportes e pesquisas de opinião em geral. O estudo de Probabilidade auxilia no desenvolvimento de um pensamento não determinístico, pois discute a presença da incerteza no dia a dia, ou seja, nem tudo pode ser previsto com a exatitude presente em outros campos de Matemática.

Batanero (2016) cita a relevância do desenvolvimento de um pensamento não determinístico pelos estudantes. Essa questão pode ser explorada no jogo de búzios, uma vez que nele podemos trabalhar situações em que não há equiprobabilidade, fazendo com que os alunos se familiarizem com noções de acaso, não se restringindo à ideia de sorte ou azar presentes em outros jogos.

Segundo Smole, Diniz e Cândido (2007), o jogo reduz as consequências de erros e a sensação de fracasso, permitindo que a criança desenvolva uma maior autonomia e iniciativa. Ao longo das jogadas ela se habitua às regras e consegue melhorar estratégias. Dessa forma, o jogo propicia aos alunos uma oportunidade de aprender conteúdos matemáticos de um modo diferente do usual, atuando como um recurso didático que permite assimilar elementos simbólicos à realidade.

Considerando que este trabalho envolve o estudo de um jogo tradicional, utilizamos a metodologia de pesquisa qualitativa para estudarmos aspectos do jogo, associando conteúdos de Probabilidade e Estatística que poderiam ser desenvolvidos a partir dele com base no referencial teórico pesquisado.

4 METODOLOGIA

A metodologia escolhida neste trabalho foi a qualitativa, que busca caracterizar e estudar particularidades sobre o tema da pesquisa. Proporciona relações entre teoria e prática, disponibilizando ferramentas para a interpretação de questões educacionais.

- Metodologia: Qualitativa
- Categoria: Pesquisa etnográfica aplicada à Educação

A pesquisa etnográfica reúne observação, participante, entrevista, história de vida, entre outros elementos. "É a descrição de um sistema de significados culturais de um determinado grupo" (LÜDKE; ANDRÉ, 1986) no processo de adaptação para a área da Educação, promovendo uma relação entre o que se aprende na escola e o que se passa fora dela.

Um dos instrumentos utilizados até hoje nesta pesquisa foi o registro de trabalho de campo realizado durante a oficina.

Este trabalho está relacionado à linha do Interpretacionismo. Trata-se de um posicionamento epistemológico que defende o estudo do ser humano, levando em conta que ele interpreta o mundo em que vive continuamente. No contexto deste trabalho, os quilombolas, ao observarem e vivenciarem o jogo de búzios, terão a oportunidade de refletir sobre conteúdos de Probabilidade e Estatística como noções de acaso e espaço amostral enquanto interagem com o jogo.

4.1 Etapas

Algumas etapas deste trabalho foram:

- Pesquisa e leitura reflexiva sobre diversos jogos tradicionais de origem africana e suas relações com a Matemática, em especial com Probabilidade e Estatística.
- Estudo sobre características da pesquisa qualitativa etnográfica.
- Leitura e revisão das indicações da BNCC associadas à Probabilidade e Estatística

para o Ensino Fundamental I.

- Reuniões com o grupo de pesquisa do projeto e os professores de Barra do Turvo através de plataforma online.

5 MATERIAL DIDÁTICO E OFICINAS

O material didático utilizado pelas escolas do município de Barra do Turvo relacionadas e participantes do projeto são os livros da coleção Vem Voar do primeiro ao quinto ano do ensino fundamental. Essa coleção apresenta propostas para o ensino e aprendizagem da Matemática, envolvendo cidadania, jogos e História da Matemática.

Um dos jogos apresentados no livro para o segundo ano e que tem relação com a História da África é o Mancala, que é um jogo em que o participante trabalha com a organização de sementes em cavidades do tabuleiro. Entretanto, trata-se de um jogo de estratégia que não envolve questões relacionadas à variabilidade ou aleatoriedade.

A contextualização da Matemática conforme o cotidiano dos estudantes de comunidades quilombolas pode ter um potencial significativo, uma vez que traz a eles cenários que lhes são familiares.

A inclusão de tópicos sobre jogos e História da Matemática nos livros dessa coleção é justificada pelo potencial que elas têm de despertar a curiosidade nos alunos para trabalhar conteúdos matemáticos e usar a vivência deles juntamente a diversos recursos para explorar novos problemas.

No livro explica-se o papel do professor em atividades de investigação, atribuindo-lhe funções como criar cenários e desafios, acompanhar o progresso dos alunos e ter uma postura interrogativa, pensando junto com eles.

6 JOGO DE BÚZIOS

Esse é um jogo tradicional das comunidades quilombolas de Barra do Turvo, por meio do qual os professores podem trabalhar em diferentes disciplinas diversos objetos de conhecimento que permitam às crianças desenvolver várias habilidades previstas na BNCC.

São necessários os seguintes materiais:

- Espigas de milho para retirar os grãos ou os próprios grãos
- Tinta
- Peneira
- Sacola para armazenar os grãos
- Quadro de anotações

Pinta-se os grãos de milho com tinta preta apenas de um lado (parte convexa). Cada jogador deverá lançar 10 grãos dentro de uma peneira em seu turno. Assim, ao lançar para o alto os grãos que estão na mão do jogador da vez, iremos observar que alguns cairão com a face colorida virada para cima e outros não, alguns inclusive, podem cair fora da peneira e não serão contabilizados.

Figura 1 - Jogo de búzios

Fonte: Saberes em Diálogo (2019)

A quantidade de grãos que caírem com o lado colorido virado para cima corresponderá à pontuação do jogador. O jogo pode ser individual ou grupal e o número de jogadas pode ser determinado pelos professores ou pelos próprios alunos. Ganha o jogo que tiver obtido uma pontuação maior.

6.1 Objetos de Conhecimento e Habilidades

Em um lançamento qualquer, uma configuração de grãos de milho aparecerá. Pode ser que haja mais grãos coloridos que lisos ou o contrário ou ambos em mesma quantidade. Essa situação pode motivar o aluno a refletir sobre o que é possível acontecer no experimento e o que é impossível ocorrer.

Algumas perguntas que podem ser levantadas são:

- “Todos os grãos lançados cairão dentro da peneira?”
- “Nenhum grão cai dentro da peneira?”
- “Algum grão fica flutuando?"
- “Em todas as jogadas obterei o mesmo número?”

Assim, por exemplo, os estudantes perceberão que existe a possibilidade de um grão escapar e acabar caindo fora da peneira.

Essas reflexões fazem os alunos trabalharem a ideia de incerteza e variabilidade, presentes na parte de Probabilidade e Estatística e previstas na BNCC do 1º ano do Ensino Fundamental, possibilitando que o professor aborde, os seguintes aspectos:

- Objeto do conhecimento: Noção de acaso
- Habilidade: (EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso tais como "acontecerá com certeza", "talvez acontecerá" e "é impossível acontecer", em situações do cotidiano.

Alguns tipos de eventos que resultam das afirmações anteriores são:

- Se são lançados 10 grãos, é “impossível” que ocorra uma configuração com mais do que 10 grãos coloridos.
- Em uma jogada, "talvez acontecerá" que se observe uma quantidade maior de grãos coloridos em relação ao de grãos lisos. O contrário também pode ocorrer.

No jogo de búzios, quando lançamos apenas um grão, este pode cair ou com a face colorida ou a face lisa voltada para cima. Assim como a moeda, o grão pode cair de dois modos.

Se lançarmos 10 grãos, teremos 11 configurações possíveis para um lançamento conforme a figura a seguir:

Figura 2 - Espaço amostral do jogo de búzios com 10 grãos

Ao observar as configurações possíveis numa determinada jogada, o aluno pode obter noções sobre espaço amostral, exercitando assim os aspectos a seguir, considerando as habilidades previstas pela BNCC para o 3º ano:

- Objeto do conhecimento: Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral.
- Habilidade: (EF03MA25) Identificar em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.

Algumas outras questões que poderiam ser levantadas pelo aluno-jogador são:

- "A tinta afeta a probabilidade do lado colorido sair?"
- "Será que a probabilidade de sair cada um dos lados é a mesma?"

No cotidiano estamos acostumados a lidar com exemplos que envolvem equiprobabilidade como é o caso da moeda, no qual supomos que a composição desse objeto é uniforme, o que faz com que qualquer face tenha a mesma probabilidade de ocorrer.

Primeiramente vamos analisar a questão da tinta e citar a Física envolvida neste contexto. A quantidade pequena de tinta não afeta tanto a probabilidade, porém, o formato do grão de milho é que poderia ser um fator de alteração do centro de massa do grão, podendo influenciar no resultado do lançamento.

Diferentemente da moeda, o grão de milho apresenta formato irregular naturalmente e assim, sua massa não fica distribuída uniformemente. Desse modo, o jogo de búzios pode ser

um exemplo interessante no qual não há equiprobabilidade a não ser que uma simplificação seja feita.

Em Batanero (2016), explica-se sobre a relevância de não trabalhar apenas com exemplos de equiprobabilidade. Dessa forma, novas possibilidades surgem e podemos perceber mais características sobre o acaso, evitando se ater à ideia de sorte ou azar, contribuindo assim para o desenvolvimento de um raciocínio não determinístico.

Supomos que a probabilidade do grão cair com a face colorida (C) ocorrer é p. Então, a probabilidade do lado liso (L) sair é 1-p.

$P(C) = p$

$P(L) = 1-p$

A probabilidade p seria igual a ½ se supuséssemos que há equiprobabilidade, ou seja, que os resultados possíveis têm a mesma probabilidade de ocorrer. Entretanto, como não sabemos se o experimento é equiprovável, isto é, não temos certeza se um lado tem probabilidade de sair maior que o outro, podemos considerar essas probabilidades como p e 1-p.

Realizando alguns lançamentos e registrando os resultados, o jogador pode questionar sobre a equiprobabilidade. Vamos supor um cenário hipotético no qual ele lança os grãos e observa que não saíram muitos grãos coloridos. Ao replicar esse experimento várias vezes ele percebe que os grãos coloridos continuam a não sair com muita frequência, indicando assim, que há dúvidas sobre a suposição de equiprobabilidade. Além de apresentar de maneira lúdica a noção de probabilidade frequentista, essa discussão pode motivar a abordagem das habilidades previstas pela BNCC para o 5º ano:

- Objeto do conhecimento: Análise de chances de eventos aleatórios
- Habilidade: (EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.

Na tabela a seguir são apresentados os objetos de conhecimento e suas correspondentes habilidades que podem ser trabalhadas no jogo de búzios na unidade temática Probabilidade e Estatística. Notando que estas não são necessariamente exclusivas dessa unidade temática, como assim também não foram enunciados os objetos de conhecimento e habilidades relacionados a outras unidades temáticas, como por exemplo, Números.

Tabela 1 - Habilidades da BNCC em Probabilidade e Estatística

Ano escolar	Objeto de conhecimento	Habilidades
1º ano	Noção de acaso	**(EF01MA20)** Classificar eventos envolvendo o acaso tais como "acontecerá com certeza", "talvez acontecerá" e "é impossível acontecer", em situações do cotidiano.
3º ano	Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral	**(EF03MA25)** Identificar em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chance de ocorrência.
5º ano	Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios	**(EF05MA22)** Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.

7 DISCUSSÃO E RESULTADOS

Foram realizadas algumas reuniões com os professores que lecionam em Barra do Turvo. Na discussão sobre o jogo de búzios os professores argumentaram como poderiam trabalhar diversos conteúdos de Matemática relacionados a esse jogo. Eles sugeriram que é possível abordar conteúdos como: frações e fatos básicos da adição e subtração em uma primeira análise. Todos estes temas relacionados também com probabilidade.

Em etapas posteriores foram incentivados a elaborarem planos de aula realizando mais conexões com os conteúdos previstos na BNCC. Após conhecerem mais sobre os objetos de conhecimento e habilidades que poderiam ser abordados no jogo, novas possibilidades ficarão disponíveis para serem incluídas em novos planos de aula.

Além de resgatar valores históricos e culturais da cultura quilombola, esse jogo possibilita o estudo de temas que não costumam ser abordados em sala de aula, como a discussão de situações em que não há equiprobabilidade, contribuindo para um processo de ensino aprendizagem que vai além do pensamento determinístico presente nas aulas de Matemática. Apresentar aos alunos cenários em que podemos discutir temas relacionados a um pensamento não determinístico é essencial para que eles se familiarizem com noções de fenômenos aleatórios já nos anos iniciais.

O uso de um jogo tradicional pode ainda fornecer aos alunos uma oportunidade de se trabalhar questões de Matemática de uma forma descontraída, no qual o fator lúdico os incentiva a participar, discutir em grupo e elaborar estratégias, exercitando assim a criatividade e a autonomia.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática costuma ser vista como uma área exata, com uma abordagem determinística. Entretanto, ao trabalhar com um jogo como o de búzios, trata-se a presença da incerteza e assim conceitos básicos relacionados à Probabilidade podem ser apresentados aos alunos. Este jogo permite o uso de material concreto tão importante nas fases iniciais da escolarização.

Por meio desse jogo tradicional na comunidade observamos que é possível trabalhar vários conceitos de Probabilidade e Estatística, realizando conexões com habilidades previstas na BNCC, o que pode auxiliar os professores a construírem planos de aula considerando diversos aspectos.

REFERÊNCIAS

BATANERO, C. Posibilidades y retos de la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. *In*: CONGRESO URUGUAYO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 6., 2015, Montevideo. **Actas** [...], Montevideo, 2016. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/307138587_POSIBILIDADES_Y_RETOS_DE_LA_ENSENANZA_DE_LA_PROBABILIDAD_EN_LA_EDUCACION_PRIMARIA. Acesso em: 12 out. 2021.

LÜDKE, M; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986. Disponível em: https://moodle.ufsc.br/pluginfile.php/2431625/mod_resource/content/1/Pesquisa%20em%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20Abordagens%20Qualitativas%20vf.pdf. Acesso em: 02 dez. 2019.

SABERES em Diálogo: Comunidade, Escola e Universidade na Construção da Educação Quilombola em Barra do Turvo (SP). **Educação Quilombola**, 2019. Disponível em: https://educacaoquilombola.fflch.usp.br/. Acesso em: 10 out. 2020.

SMOLE K. S.; DINIZ M. I.; CÂNDIDO P. **Cadernos do Mathema:** jogos de matemática do 1° ao 5° ano. Porto Alegre: Artmed, 2007. Disponível em: https://professorarnon.com/medias/documents/140421210219.pdf. Acesso em: 27 set. 2021.

AS PRÁTICAS PEDAGÓGICAS EM GEOMETRIA
Reflexões de futuros professores de Matemática

PEDAGOGICAL PRACTICES IN GEOMETRY
Reflections of future Mathematics teachers

Francisco Lucas Nascimento de Souza [1], Bárbara Corominas Valério [2]

[1] Mestrando do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP; fsouza@ime.usp.br
[2] Docente do Departamento de Matemática do IME-USP e orientadora; barbarav@ime.usp.br

Resumo: Este trabalho de pesquisa em desenvolvimento tem como objetivo compreender as concepções de futuros professores de Matemática durante a formação inicial sobre a prática profissional no ensino de Geometria. Para isso, foram propostas atividades de Prática como Componente Curricular que promovessem reflexões sobre o exercício da docência e analisadas as devolutivas sob a luz da teoria de conhecimentos de Shulman.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Formação Inicial. Prática como Componente Curricular. Conhecimento Pedagógico do Conteúdo.

Abstract: This research work in progress aims to understand the conceptions of future Mathematics teachers during their initial training on professional practice in the teaching of Geometry. For this, activities of Practice as a Curriculum Component were proposed to promote reflections on the practice of teaching and the material produced was analyzed under the light of Shulman's theory of knowledge.

Keywords: Geometry Teaching. Initial Teacher Training. Practice as a Curriculum Component. Pedagogical Content Knowledge.

1 INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

Ainda hoje, no Brasil, existem lacunas e deficiências no ensino e aprendizagem de Geometria. De acordo com Pavanello (1989, apud Caldatto e Pavanello, 2015), essas lacunas e deficiências são consequências do Movimento da Matemática Moderna (MMM), que exigiu que professores ensinassem Geometria através do enfoque algébrico e topológico, assunto que esses não dominavam por não ser tratado nos cursos de formação na época. A autora ainda

comenta que os professores já tinham dificuldades de ensinar Geometria antes mesmo do MMM, e que com o enfoque das transformações, o ensino de Geometria acabou por não ser mais realizado.

Alguns estudos mostram que os professores em atuação têm dificuldades em ensinar Geometria. Pavanello (2004), durante seu trabalho com professores de escolas públicas, se deparou com professores desanimados com o ensino de Geometria "porque não dominavam nem o conteúdo (alguns confessavam não haverem jamais estudado ou o fizeram de modo insatisfatório) nem a maneira de desenvolvê-lo com seus alunos". Pavanello (1993) e Almouloud *et al*. (2004) relatam em seus trabalhos que a procura dos professores por cursos de extensão em Geometria que priorizam reflexões sobre as práticas pedagógicas pode ser uma evidência das dificuldades que esses encontram na prática de ensino de Geometria.

As Práticas como Componente Curricular (PCC) foram criadas no início dos anos 2000 e introduzidas durante toda a formação inicial de professores com intuito de aproximá-los de questões relacionadas à prática profissional, trazendo reflexões sobre o exercício da profissão. São Paulo (2017), sobre os conhecimentos dos professores, define as Práticas Como Componente Curricular como:

> [...] o encontro do conhecimento sobre um determinado objeto de ensino, com o conhecimento pedagógico sobre como se aprende e como se ensina esse conteúdo. Constitui a dimensão prática, contextualizada e significativa de todos os conteúdos curriculares da formação docente, tanto aqueles específicos de uma área ou disciplina quanto aqueles dos fundamentos pedagógicos. (SÃO PAULO, 2017, p. 4).

Dentro desse contexto, buscamos entender quais são as concepções de futuros professores de Matemática sobre as práticas profissionais, em particular, no ensino de Geometria durante a formação inicial.

2 OBJETIVOS

A questão que norteia, neste momento, a pesquisa é: Quais são as concepções de futuros professores de Matemática sobre a prática profissional no ensino de Geometria, durante a formação inicial?

Em busca de responder essa questão, iniciamos esta pesquisa com um grupo de licenciandos em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da USP que estavam

cursando a disciplina MAT0240 - Geometria e Desenho Geométrico II no primeiro semestre de 2020. Foram propostas atividades de Prática como Componente Curricular que promovessem reflexões sobre o exercício da docência e analisadas as devolutivas recebidas.

3 REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

A metodologia utilizada no desenvolvimento dessa pesquisa é de cunho qualitativo, onde foram analisadas as produções escritas de um grupo de alunos do curso da Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da USP. Essas produções são resultados de quatro atividades propostas durante a disciplina como parte da Prática Como Componente Curricular exigida.

As Práticas Como Componente Curricular são introduzidas pelas Resoluções CNE/CP 1 e 2/2002. Na Resolução CNE/CP 1/2002, instituiu-se que, nas matrizes curriculares dos cursos de formação de professores da educação básica, a prática deveria estar presente desde o início do curso, percorrendo toda a formação do professor. Já na Resolução CNE/CP 2/2002, foi definida a carga mínima de 400 horas de prática como componente curricular (PCC) a serem distribuídas durante toda a formação do futuro professor, tendo como objetivo a preparação da prática docente desde o início do curso, não deixando essa preparação apenas para os estágios supervisionados.

A Deliberação CEE/SP 154/2017 enfatiza o significado e o papel das Práticas Como Componente Curricular no currículo de formação de professores. Conforme apresentado na introdução, a Deliberação define as Práticas Como Componente Curricular como a união do conhecimento do conteúdo a ser lecionado com o conhecimento pedagógico desse conteúdo.

As categorias conhecimento do conteúdo (em inglês, *subject matter knowledge*) e conhecimento pedagógico do conteúdo (em inglês, *pedagogical content knowledge*) foram apresentados por Shulman (1986) como os conhecimentos que um professor precisa deter.

O conhecimento do conteúdo é aquele onde o professor sabe utilizar o conteúdo como ferramenta, ou seja, conhece as definições, propriedades, exemplos desse conteúdo. Em outras palavras, dado um problema, o professor é capaz de resolvê-lo com o conhecimento do conteúdo.

Já o conhecimento pedagógico do conteúdo é o conhecimento que o professor tem para ensinar um conteúdo. O professor precisa conhecer as abordagens de ensino mais

eficazes, exemplos que ajudem seus alunos entender melhor os conteúdos, dentre outros saberes, ou seja, é aquele conhecimento "que vai além do conhecimento da disciplina em si para a dimensão do conhecimento da disciplina para ensinar" (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa). Ribeiro (2009) explica esse conhecimento:

> Aos professores, para além de necessitarem possuir um sólido conhecimento do conteúdo matemático, na óptica de saber utilizar a matemática como ferramenta (*saber fazer*), compete-lhes igualmente possuir um vasto repertório de formas de representar ideias e processos matemáticos, de modo a tornar os diferentes tópicos/conteúdos perceptíveis aos seus alunos, facultando-lhes as oportunidades para que abordem e explorem os conteúdos com verdadeira compreensão e não somente como reprodução de um conjunto de regras, procedimentos e/ou características (*saber ensinar a fazer*). (RIBEIRO, 2009, p. 2).

Além desses dois conhecimentos, Shulman ainda denominou de conhecimento do currículo o conhecimento do professor sobre um conteúdo em diferentes níveis da Educação. Ball *et al.* (2008) acredita que o conhecimento do conteúdo pode ser subdividido em duas categorias: conhecimento comum do conteúdo e conhecimento especializado do conteúdo. De maneira sucinta, o conhecimento comum do conteúdo é aquele que não é exclusivo do licenciado em Matemática. Por exemplo, um físico detém o mesmo conhecimento do conteúdo de trigonometria que um professor de Matemática. Já o conhecimento especializado do conteúdo é exclusivo do professor de Matemática, sendo este o conhecimento de diferentes representações de um conteúdo e de como abordar em diferentes níveis da Educação Básica.

Também, em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo, Ball *et al.* (2008) apresentou subdivisões, sendo elas o conhecimento do conteúdo e dos estudantes e conhecimento do conteúdo e do ensino. Na primeira subdivisão, compreende-se o conhecimento que os professores têm sobre as principais dificuldades apresentadas pelos alunos sobre um conteúdo, sobre quais exemplos tornam o processo de aprendizagem mais eficaz. Já quando o professor conhece as metodologias mais adequadas para abordar determinado conteúdo ou quando compreender qual é a sequência de apresentação dos conteúdos que mais ajudará na compreensão dos alunos, esse conhecimento está compreendido na subdivisão de conhecimento do conteúdo e do ensino.

4 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA E RESULTADOS PARCIAIS OBTIDOS

Esta pesquisa foi desenvolvida durante o primeiro semestre de 2020 com 24 licenciandos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da USP, que estavam cursando a disciplina MAT0240 - Geometria e Desenho Geométrico II, oferecida no período noturno. Esta é uma das disciplinas obrigatórias do currículo que prevê o cumprimento de horas de Prática como Componente Curricular.

Neste contexto, foram propostas, em quatro momentos distintos da disciplina, atividades que favoreceram a reflexão sobre o exercício da docência. Para preservar a identidade dos licenciandos participantes da pesquisa, utilizaremos as indicações L1 à L24 a partir daqui.

A primeira atividade proposta, logo no início do semestre, foi a produção de uma redação que respondesse à seguinte pergunta: “Como foi o ensino de Geometria que você teve durante o Ensino Fundamental e Médio?”. Tínhamos como objetivo proporcionar aos licenciandos a oportunidade de refletirem e avaliarem o próprio processo de ensino e aprendizagem de Geometria e esperávamos, através desta proposta, poder elencar os problemas que esses licenciandos tiveram durante sua formação na Educação Básica.

Analisando as redações produzidas, destacaram-se os seguintes principais problemas: a superficialidade dos conteúdos apresentados, a forte presença da Álgebra no ensino de Geometria, o ensino tradicional e a formação dos professores.

Sobre a formação dos professores, destaca-se a frase de L15 que afirma que muitas das aulas que teve eram "conteudistas" devido a formação dos professores:

> L15: “[...] Meus professores, em sua maioria, não possuíam uma formação adequada ou não sentiam-se confiantes em dar uma aula de geometria, o que resultou em diversas aulas conteudistas que visavam um ‘decorar de fórmulas’.”

Professores com problemas de formação em Geometria tendem a evitar o ensino desse conteúdo uma vez que não têm os conhecimentos necessários para fazê-lo. Passos e Nacarato (2014) apontam em seu trabalho que os professores acabam não assumindo a Geometria como

prioridade frente às demais áreas da Matemática pois “ninguém ensina aquilo que não têm o domínio conceitual”.

Como uma consequência do não domínio da Geometria, ou seja, de não conhecer o conteúdo de maneira clara e suas relações com outros assuntos da Matemática, além de não conhecer formas de apresentar o conteúdo a fim de proporcionar uma aprendizagem significativa por parte dos alunos, os professores acabam tendendo para um ensino tradicional, ou seja, aquele ensino onde os professores reproduzem os conteúdos do livro didático na lousa, propondo exercícios de repetição e memorização. Na redação de L13, nota-se o sentimento do licenciando em relação a esse tipo de ensino, ao qual o denota como padrão “lousa, giz e saliva”:

> L13: “Gostaria de ter uma história incrível para contar sobre a minha relação com a geometria durante o ensino fundamental e médio, mas a verdade é que as aulas eram um padrão “lousa, giz e saliva”, logo infelizmente não tive grandes experiências com a geometria.”

Essa metodologia de ensino acarreta na superficialidade do conteúdo, uma vez que as discussões pertinentes que auxiliam os alunos a compreenderem melhor os conteúdos ficam ausentes. Para L14, os conteúdos de Geometria foram vistos durante a Educação Básica, porém, dado que o objetivo da escola em que estudou era a aprovação de seus estudantes nos vestibulares, o ensino seguia o modelo tradicional e implicou na superficialidade dos conteúdos:

> L14: “Os tópicos existentes, quase em sua totalidade, foram mencionados e trabalhados, porém pude verificar uma baixa exploração de suas características, além de uma sucinta quantidade de discussões a respeito.”

Em relação à presença da Álgebra no ensino de Geometria, podemos destacar a seguinte frase da redação de L18:

> L18: “Os conteúdos em sua grande parte envolviam álgebra, como por exemplo, o teorema de Pitágoras que apresentado sem muita explicação e contextualização

> do porquê utilizar tal teorema, expondo apenas fórmulas que eram utilizadas sem muito entendimento, sendo explícito o ato de decorar para obter uma boa nota."

Essa presença da Álgebra para ensinar Geometria é resultado do Movimento da Matemática Moderna (MMM) ocorrido no Brasil nas décadas de 60 e 70. De acordo com Angelo *et al.* (2020), o MMM foi influenciado pelo grupo de matemáticos franceses Bourbaki, que classificavam as estruturas fundamentais da Matemática como algébricas e topológicas, e por isso, a partir dessa época os livros didáticos passaram a abordar o ensino de Geometria com ênfase na teoria dos conjuntos.

A segunda atividade proposta aos licenciandos foi a entrega de uma nova reflexão: "Pensando no ensino de Geometria que você teve, cite um exemplo de atividade que seu professor do Ensino Fundamental ou Médio realizou e que você reproduziria com seus alunos. Cite também uma atividade que você não reproduziria com seus alunos. Para ambas citações, justifique a escolha feita". O objetivo dessa atividade foi identificar que tipo de atividades os licenciandos consideravam interessantes e que tipo de atividades não eram pertinentes para o ensino e aprendizagem de Geometria.

Um ponto curioso que foi visto nessa atividade foi o fato de uma mesma proposta de atividade aparecer em mais de uma redação, porém como atividade a ser reproduzida e também como atividade a não ser reproduzida.

Um exemplo dessa situação é que L6 e L10 citaram a atividade onde os alunos devem medir circunferências e seus diâmetros para encontrar um valor aproximado de π. O licenciando L6 considerou que essa atividade era interessante pois ela pode ser realizada com poucos recursos e ajuda os alunos a terem noções sobre número, sobre semelhança entre círculos e limitações de experimentação, e por isso a reproduziria. Por outro lado, L10 não reproduziria essa atividade justificando que o problema dela seria o não uso de uma calculadora e a falta de precisão para encontrar os valores do diâmetro de objetos maciços, o que prejudica no cálculo da razão.

É importante destacar que L10 comenta que a proposta de seu professor foi que os alunos procurassem objetos circulares pela escola para fazer as medições. O licenciando descreveu sobre a dificuldade de se calcular o diâmetro de objetos maciços, e por isso não reproduziria a atividade. Contudo, podemos pensar em realizar a atividade em objetos onde é fácil calcular o diâmetro, como moedas, pratos circulares ou tampas de garrafas, e validar a

aproximação do valor de π. Depois disso, sabendo um valor aproximado de π, seria possível discutir o cálculo do diâmetro desses objetos maciços, como postes, um dos lados da trave da quadra poliesportiva da escola e outros objetos. Por que o professor não pensou neste tipo de discussão? Será que esse licenciando não seria capaz de pensar nessa discussão?

O uso de dobradura no ensino de Geometria foi outra atividade que apareceu neste segundo momento da PCC como uma atividade que se reproduziria e como uma atividade que não se reproduziria. L1, por exemplo, teve como experiência uma atividade de dobradura que ajudou na demonstração da propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo:

> L1: "No 7º ano tive contato com uma atividade que mostrava que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Pela sua facilidade e clareza em mostrar uma importante propriedade matemática, eu como professor reproduziria esse exercício."

Por outro lado, a experiência de L19 com dobradura não foi fácil e clara. Esse licenciando, além de ter vivenciado essa atividade quando aluno da Educação Básica, também tentou reproduzir a atividade com seus próprios alunos no papel de professor.

> L19: "Um exercício que não faria e inclusive já tentei e não funcionou muito bem, seria construir através de origamis alguns símbolos, prismas e outras formas geométricas no plano e espaço. A atividade demandou muito papel e os alunos acabaram não conseguindo fazer boa parte da atividade e acabaram deixando de lado não levando muito a sério a atividade."

Através da reflexão de L19, alguns questionamentos surgiram. O professor da Educação Básica desse licenciando tinha todo o conhecimento necessário para ensinar Geometria utilizando dobraduras? Esse professor conhecia todas as propriedades que poderiam ser discutidas através das dobraduras? Ele sabia como orientar os alunos para a construção do conhecimento de Geometria através das dobraduras? E esse licenciando, por que reproduziu com seus alunos uma atividade que não deu certo com ele durante a Educação Básica? Ele fez alguma adaptação na atividade quando comparado com a forma que seu

professor realizou? Esse licenciando possui os conhecimentos (do conteúdo e pedagógico do conteúdo, segundo Shulman (1986) e Ball *et al.* (2008)) necessários para reproduzir essa atividade?

Outro ponto curioso que encontramos neste segundo momento de reflexão dos licenciandos foi o tipo de atividade que os alunos consideram interessantes de se reproduzir. No texto de L18, o licenciando disse que se recorda apenas de "aulas expositivas, listas de exercícios e trabalhos que consistiam apenas em exercícios valendo pontos" e, por isso, não seria possível citar atividades criativas e lúdicas que reproduziria com seus futuros alunos. Todavia, no pedido que foi feito, não é mencionado que os alunos deveriam citar atividades lúdicas e criativas, o que nos faz entender que para esse licenciando, as atividades que são pertinentes para o ensino e aprendizagem de Geometria são aquelas consideradas lúdicas e criativas.

Como terceira atividade, propusemos, em dupla, que os licenciandos escolhessem uma das atividades citadas por um apenas um deles na atividade anterior e respondessem três questões: (a) Que conteúdo a atividade trabalhou? (b) Em que ano escolar a atividade foi desenvolvida? e (c) Segundo a BNCC, este conteúdo é indicado para ser trabalhado em quais anos?

Além dessas perguntas, a dupla de licenciandos deveria selecionar um artigo que discutisse algum aspecto didático do conteúdo trabalhado, ou seja algum aspecto relacionado ao ensino-aprendizagem deste tópico, e elaborar um resumo analítico sobre esse artigo fazendo uma discussão com comentários sobre seu conteúdo. O objetivo desse momento foi aproximar esses licenciandos de questões relacionadas ao ensino e a aprendizagem de tópicos da Geometria, como por exemplo, dificuldades dos alunos, possíveis abordagens de ensino, aspectos históricos que podem subsidiar o ensino de Geometria, dentre outros.

Ao analisar a produção dos licenciandos nessa atividade, podemos notar o surgimento de novas preocupações referentes ao exercício da profissão. A dupla L1 / L24, por exemplo, após a leitura do artigo escolhido, apresentou em sua produção um trecho referente a relação entre docente e discente:

> L3 e L24: "[...] é importante conhecer e ter contato com as limitações de cada aluno, algo que deveria ser comum mas está muito longe disso. A relação distante entre

> docente e discente faz com que não saibamos dos recursos e bagagens prévios de cada aluno para dar continuidade ao aprendizado e garantir que esse será sólido."

A preocupação levantada pela dupla é caracterizada por um dos domínios listados por Ball *et al.* (2008) sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo, domínio esse chamado de conhecimento do conteúdo e dos alunos (em inglês, *knowledge of content and students*). Os autores consideram que esse domínio é aquele que combina o conhecimento que o professor precisa ter sobre os estudantes e o conteúdo, antecipando as possíveis dificuldades que os alunos possam ter, qual abordagem de ensino propicia um processo de ensino e aprendizagem mais significativo para aquela turma de alunos, etc. Ou seja, a partir da leitura do artigo escolhido pela dupla, eles puderam refletir e construir um conhecimento necessário para a prática profissional dentro do conhecimento pedagógico do conteúdo.

A dupla L18 / L19 escolheu como atividade a verificação do volume da pirâmide a partir do prisma de base triangular, utilizando material manipulável. O interessante nessa escolha é que os licenciandos tiveram experiências distintas sobre o mesmo conteúdo, onde para um deles, utilizou-se material manipulável para a visualização do prisma e das pirâmides, enquanto o outro licenciando teve uma aula com aplicação de fórmulas. Eles refletiram sobre isso:

> L18 e L19: "Um dos autores deste trabalho de PCC teve o método aplicado como descrito em plano aula, quando cursava o 2º ano do ensino médio, não há dúvidas que para ele a atividade foi um grande progresso ao seu ensino em geometria e em contraponto o outro autor só teve apenas a aplicação de fórmulas em exercícios teóricos enfrenta a dificuldade no entendimento e o "enxergar" os conceitos apresentados no ensino superior sobre geometria, pois não traz consigo o entendimento básico da disciplina de geometria. Podemos questionar, ao apresentar essas experiências, se a aplicação de métodos mais intuitivos e lúdicos contribuem para este olhar crítico e clareza sobre o assunto descrito."

Podemos perceber que essa atividade trouxe aos licenciandos um questionamento sobre método de ensino, pois compararam um ensino com a utilização de material manipulável com uma aula considerada tradicional e puderam notar a eficácia no processo de

aprendizagem em cada método. Dessa forma, futuramente esses licenciandos saberão qual é a metodologia mais eficaz para o processo de aprendizagem de seus alunos.

Na produção de L6, que preferiu realizar o trabalho sozinho, o licenciando faz um comentário interessante sobre o ensino de números irracionais ao comentar da atividade de validação do número π através da razão das medidas da circunferência e do diâmetro. Para ele, ao propor a atividade no sétimo ano do Ensino Fundamental, como ocorreu com ele, os professores abrem caminho para que os alunos se "confundam" sobre o que é o número π uma vez que nessa etapa do ensino os alunos ainda não tiveram contato com a definição de número irracional.

Esse tipo de conhecimento mostrado pelo licenciando é caracterizado por Ball *et al.* (2008) como conhecimento do conteúdo e do currículo (em inglês, *knowledge of content and curriculum*), sendo o conhecimento que o professor têm em relação a como o conteúdo é apresentado em diferentes momentos da Educação Básica. Apesar de mostrar esse conhecimento, há maneiras de introduzir números irracionais sem defini-los. Isso ocorre com outros conteúdos da Matemática, que são abordados mais de uma vez durante a Educação Básica, onde, conforme os alunos estão chegando na etapa final da escolarização, os conteúdos apresentam novas relações com outros conteúdos da Matemática, e até mesmo com conteúdos de outras disciplinas.

Por fim, como última atividade proposta, também em dupla, propusemos algumas questões aos licenciandos para que eles analisassem um plano de aula sobre ângulos internos de um polígono regular. O plano proposto, de domínio público, foi retirado de um site de uma organização educacional. O objetivo dessa atividade não foi criticar o plano de aula disponibilizado pela organização, mas sim verificar as impressões dos licenciandos sobre esse material, quais conhecimentos os alunos consideram necessários para aplicar esse plano e analisar essas respostas à luz da teoria de Shulman (1986). Além disso, os alunos deveriam elaborar seus próprios planos de aula sobre o mesmo conteúdo.

O plano de aula apresentado, era dividido em etapas de aplicação com tempos fixados para o desenvolvimento de cada uma delas, sendo que todo o plano deveria ser aplicado em uma aula (50 minutos). Perguntamos às duplas se elas consideravam esse tempo adequado e tivemos algumas respostas interessantes. Por exemplo, a dupla L3 / L24 comenta:

> L3 e L24: “As sugestões de tempo são bastante interessantes e não diríamos que estão inadequadas, porém achamos que não passam de uma mera estimação, pois quando pensamos na proposta desse plano de aulas – ou seja, abrir um espaço de investigação e troca para a turma, possibilitando discussões –, é muito difícil engessarmos quanto tempo uma argumentação pode levar. É preciso tomar cuidado ao “podar” essas discussões para entrar num tempo pré-determinado, pois podemos recair sobre uma face de desestímulo sobre os alunos.”

No comentário da dupla, podemos notar o cuidado que os licenciandos alertam sobre cumprir o tempo proposto de forma rigorosa. A dupla utiliza o termo “podar” ao se referir que o cumprimento rigoroso dos tempos sugeridos pode privar os alunos das discussões que estão construindo sobre o conteúdo, e isso pode caracterizar um desinteresse do aluno em aprender. Esse conhecimento que a dupla apresentou sobre os alunos pode ser compreendido como conhecimento do conteúdo e dos alunos.

Outro licenciando que apresentou uma análise semelhante com a dupla anterior foi o L11, que escreveu um comentário sobre a realidade das salas de aula e os tempos sugeridos pelo plano de aula.

> L11: “[...] estes tempos não consideram turmas dispersas, com desvios disciplinares e falta de interesse. Nos estágios que presenciei, em uma aula de 50 minutos o professor efetivamente consegue ensinar 10 minutos. Portanto, tenho dúvidas que este tempo seja factível.”

É importante comentar que na elaboração do plano de aula, a dupla L3 / L24 não considerou apenas uma aula de 50 minutos, mas sim uma “dobradinha”, ou seja, duas aulas consecutivas, cada uma de 50 minutos, justificando que mais tempo ajudaria a não coibir as discussões dos alunos. Por outro lado, apesar de criticar o tempo como no trecho destacado acima, L11 elaborou um plano de aula com o mesmo tempo que criticou, ou seja, uma aula de 50 minutos.

Perguntamos também aos licenciandos se eles se consideravam preparados para a aplicação desse plano de aula. Das respostas obtidas, se destacou a de L18, que não se considera preparado para aplicar esse plano.

L18: “Não, o plano faz uso de ideias que eu não tenho total domínio, pois poderiam surgir dúvidas e dificuldades que baseado no plano não teria o domínio suficiente para sanar, exatamente pelas lacunas encontradas ao longo de um ensino defasado, que não se atenta na compreensão, no domínio da matéria. Então baseado nas definições encontradas no plano não me sentiria preparada para aplicar mas com uma preparação e o preenchimento de lacunas encontradas não haveria problemas em aplicá-lo.”

Nos perguntamos o motivo desse licenciando ainda não se sentir seguro em aplicar um plano de aula, com um conteúdo já visto em disciplinas anteriores durante sua formação. Lendo a redação de L18 no primeiro momento de PCC, pudemos entender que esse licenciando teve uma formação precária durante a Educação Básica. Esse licenciando relata que, ao pesquisar quais conteúdos de Geometria deveriam ser aprendidos na Educação Básica, percebe que uma parcela pequena desses conteúdos foram aprendidos e que por isso, têm dificuldades em aprender os conteúdos lecionados na universidade.

L18: “[...] ao iniciar meus estudos na faculdade, tive contato com assuntos diversos nunca citados na escola, tendo enorme dificuldade de aprendê-los por falta de uma base. Tornando-se evidente o quanto o ensino de geometria foi colocado de forma secundária no ensino de matemática, tanto pelos professores quanto pelo plano de ensino.”

Outras perguntas que fizemos sobre a aplicação do plano de aula foram: “*O que um professor deveria saber para aplicar este plano de aula?*” e; “*Você considera que qualquer pessoa poderia aplicar esse plano de aula numa possível substituição do professor de uma turma? Justifique.*”.

Em relação a essas perguntas, tivemos respostas onde o licenciando se refere apenas ao conhecimento do conteúdo a ser lecionado. Por exemplo, para a primeira pergunta, L13 considera que para aplicar esse plano, um professor deve “ter muito claro o conceito de polígono, polígono regular, diagonal, ângulo interno e soma dos ângulos internos”. Em relação à segunda pergunta, L13 considera que o plano não pode ser aplicado por qualquer

pessoa, e sim por “alguém da área da matemática para evitar erro de conceito que prejudique o aprendizado e desenvolvimento dos alunos”, ou seja, alguém que tenha conhecimento do conteúdo.

Por outro lado, alguns licenciandos apresentaram preocupações além do conhecimento do conteúdo. Na resposta de L23, o licenciando apresenta a seguinte resposta para a primeira pergunta:

> L23: “Certamente precisa saber interagir com os alunos, de modo que entenda as dificuldades, mesmo que elas não sejam explícitas. Com certeza também precisa conhecer os resultados matemáticos que está ensinando, pois poderia surgir uma pergunta não tão óbvia que ele precisa, ao menos, entender para responder depois. Por exemplo, algum aluno poderia perceber que o polígono se parece mais com um círculo a cada lado aumentado e perguntar quantos lados tem um círculo.”

Conseguimos notar na resposta desse licenciando que ele apresentou que o professor precisa conhecer os alunos e suas dificuldades, ou seja, um conhecimento do conteúdo e dos alunos, de acordo com Ball *et al.* (2008). Além disso, também houve a preocupação referente ao conhecimento do conteúdo a ser lecionado através do plano de aula, quando se escreve “conhecer os resultados matemáticos que está ensinando”. É interessante destacar que o licenciando entende que o professor não precisa ter a resposta para todas as perguntas feitas pelos alunos, mas que precisa entender a dúvida para sanar assim que souber a resposta.

A resposta desse licenciando para a segunda pergunta, em relação se qualquer pessoa poderia aplicar esse plano de aulas, também é interessante:

> L23: “[...] precisa ser aplicado por alguém que conheça o trabalho em sala de aula. [...] não basta entrar e “aplicar”, quem aplica precisa fazer perguntas, guiar os alunos, então precisa de um mínimo de conhecimento como líder de uma sala de aula. Precisa também sentir segurança para responder aos questionamentos dos alunos. Se for alguém que está lá apenas para entregar folhas de papel e passar slides, o trabalho seria em vão.”

Entendemos que, ao escrever “precisa fazer perguntas, guiar os alunos”, o licenciando apresenta novamente o conhecimento pedagógico do conteúdo, uma vez que para orientar os alunos é necessário deter um conhecimento das dificuldades dos alunos, de quais exemplos seriam mais eficazes no processo de aprendizagem desses alunos, dentre outros conhecimentos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PRÓXIMOS PASSOS

A partir da análise das devolutivas dos licenciandos, pudemos constatar aspectos importantes que podem influenciar a formação desses indivíduos, como por exemplo, que há licenciando em disciplinas avançadas do curso que ainda não se sentem preparados para lecionar um determinado conteúdo, e que isso é consequência de uma formação precária durante a Educação Básica. Quando esse licenciando se formar e precisar ensinar esses conteúdos, o que eles farão se não estão preparados? Ensinarão seus alunos da forma que aprenderam? Então seus alunos terão um ensino precário?

Apesar disso, as atividades propostas resultaram em reflexões interessantes sobre a prática profissional. Os licenciandos mostraram preocupações como o conhecimento sobre os alunos e suas dificuldades, a atenção que precisam ter para evitar interromper o pensamento desses alunos, dentre outras reflexões que estão caracterizadas como conhecimento pedagógico do conteúdo.

Mesmo que esses licenciandos ainda sintam que não estão preparados para lecionar determinados conteúdos, as reflexões apresentadas por eles nos fazem crer que não irão reproduzir o ensino que tiveram.

O próximo passo desta pesquisa é dar continuidade na análise do material recolhido até o momento, construindo novas relações com a teoria de Shulman. Também, prevemos trabalhar a questão central dessa pesquisa com um novo grupo de licenciandos, orientados pelos resultados até agora obtidos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. *et al*. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, p. 94-108, 2004.

ANGELO, M. S.; SANTOS, M. F. M.; BARBOSA, R. S. J. O ensino de geometria no Brasil: uma abordagem histórica. *In*: COLÓQUIO INTERNACIONAL EDUCAÇÃO E CONTEMPORANEIDADE, 14., 2020, São Cristóvão (SE). **Anais** [...]. São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe (UFS), 2020. p. 1-12. Disponível em: http://educonse.com.br/xivcoloquio/anais/. Acesso em: 07 set. 2021.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, Michigan, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov./dez. 2008.

BRASIL. **Resolução CNE/CP nº 1, de 18 de fevereiro de 2002**. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. Brasília, DF, 2002a. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf. Acesso em: 28 ago. 2021.

BRASIL. **Resolução CNE/CP nº 2, de 19 de fevereiro de 2002**. Institui a duração e a carga horária dos cursos de Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior. Brasília, DF, 2002b. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CP022002.pdf. Acesso em: 28 ago. 2021.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, v. 24, n. 1, p. 103-128, 2015.

PAVANELLO, R. M. **O abandono de ensino de geometria**: uma visão histórica. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas (SP), 1989.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, p. 1-17, jan./dez. 1993.

PAVANELLO, R. M. Por que ensinar/aprender geometria? *In*: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo (SP). **Anais** [...]. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2004. p. 1-6.

RIBEIRO, C. M. O conhecimento do conteúdo no tema de Geometria: algumas situações críticas evidenciadas por futuros professores na Licenciatura em Educação Básica. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (PROFMAT), 25., 2009, Viana do Castelo. **Anais** [...]. Viana do Castelo: Instituto Politécnico de Viana do Castelo, 2009. p. 1-10.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Conselho Estadual de Educação. **Deliberação No.154/2017**. São Paulo: SEDUC-SP, 2017. (DELIBERAÇÃO CEE/SP 154/2017).

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, feb. 1986.

UM ESTUDO COMPARATIVO SOBRE AS ATUAIS PROPOSTAS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO BRASILEIRO E DA *EDUCACIÓN SECUNDARIA* ARGENTINA

A COMPARATIVE STUDY OF THE CURRENT NATIONAL CURRICULUM PROPOSALS FOR MATHEMATICS OF BRAZILIAN HIGH SCHOOL AND ARGENTINA SECONDARY EDUCATION

Ricardo Angelo Monteiro Canale[1]

[1] Estudante do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de Lisboa e licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, com graduação-sanduíche em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. E-mail: ricardocanale@ime.usp.br

Resumo: Este trabalho tem como tema os currículos de Matemática na educação básica de dois países latino-americanos (Brasil e Argentina). Para tangenciar o tema, foi proposto como método de trabalho o desenvolvimento de um estudo comparativo que aborde, principalmente, dois documentos estruturantes dos currículos dos referidos países, a saber: 1) Base Nacional Comum Curricular (do Brasil); e 2) *Nucleos de Aprendizajes Prioritarios de la Educación Secundaria* (da Argentina). O objetivo central foi identificar pontos de convergência e de divergência entre ambas as propostas curriculares para o ensino e aprendizagem da matemática. A pesquisa se justificou pela conjuntura atual de reformas educacionais, situadas em contextos de tentativas de desenvolvimento social e econômico dessa fração do continente americano. Nessa conjuntura, reforça-se a importância de se discutir aquilo que se pretende ensinar aos novos cidadãos que compõem as sociedades, bem como as formas como se pretende conduzir os ensinamentos. Tratando-se, ainda, de países parceiros entre si, que carregam fortes vínculos não apenas econômicos, mas também sociais e históricos, entende-se que a pesquisa contribui para o desenvolvimento solidário e integrado entre os países abordados. Tendo como questão central: quais são, para o ensino e aprendizagem de matemática, as proximidades e distanciamentos entre a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio brasileira e os *Nucleos de Aprendizajes Prioritarios* de *la Educación Secundaria* argentina, parte-se da hipótese de que, por algumas razões históricas, tanto o Brasil quanto a Argentina perseguiram essencialmente com as ideias de habilidades e competências. No entanto, em ambos os países se verificaria: i) No NAP as competências são subdivididas de forma seriada e por área, com comentários e sugestões, enquanto na BNCC-EM a subdivisão ocorre apenas pelas competências; ii) um afã pela resolução de problemas como metodologia de ensino de matemática; iii) a Matemática como uma área própria do conhecimento; e iv) a matemática como um instrumento fundamental para a formação integral dos sujeitos. Estas diferenças e semelhanças são as principais que vêm sendo identificadas pelo autor em pesquisa preliminar realizada até o momento, sendo consideradas, portanto, como parte dos resultados aferidos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Educação Comparada. Currículos de Matemática. Brasil. Argentina.

Abstract: This work has as its theme the Mathematics curricula of basic education in two Latin American countries (Brazil and Argentina). In order to touch upon the theme, it is proposed, as a methodology, the development of a comparative study that mainly addresses two structuring documents of the curricula of the referred countries, namely: 1) Brazil's National Common Curricular Base ("BNCC" in the Portuguese acronym); and 2) Argentinian's Core Learning Aims ("NAP" in the Spanish acronym) for High School. The main research aim is to identify points of convergence and divergence between both curricular proposals for the teaching and learning mathematics. The research is justified by the current conjuncture of educational reforms, located in the context of attempts at social and economic development in this part of the American continent. In this context, the importance of discussing what is intended to be taught to the new citizens who make up societies is reinforced, as well as the ways in which it is intended to conduct the teachings. In the case of partner countries, which have strong links not only economic, but also social and historical, it is understood that the research contributes to the solidary and integrated development between the countries covered. Having as central question: what are, for the teaching and learning of mathematics, the similarity and differences between the Brazil's National Common Curricular Base for High School ("BNCC-EM" in the Portuguese acronym) and the Argentinian's Core Learning Aims ("NAP" in the Spanish acronym) for High School, we start from the hypothesis that, for some historical reasons, Brazil and Argentina essentially pursue the ideas of skills and competences. However, in both countries there would be: i) In NAP, competences are subdivided serially and by area, with comments and suggestions, while in BNCC-EM the subdivision occurs only by competences; ii) an esteem for the problem solving as a methodology for teaching mathematics; iii) the Mathematics as its own area of knowledge; and iv) mathematics as a key tool for the integral formation of the subjects. These differences and similarities are the main ones that have been identified by the author in preliminary research conducted at this moment, being considered, therefore, as part of the results obtained.

Keywords: Mathematics Education. Comparative Education. Mathematics curricula. Brazil. Argentina.

1 INTRODUÇÃO

De acordo com o Parágrafo Único do artigo 4º da Constituição Federal do Brasil, tem-se que "A República Federativa do Brasil buscará a integração econômica, política, social e cultural dos povos da América Latina, visando à formação de uma comunidade latino-americana"[5], e é por meio dessa norma constitucional que se inspira o presente artigo a discutir os impactos da Educação Matemática em currículos do ensino secundário em países da América Latina, voltando-se exclusivamente às realidades de Brasil e Argentina.

[5] Vide <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Constituicao.htm>. Acesso em: 29 set. 2020.

Recentemente, conforme Gonçalves e Pires (2017), a comunidade latino-americana de educadores matemáticos tem buscado, por intermédio de suas produções científicas, articular-se para a consolidação da educação comparada como uma área de conhecimento sólida no meio acadêmico e para promover melhorias no ensino de Matemática[6]. Essa integração é propiciada mediante congressos como, por exemplo, o Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM), promovido pela Federação Ibero-americana de Sociedade de Educação Matemática (FISEM), a qual congrega diversas sociedades científico-acadêmicas[7] consigo; por meio de conferências, a exemplo da Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), a Reunião Latino-Americana de Educação Matemática (RELME) e a Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul; na difusão de revistas de divulgação científica, como o caso da *Unión***,** de responsabilidade da FISEM; ou então em programas de intercâmbio acadêmico-científico entre universidades.

Segundo Pires (2013), apesar do crescimento significativo do acesso à educação e nas taxas de alfabetização na América Latina nos últimos tempos, tem-se que as metas do programa "Educação para Todos"[8], lançada durante a Conferência Mundial sobre Educação para Todos, no ano de 1990, sob organização e gerência da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO), ainda não foram contempladas integralmente devido tanto a diversos problemas de ordem econômico, político e social desses países quanto à necessidade de isonomia nas suas políticas educacionais. Nesse sentido, Pires (2013, p. 515-516) diz que

> [...] na década de 1990 os sistemas educacionais na América Latina abriram um leque mais amplo para a participação de atores, tais como organizações não governamentais (ONGs), as associações de pais e da sociedade civil, com base em um consenso comum de que a educação é uma prioridade nacional e regional. Mesmo assim, o financiamento da Educação cresce muito devagar e utilização dos fundos disponíveis é ainda insuficiente. A distribuição dos serviços educacionais, em termos de eficiência e qualidade, é bastante injusta. Além disso, há uma ausência

[6] Neste trabalho, quando há referência direta à matemática como área de estudo, disciplina e correlatos, sem ser originário de algum nome próprio de título de instituição acadêmica ou de produção científica, evento, local etc., será grafada como "Matemática", com a letra M maiúscula; já quando for apresentada como um tipo de conhecimento, descoberta, ciência e correlatos, ela será grafada como "matemática", com a letra m minúscula.

[7] Por exemplo: *Sociedad Argentina de Educación Matemática* (Soarem), Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), *Sociedad Chilena de Educación Matemática* (Sochiem), *Asociación Mexicana de Investigadores del uso de Tecnología en Educación Matemática* (AMIUTEM), *Sociedad Peruana de Educación Matemática* (SOPEMAT), *Sociedad de Educación Matemática de Uruguay* (SEMUR), *Sociedad Boliviana de Educación Matemática* (SOBEDM), *Asociación Venezolana de Educación Matemática* (ASOVEMAT), *Comité de Educación Matemática de Paraguay* (Cempa), *Sociedad Ecuatoriana de Matemáticas* (SEDEM), *Asociación Colombiana de Educación Matemática* (ASOCOLME), entre outras.

[8] Para informações mais detalhadas sobre as metas do programa "Educação para Todos", da Unesco, veja em <https://www.cvunesco.org/educacao/educacao-para-todos>. Acesso em: 17 jan. 2021.

> de mecanismos eficazes para que a sociedade civil venha a contribuir para a formulação de políticas na área de educação, bem como permanecem muito restritas a disponibilidade e utilização das tecnologias de informação e comunicação. Apesar dos problemas, a América Latina manteve o ritmo da tendência global de crescente acesso ao ensino básico e no ensino superior, na última década. Em meio a avanços e desafios, consideramos importante para a comunidade de Educação Matemática desses países reflexões a respeito das contribuições atuais e futuras.

Os sistemas educativos latino-americanos, de acordo com Oliveira (2013), enfrentam obstáculos para cuja superação os estudos na área de Educação Matemática podem ser uma significativa contribuição, já que a Matemática é uma disciplina que está presente nos currículos de todos os países, o que possibilita a realização de estudos histórico-comparativos. Por esse motivo, Valente (2009, p. 260) atesta que a Matemática "tem sido referência de estudos comparativos nas avaliações internacionais", o que tornou esse saber um objeto de "[...] propostas internacionais que almejam a construção de um currículo ideal para o ensino da disciplina universalmente". Na atualidade, os estudos comparativos não buscam estabelecer quais as diferenças e as semelhanças que se podem estabelecer entre distintas realidades. Ao contrário, os esforços se direcionam a uma procura pelo "significado que elas têm/tiveram no interior das culturas escolares dos diferentes países" (VALENTE, 2009, p. 270). Esse exercício exige, de um lado, situar-se dentro da cultura escolar e, de outro, uma cuidadosa escolha das fontes. A dialética dessa relação permite não somente aprofundar nos sentidos e significados que emergem de um contexto escolar específico, mas estabelecer relações com outras realidades. Esse conhecimento do outro permite, por sua vez, aprofundar no conhecimento de si. Os estudos histórico-comparativos da Educação Matemática precisam da constituição de grupos de trabalho internacionais que permitam um diálogo permanente entre os pesquisadores.

Nesse sentido, tem-se que, segundo Carvalho (2009; 2014), desde a década de 1990 a Educação Comparada passa por alguns processos de revitalização e de ampliação de requisição por órgãos governamentais e sociedades científicas por causa do efeito da globalização, da crescente processo de internacionalização de economias e de influência direta de agências internacionais nas políticas educacionais em escala mundial – a exemplo dos resultados das avaliações do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa, na sigla em inglês), da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que serviram como uma das referências para a constituição da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) brasileira, como pode ser constatado em seus fundamentos pedagógicos

tanto ao Ensino Infantil e Fundamental (incluindo competências do letramento matemático[9]) quanto ao Ensino Médio[10]; e também pode ser considerado como uma das influências na formulação dos atuais *Núcleos de Aprendizajes Piroritarios*[11] (NAP) para a Educação Secundária argentina, conforme se pode verificar nos cadernos de análise de desempenho da Argentina no Pisa 2018[12], elaborados pela fundação *Centro de Estudios para el Cambio Estructural* (CECE), e no artigo *"PISA*[13] *en el contexto latinoamericano: los casos de Argentina, Brasil y Chile"*[14], na *Revista Latinoamericana de Educación Comparada* (RELEC), de autoria de Mariana Leal e Cristian Perez Centeno, publicado no ano de 2014 –, o que fez haver um crescimento destacável nos estudos de diversas realidades educacionais nacionais dissemelhantes, a fim de compreender seus distintos processos e contextos e também trazer experiências que possibilitaram impulsionar avanços para os sistemas educativos nacionais. De acordo com Pires e Gonçalves (2017, p. 16-17), com base em Ferrer (2002), tem-se que a Educação Comparada possui como pressupostos:

> (a) ilustrar as diferenças ou semelhanças entre os sistemas dos vários países de educação; (b) mostrar a importância que têm os fatores contextuais dos sistemas educativos como elementos explicativos de si mesmo; (c) estabelecer as possíveis influências que têm os sistemas educativos sobre determinados fatores contextuais; (d) contribuir para compreender melhor o nosso sistema educativo mediante o conhecimento do sistema educativos de outros países.

---

[9] Veja com maiores detalhes na página 13 da BNCC para o Ensino Médio, disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>

[10] Vide: (i) Páginas 13, 14 e 15 e observação em nota de rodapé da página 266 acerca de alguma das competências referentes ao letramento matemático, da BNCC para o Ensino Infantil e Ensino Fundamental, disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> (acesso em 11 mar. 2021); e (ii) Páginas 13, 14 e 15 da BNCC para o Ensino Médio, disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192>. (acesso em: 11 mar. 2021).

[11] Núcleos de Aprendizagem Prioritários, em tradução livre para o português.
Os NAP podem ser consultados de forma mais detalhada em:
<https://www.educ.ar/buscador?q=NUCLEOS+DE+APRENDIZAJES+PRIORIT%C3%81RIOS>. Acesso em: 13 mar. 2020.

[12] Cf. CETRÁNGOLO, O.; CURCIO, O. **Pruebas Pisa 2018:** el desempeño educativo de la Argentina. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: CECE, 2020. p. 26-30.
Disponível em: <http://fcece.org.ar/wp-content/uploads/informes/pruebas-pisa-2018.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2020.

[13] Nesse trabalho se convencionou utilizar a sigla "Pisa" para o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, conforme é costumeiramente grafada pelo Ministério da Educação (MEC) brasileiro e o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais "Anísio Teixeira" (Inep), autarquia federal brasileira atrelada ao MEC brasileiro. Todavia, há alguns lugares que grafam a sigla referente ao Programa Internacional de Avaliação de Estudantes como "PISA", a exemplo do artigo citado em questão.

[14] Disponível em: <http://www.saece.com.ar/relec/revistas/6/mon3.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2021.

Em outras palavras, é possível notar que a Educação Comparada é tanto uma metodologia de investigação científica quanto um conhecimento acadêmico[15] que permite analisar, interpretar e compreender sistemas educacionais de distintos locais a partir de uma gama extensa de condicionantes, tendo como um dos pressuposto a possibilidade de transferências educacionais que podem ampliar compreensão local, na elaboração de novas políticas educacionais, a agregar elementos significativos na formação docente, no desenvolvimento de ferramentas-objeto de ensino e aprendizagem de conteúdos, entre outros elementos que podem sugerir ou mesmo agregar em melhorias relevantes ao conhecimento humano, à educação e para ações governamentais. A partir das concepções de Phillips (2012) e Pires e Gonçalves (2015; 2017), no que diz respeito à Educação Matemática, tem-se que a Educação Comparada se pode tornar um frutífero instrumento de investigação e de implementação de técnicas de projetos, já que pode criar pontes de transição para transferência de modelos educacionais e de experimentação e modelagem laboratorial, auxiliar na organização e desenvolvimento de currículos de Matemática, desenvolver estudos mais robustos de filosofia e história da matemática e da Etnomatemática, contribuir para a formação e o desenvolvimento profissional de docentes de Matemática e de área correlatas, analisar com maior profundidade os impactos das teorias de Educação Matemática no ensino e aprendizagem da Matemática, subsidiar estudos e discussões teórico-práticas sobre conteúdos de matemática, para além de um caráter instrumental, visando a matemática como uma ciência valorosa para a formação humana, científica e tecnológica, e também para uma compreensão mais apurada dos resultados das avaliações em larga escala.

Ainda no sentido das avaliações em larga escala, Dias e Gonçalves (2017, p. 247) afirmam que "as avaliações em larga escala, a partir de uma perspectiva quantitativa, representam análises que podem subsidiar estudos em Educação Comparada". Existem duas destas avaliações que incluem o ensino de Matemática, sendo elas: o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa, na sigla em inglês) – já mencionado anteriormente – e o Tendências no Estudo Internacional de Matemática e Ciências (Timss, na sigla em inglês). O primeiro, realizado pela OCDE a cada três anos, avalia tanto as habilidades quanto as gnoses dos estudantes nas áreas de ciências, leitura e matemática, do 8º Ano do Ensino Fundamental.

[15] De acordo com Carvalho (2009), até meados da década de 1980, a Educação Comparada tinha *status* de disciplina acadêmica em cursos de graduação e pós-graduação em educação. Porém, por diversos fatores, acabou perdendo esse prestígio, somente retomando o *status* de disciplina acadêmica recentemente, pelos mesmos motivos que corresponde à ascensão da área já citados anteriormente no presente trabalho.

Já o segundo, de responsabilidade da Associação Internacional para a Avaliação do Desempenho Escolar (IEA, na sigla em inglês), realizado a cada quatro anos, avalia "o desempenho em Matemática e Ciências, nos quartos e oitavos anos de escolarização" (ibid., p. 245).

O Timss considera os currículos nacionais em sua avaliação, enquanto o Pisa "reflete o currículo de alguns países mais do que outros" (DIAS; GONÇALVES, 2017, p. 247), na medida em que, embora ele seja elaborado sem considerar um currículo específico, há influência do grupo de especialistas que elaboram a avaliação e suas origens nacionais.

Esse tratamento de importância dado às avaliações em larga escala na Educação Comparada como campo proveitoso para a Educação Matemática acaba não sendo o mesmo dado aos currículos de Matemática propriamente ditos, que possuem rico potencial em se tornar um campo profícuo à Educação Matemática e ao ensino e aprendizagem da Matemática. Segundo Dias e Gonçalves (2017), embasados pelas concepções de Kazamias (2012[16]), tem-se que, na maioria dos casos, os estudos sobre os currículos de Matemática via Educação Comparada tratam das instituições, sistemas e políticas educacionais, bem como das relações que se estabelecem entre escola e sociedade, e sobre as "mudanças, reformas e desenvolvimento educacionais" (DIAS; GONÇALVES, 2017, p. 238). Ambos os autores sustentam que a

> [...] compreensão de Currículo transcende uma visão tradicional, focado em uma racionalidade técnica, como construção sociocultural, fundamentada por discursos e teorias de bases críticas e/ou pós-críticas, que o sustentam na prática educacional e na ação educativa a partir da seleção e legitimação de saberes (ibid., idem).

Para Dias e Gonçalves, a construção do currículo é um "processo de configuração, implantação, concretização e expressão em determinadas práticas pedagógicas e na sua avaliação, como resultado das diversas intervenções que nele operam" (ibid., p. 239). Trata-se, assim, de um projeto condicionado pelo seu contexto cultural, social, político e administrativo, mas que só se concretiza na realidade da escola e das salas de aula. Conforme os autores, "o currículo é construído a partir do cruzamento de influências e campos de atividade inter-relacionados e diferenciados" (ibid., p. 240). Esses campos correspondem aos seguintes níveis e fases: currículo prescrito; currículo apresentado aos professores; currículo

[16] No artigo original de Dias e Gonçalves (2017), a referência ao texto de Andreas M. Kazamias está como sendo do ano de 2015, e nas referências bibliográficas como inclusa ao volume I da obra "Educação comparada: panorama internacional e perspectivas". Contudo, como pode ser constatado em <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000225468> (acesso em: 17 jan. 2021), o texto de Kazamias, na verdade, é do ano de 2012 e se encontra no volume II da obra citada.

moldado pelos professores; currículo em ação; currículo realizado; e, currículo avaliado (SACRISTÁN, 1998 *apud* DIAS; GONÇALVES, 2017, idem). Ainda de acordo com Dias e Gonçalves, "tais níveis ou fases possam 'objetivar' metodologicamente as investigações em 'Currículo', podendo revelar-se como um caminho para subsidiar os estudos internacionais e comparativos curriculares no âmbito da Educação Matemática" (ibid., p. 242). Dessa forma, os estudos comparados devem considerar:

> [...] os diversos processos de planificação e implementação curricular em sistemas educacionais (internacional, supranacional ou intranacional) – considerando nesse interim os diversos discursos (e tensões) imbuídos nas políticas curriculares, bem como seus condicionantes culturais, sociais, econômicos e políticos – visando compreender as diversas lógicas e intencionalidades que sustentam a organização e/ou desenvolvimento curricular de Matemática nos sistemas educacionais investigados (ibid., p. 238).

Se a Educação Comparada busca se consolidar como uma área em constante ascensão de prestígio no meio acadêmico-científico-cultural, necessita tomar para si novas problemáticas, constituindo "objetos de estudo em torno de um 'vaivém' entre local e global, nomeadamente no que diz respeito ao trabalho realizado nas instituições educativas (currículo, administração escolar, professor, avaliação e demais)" e "aumentar o repertório metodológico do trabalho comparativo (desde as análises macroeconômicas e políticas até às perspectivas geográficas e não no intuito de encontrar o 'melhor' método)" (NÓVOA, 2009; PIRES; GONÇALVES, 2015 *apud* PIRES; GONÇALVES, 2017, p. 555). É justamente no sentido de contemplar essas exigências supracitadas, sendo um importante contributo à Educação Comparada enquanto instrumento de investigação à Educação Matemática, e de compreender os distintos cenários educacionais de duas nações vizinhas é que esse artigo se organiza, visando, por meio de pesquisa bibliográfica e documental de ordem qualitativa à luz da Educação Comparada, compreender quais são os aspectos comuns e diferenças entre o ensino de Matemática na elaboração das atuais propostas curriculares nacionais do Brasil (Ensino Médio) e da Argentina (*Educación Secundaria*[17]), que são países que dividem fronteiras, que possuem alguns aspectos historiográficos, econômicos, políticos, sociais e educacionais em comum, e que também tiveram resultados próximos na proficiência em matemática e leitura nos últimos exames do Pisa, conforme pode ser verificado com detalhes em <http://www.oecd.org/pisa/data/> (acesso em: 16 de janeiro de 2021). Inclusive, é válido ressaltar aqui que, até aproximadamente ao ano de 2015, tanto Brasil (especificamente até

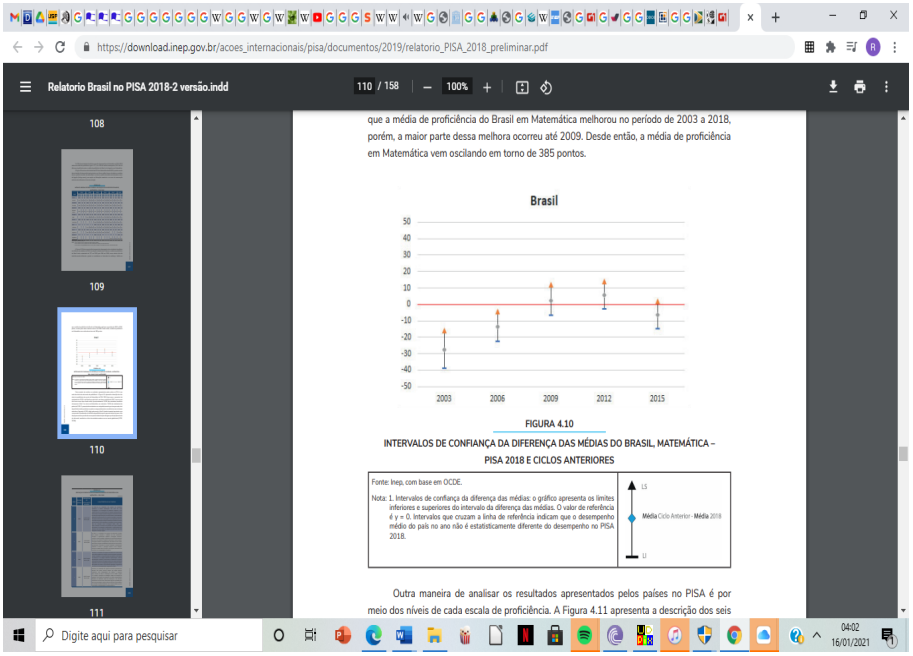
[17] Educação Secundária, em tradução livre para o português. Equivale ao Ensino Médio, no Brasil.

2012) quanto a Argentina (especificamente até 2015), apesar de se encontrarem abaixo da meta estipulada pela OCDE, estavam em relevante ascensão no cenário da América Latina no que diz respeito à proficiência geral de Matemática (figuras 1, 2, 3 e 4), havendo uma queda significativa de rendimento nos resultados gerais posteriores a 2015 (figuras 3, 4, 5, 6, 7 e 8):

Figura 1 – Infográfico da evolução das médias gerais do Brasil no Pisa, na proficiência de matemática, entre os anos 2000 e 2015

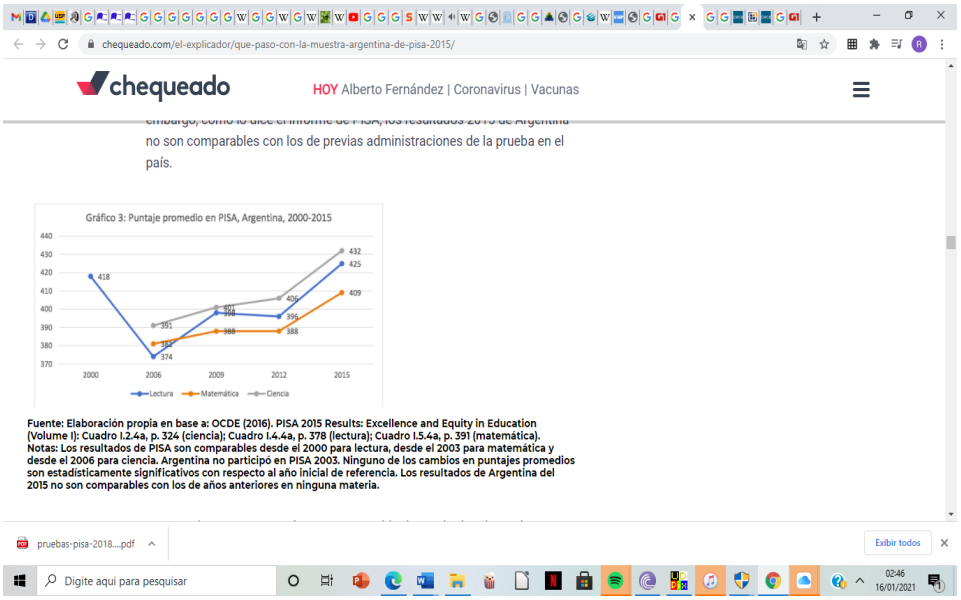
Fonte: Portal de notícias G1 – O portal de notícias da Globo, 2016

Figura 2 – Gráficos dos intervalos de confiança da diferença das médias do Brasil, em matemática, e ciclos anteriores, entre os anos de 2003 e 2015, em comparação com os resultados de 2018



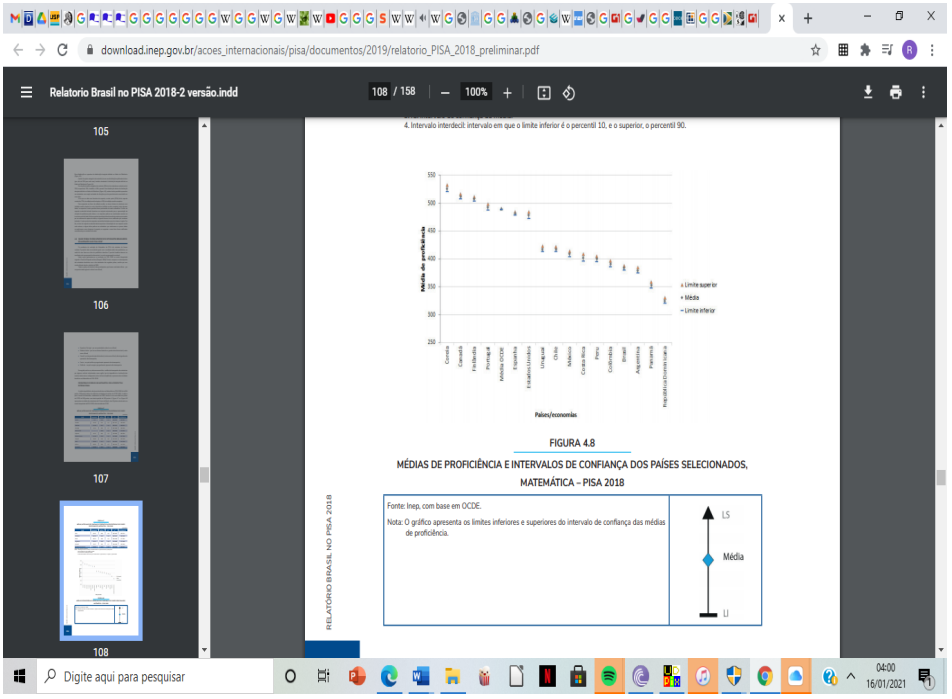
Fonte: Inep, 2019

Figura 3 – Representação gráfica comparativa sobre a evolução da média geral argentina no Pisa, em ciência, leitura e matemática, entre os anos 2000 e 2015



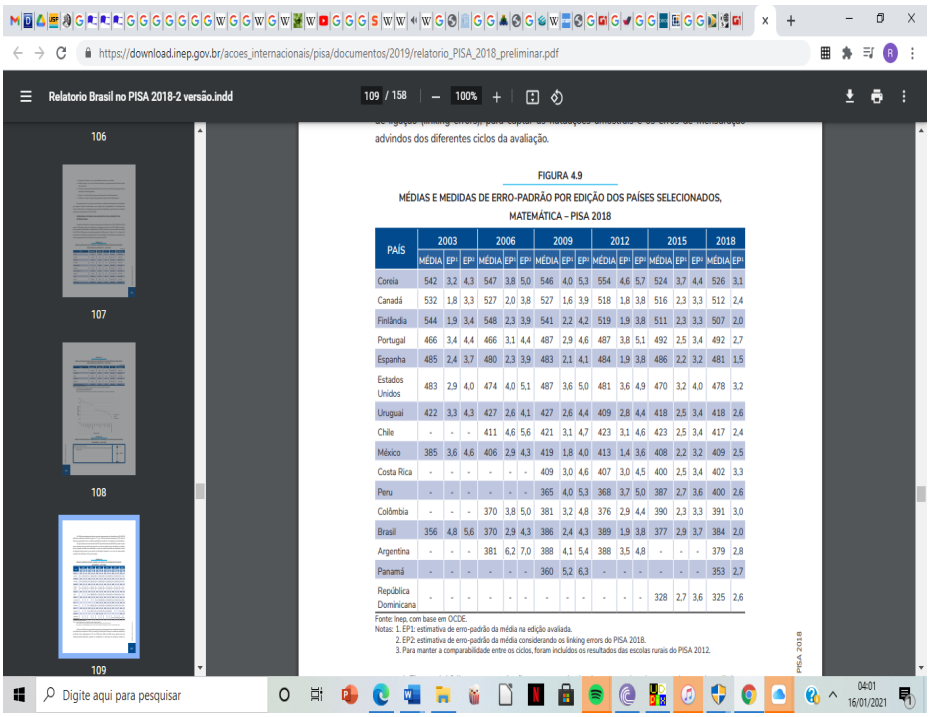
Fonte: Portal Chequeado, da fundação "*La Voz Pública*", 2016

Figura 4 – Gráfico representativo das médias de proficiência em matemática e intervalos de confiança de países latino-americanos participantes do Pisa, em relação aos resultados de 2018



Fonte: Inep, 2019

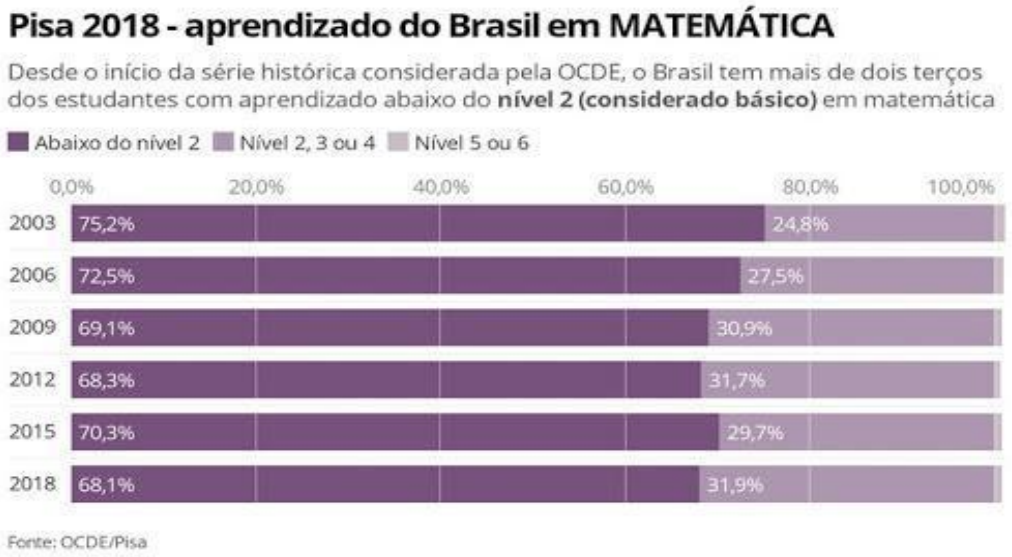
Figura 5 – Quadro comparativo de médias e medidas de erro-padrão por edição dos países de Brasil, Argentina e alguns outros países participantes do Pisa, de América, Europa e Ásia, entre os anos de 2003 e 2018



PAÍS	2003			2006			2009			2012			2015			2018		
	MÉDIA	EP¹	EP²	MÉDIA	EP¹	EP²	MÉDIA	EP¹	EP²	MÉDIA	EP¹	EP²	MÉDIA	EP¹	EP²	MÉDIA	EP¹	EP²
Coreia	542	3,2	4,3	547	3,8	5,0	546	4,0	5,3	554	4,6	5,7	524	3,7	4,4	526	3,1	
Canadá	532	1,8	3,3	527	2,0	3,8	527	1,6	3,9	518	1,8	3,8	516	2,3	3,3	512	2,4	
Finlândia	544	1,9	3,4	548	2,3	3,9	541	2,2	4,2	519	1,9	3,8	511	2,3	3,3	507	2,0	
Portugal	466	3,4	4,4	466	3,1	4,4	487	2,9	4,6	487	3,8	5,1	492	2,5	3,4	492	2,7	
Espanha	485	2,4	3,7	480	2,3	3,9	483	2,1	4,1	484	1,9	3,8	486	2,2	3,2	481	1,5	
Estados Unidos	483	2,9	4,0	474	4,0	5,1	487	3,6	5,0	481	3,6	4,9	470	3,2	4,0	478	3,2	
Uruguai	422	3,3	4,3	427	2,6	4,1	427	2,6	4,4	409	2,8	4,4	418	2,5	3,4	418	2,6	
Chile	-	-	-	411	4,6	5,6	421	3,1	4,7	423	3,1	4,6	423	2,5	3,4	417	2,4	
México	385	3,6	4,6	406	2,9	4,3	419	1,8	4,0	413	1,4	3,6	408	2,2	3,2	409	2,5	
Costa Rica	-	-	-	-	-	-	409	3,0	4,6	407	3,0	4,5	400	2,5	3,4	402	3,3	
Peru	-	-	-	-	-	-	365	4,0	5,3	368	3,7	5,0	387	2,7	3,6	400	2,6	
Colômbia	-	-	-	370	3,8	5,0	381	3,2	4,8	376	2,9	4,4	390	2,3	3,3	391	3,0	
Brasil	356	4,8	5,6	370	2,9	4,3	386	2,4	4,3	389	1,9	3,8	377	2,9	3,7	384	2,0	
Argentina	-	-	-	381	6,2	7,0	388	4,1	5,4	388	3,5	4,8	-	-	-	379	2,8	
Panamá	-	-	-	-	-	-	360	5,2	6,3	-	-	-	-	-	-	353	2,7	
República Dominicana	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	328	2,7	3,6	325	2,6	

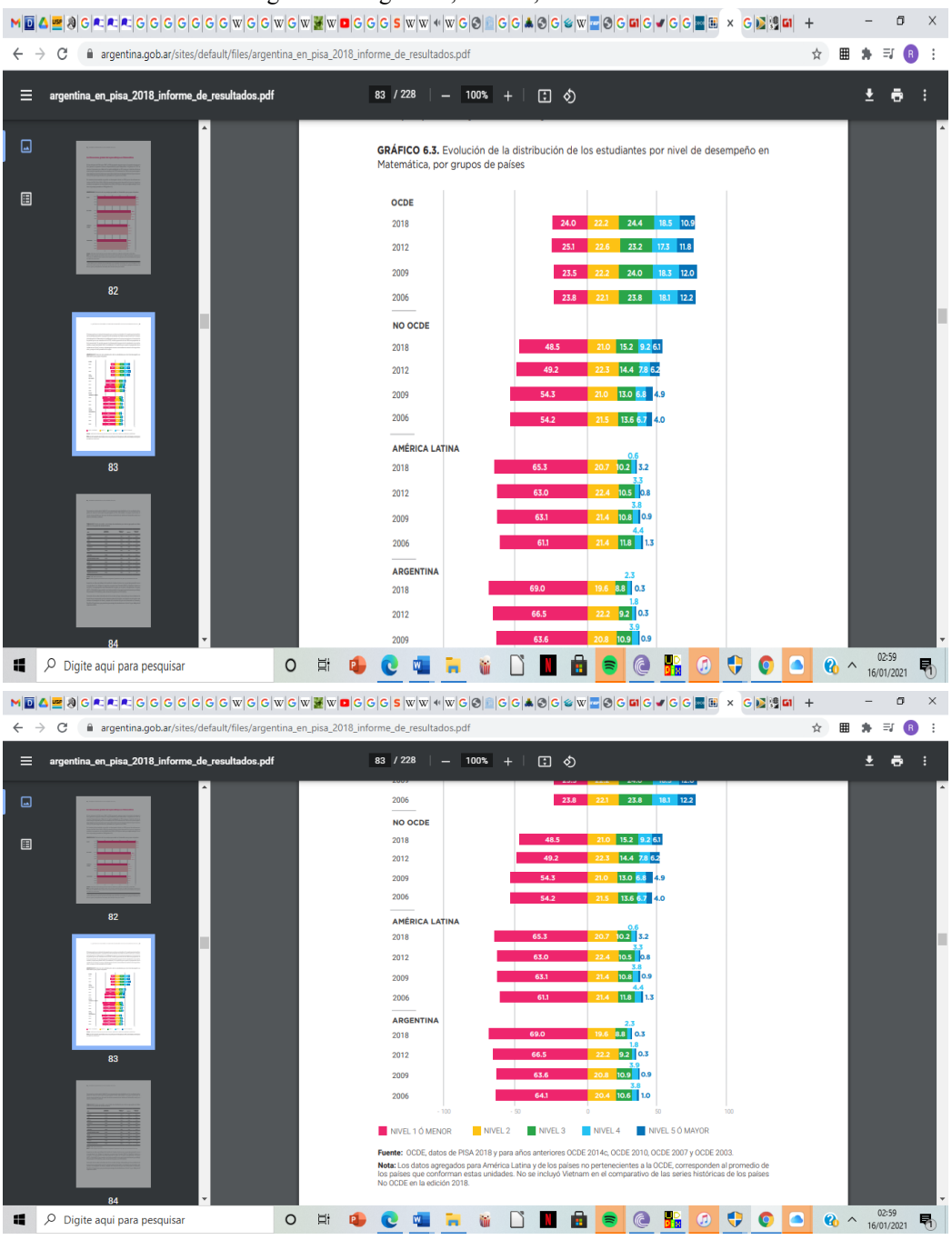
Fonte: Inep, 2019

Figura 6 – Infográfico sobre as comparações dos níveis de proficiência em matemática do Brasil, no Pisa, entre os anos de 2003 e 2018



Fonte: Thinkonomics, 2019

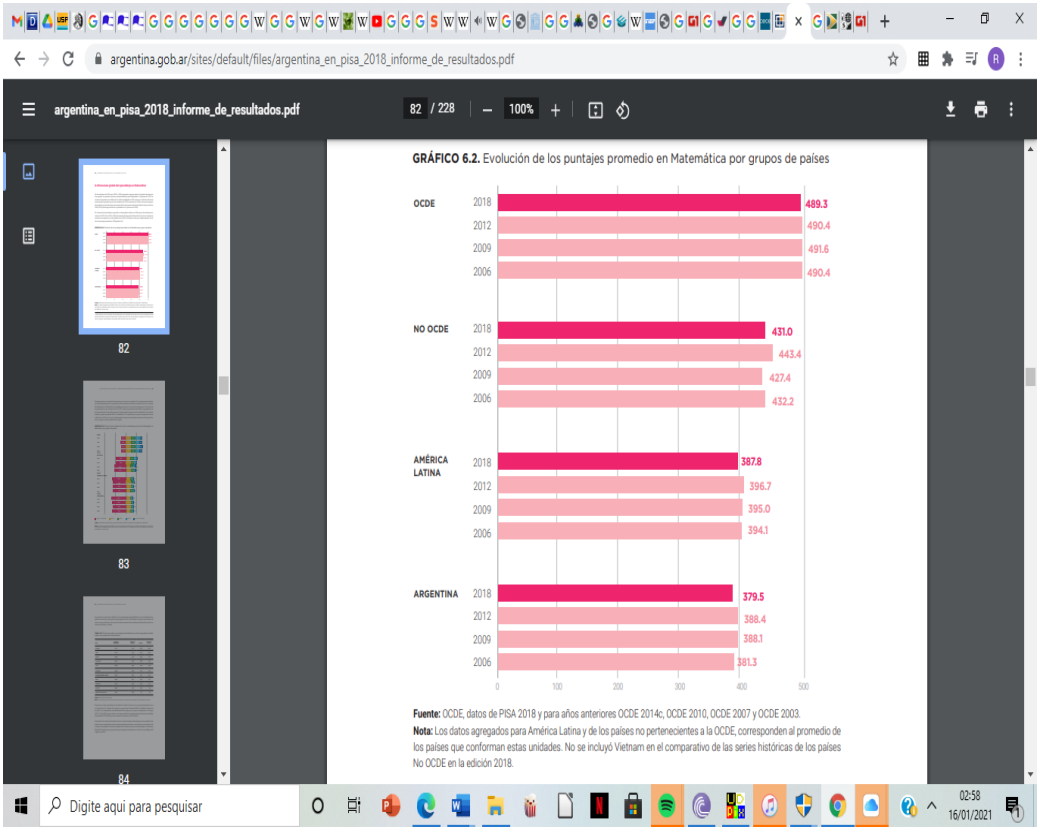
Figura 7 – Gráfico representativo das comparações dos níveis de proficiência em matemática entre a OCDE, a América Latina em geral e a Argentina, no Pisa, referente aos anos de 2003 a 2018



Fonte: Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la República Argentina/Secretaria de Evaluación Educativa[18], 2019

[18] Secretaria de Avaliação Educativa, em tradução livre para o português.

Figura 8 – Quadro representativo por gráficos da evolução das médias gerais na proficiência em matemática da Argentina no Pisa, entre os anos de 2006 e 2018, em comparação com as metas da OCDE e as médias gerais da OCDE e da América Latina, no mesmo período



Fonte: Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la República Argentina[19]/Secretaria de Evaluación Educativa, 2019

Destarte, percebe-se que nos interessa compreender, à luz da Educação Comparada, de que maneira a Educação Matemática tem influenciado diretamente na elaboração das propostas curriculares atuais de Matemática do ensino secundário brasileiro e argentino e quais são os impactos existentes nesse processo, do qual nos interessa e que pretendemos versar a respeito.

A partir dos objetos e elementos que foram apresentados até aqui, motivou-se o surgimento de questões relevantes, que tiveram por função tanto delimitar quanto possibilitar o andamento e a elaboração desse artigo, sendo apresentadas a seguir.

[19] Ministério de Educação, Cultura, Ciência e Tecnologia da República Argentina, em tradução livre para o português.

2 PROBLEMAS E HIPÓTESES DE PESQUISA *(*OU *OS PONTOS DE PARTIDA)*

Conforme Gil (2008, p. 38), tem-se que "na acepção científica, problema é qualquer questão não solvida e que é objeto de discussão, em qualquer domínio do conhecimento". Levando-se em conta a premissa de Gil, buscou-se compreender quais são as proximidades e distanciamentos entre a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BNCC-EM) brasileira e os *Nucleos de Aprendizajes Prioritarios* (NAP) de *la Educación Secundaria* argentina, para o ensino e aprendizagem de matemática.

A partir dessa pergunta, surgiram algumas outras questões específicas que possibilitaram argumentar e responder a principal pergunta de investigação descrita anteriormente:

1) Quais são os aspectos comuns e diferenças entre o ensino e aprendizagem de Matemática na elaboração das propostas curriculares nacionais atuais do Brasil (Ensino Médio) e da Argentina (*Educación Secundaria*)?

2) Quais são os fundamentos didático-pedagógicos que orientam a elaboração das atuais propostas curriculares do Brasil (Ensino Médio) e da Argentina (*Educación Secundaria*), e de que forma ocorre a implementação desses projetos curriculares em ambos os Estados?

Instigado pelas perguntas supracitadas e para delinear a pesquisa mais adequadamente, construindo um quadro de apoio comparativo, emergiu-se, assim, algumas hipóteses de pesquisa:

a) De acordo com D'Ambrosio (2015), a maneira como se desenvolveu a pesquisa e o ensino e aprendizagem de matemática no Brasil e na Argentina não foi da mesma forma, e isto ocorreu desde o processo de colonização de ambas as nações até a formação social, inclusive, após suas independências[20] Mesmo no período colonial espanhol, já havia universidades, institutos de pesquisa e alguma produção científica de relevância na Argentina, enquanto no Brasil isso se inaugura apenas ao fim do período colonial, dando-se destaque à criação da Academia Real Militar do Rio de Janeiro, em 1810, nesse processo. Desde o fim do século XIX, a Argentina já conta com uma das principais instituições científicas fora da

[20] No Brasil, a independência foi proclamada em 7 de setembro de 1822. Já na Argentina, foi em 9 de julho de 1816.

Europa, que é a *Sociedad Científica Argentina*[21], instituída em 1872, e que existe até os dias atuais.

Ainda conforme D'Ambrosio, desde 1880 se há uma preocupação na Argentina com respeito às investigações e estudos de Educação Matemática, enquanto no Brasil isso ocorre somente de fato no século XX.

b) No Brasil, desde a Constituição Federal de 1988 (conhecida como a "Constituição Cidadã"), discutia-se sobre a elaboração de uma base nacional comum curricular, todavia, isto somente se concretizou em 2018 e foi implementada em todo território nacional a partir do ano de 2019. Já na Argentina, desde sua reforma educacional de 2006, por meio da Lei Federal argentina n.º 26.206/2006[22] (mais conhecida como *Ley de Educación Nacional*), houve a criação dos *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios* (NAP), que estão em constante atualização e que se assemelham na tipificação à nossa Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no sentido de ser um núcleo comum de aprendizagem de referência aos projetos curriculares do país todo e por estar balizado por princípios pedagógicos gerais e específicos, habilidades e competências. Esses NAP, elaborados pelo *Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la República Argentina*, foram implementados em todo território nacional argentino a partir de 2012, servindo como parâmetro/referência aos projetos curriculares próprios de cada província argentina e à Cidade Autônoma de Buenos Aires, que se diferencia da província de Buenos Aires. Em análise prévia, pôde-se perceber que cada província argentina e a Cidade Autônoma de Buenos Aires possuem seus próprios NAP, referenciados diretamente no NAP em nível nacional e em outros aportes teóricos e práticos que possibilitam auxiliar na suplantação das necessidades educacionais regionais.

Tendo em vista as perguntas e as premissas aqui levantadas nesta seção, com o intuito de buscar esclarecimentos valorosos e respostas significativas aos anseios propostos, estabeleceu-se alguns objetivos importantes à pesquisa, sendo-os, a seguir, denotados.

---

[21] Para maiores informações sobre a *Sociedad Científica Argentina*, consulte o seguinte endereço da *Web*: <http://cientifica.org.ar/>. Acesso em: 19 jan. 2021.

[22] Para maiores detalhamentos descritivos a respeito da Lei Federal argentina n.º 26.206/2006 ou *Ley de Educación Nacional*, consulte-a via:
<https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/ley-de-educ-nac-58ac89392ea4c.pdf>. Acesso em: 29 set. 2020.

3 OBJETIVOS (OU *SAPERE AUDE*)

Vamos desde já adiantar os objetivos que rondaram este artigo.

O objetivo *geral* desse trabalho foi: Fazer um estudo comparativo acerca das similitudes e dissensões existentes entre a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BNCC-EM) brasileira e os *Nucleos de Aprendizajes Prioritarios de la Educación Secundaria* argentina, para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Do objetivo *geral*, emergiram os seguintes objetivos *específicos*: (i) Identificar as proximidades e distanciamentos das atuais propostas curriculares nacionais de Matemática de Brasil (Ensino Médio) e Argentina (*Educación Secundaria*); (ii) investigar e discutir sobre a implementação e aquiescência das atuais propostas curriculares nacionais de Matemática do Brasil (Ensino Médio) e Argentina (*Educación Secundaria*); e (iii) buscar ser um contributo à Educação Comparada para sua ascensão e prestígio no meio acadêmico-científico e ser também um instrumento basilar de análise às futuras reformas curriculares de Brasil e Argentina.

E o que leva a estudar cada uma das coisas que foram descritas anteriormente? Quais são as asserções de valor do conhecimento a ser produzido pelo presente trabalho?

Em suma, como se pôde notar, este artigo tem por pretensão buscar compreender as semelhanças e distanciamentos que há entre currículos de Matemática de dois países que dividem o mesmo continente e com raízes na cultura ibero-americana, e perceber de que modo a integração latino-americana pode proporcionar, propiciar e implementar projetos que busquem aperfeiçoar o ensino e aprendizagem de matemática em ambos os países. A justificativa para tanto e o embasamento teórico serão apresentados com maiores detalhes na seção seguinte.

4 JUSTIFICATIVAS E EMBASAMENTO TEÓRICO (OU *TEORIA E PRAXIS*)

Durante as últimas décadas, diferentes países da América Latina iniciaram processos de reformas educacionais, especialmente no campo curricular, com o objetivo de melhorar a qualidade da formação acadêmica e profissional de seus estudantes, assim como de contribuir

no desenvolvimento político, econômico, social e cultural de suas regiões. Para Montoro (1974, p. 99),

> Um país só se desenvolve efetivamente na medida em que tiver uma população com capacidade e competência para realizar as transformações técnicas e sociais exigidas pelo progresso humano. Daí a importância fundamental da educação e da cultura no processo do desenvolvimento.

De acordo com o autor, a "política educacional é o instrumento mais poderoso e justo de que dispõe o Governo para promover o desenvolvimento político, econômico, social e cultural de uma nação" (MONTORO, 1974, p. 99). No âmbito político, o impacto da educação se expressa, segundo o autor, em um "aperfeiçoamento na organização do Poder", isto é, na capacidade de uma comunidade informada de incidir nas decisões que afetam sua comunidade, com base no respeito à justiça e aos direitos humanos.

O autor também destaca o caráter fundamental do desenvolvimento cultural de um país, a seu ver "o ponto de partida de seu verdadeiro desenvolvimento, no plano político, econômico e social" (MONTORO, 1974, p. 99). Embora a análise de Montoro se centre em uma visão positivista do desenvolvimento e não discuta as contradições históricas, sociais e econômicas do nosso continente, sua leitura posiciona a educação como base fundamental para a construção de uma sociedade mais democrática e justa.

Nesse contexto, a elaboração de propostas curriculares com diretrizes, bases e sugestões claras tem sido fundamental nas reformas educacionais implantadas em países como Brasil e Argentina. Em uma região particularmente dinâmica, como é o caso da América Latina, mudanças desse tipo incentivam uma reflexão que considere o currículo como processo de "construção e seleção de conhecimentos e práticas produzidas em contextos concretos e de acordo com dinâmicas sociais, políticas, culturais, intelectuais e pedagógicas" (GOMES, 2007, p. 9). Essa compreensão ultrapassa o sentido comumente atribuído ao currículo como conjunto de conteúdos disciplinares a serem reproduzidos para os alunos, ou ainda como uma relação de conteúdos, competências e habilidades organizadas em sequências lógicas. Ao contrário, trata-se de pensar os conhecimentos que se pretendem ensinar e as práticas que buscam ser impulsionadas de acordo com os contextos históricos e sociais em que se inserem. Por esse motivo não se trata de blocos estáticos, mas de construções que precisam ser reinterpretadas em função das singularidades e das dinâmicas sociais de cada país. Resgata-se assim a etimologia latina da palavra *currículo,* cuja origem *scurrere* significa

correr e remete à ideia de curso, trajetória ou carreira. O currículo é um importante instrumento para a educação, onde se estabelecem bases, diretrizes, conteúdos, conceitos, habilidades, competências e atividades consideradas necessárias para a formação dos estudantes, dos docentes e da direção escolar. No caso do Brasil, no currículo também se expressa o Projeto Político Pedagógico (PPP) em vigor.

Por outro lado, a discussão sobre currículo deve considerar o caráter integral da formação dos sujeitos e, portanto, apontar à sociedade que se deseja construir. Não basta apenas elencar conteúdos, competências e habilidades considerados fundamentais para uma disciplina, mas debater o tipo de conhecimento que busca ser ensinado. Para abordar essas questões, as diferentes teorias de currículo discutem problemas relacionados com a natureza humana, bem como questões relacionadas à natureza da aprendizagem, do conhecimento, da cultura e da sociedade (SILVA, 2010). Distintas matizes e perspectivas sobre essas questões conformam a teoria de currículo que, de acordo com Silva (2010, p. 14), precisa considerar "como pano de fundo [...] qual conhecimento deve ser ensinado". Neste sentido, o estudo proposto busca comparar qualitativamente os processos curriculares para o segundo grau na área de Matemática da Argentina e do Brasil. Essa análise considera que a Educação comparada:

> [...] não se reduz a recortes descontextualizados de países e suas simplificadas comparações, mas sim de pesquisas que analisam criticamente (e qualitativamente) nações diversas a partir dos seus condicionantes sociais, econômicos, culturais, políticos e educacionais. (PIRES; GONÇALVES, 2015).

Por esse motivo, a investigação examina os princípios gerais da Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BNCC-EM) brasileira e dos *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios* (NAP) de *la Educación Secundaria* argentina, considerando os processos históricos e as escolhas teóricas, didático-pedagógicas e metodológicas que fundamentam as mudanças curriculares realizadas em ambos os países; e a Matemática como área do conhecimento. Por meio do exame desses aspectos, identifica-se qual viés do ensino de matemática é valorizado nos dois currículos; quais princípios metodológicos são propostos para a aprendizagem escolar, e qual *status* é dado à matemática em ambos os documentos. Considera-se que esses elementos são essenciais para a formação integral dos sujeitos, na medida em que contribuem para a construção de uma visão crítica da realidade educativa em Matemática.

Apesar de que tanto a Argentina como o Brasil apresentam diferenças importantes em seus processos de construção social e nas reformas educacionais implantadas nos últimos anos, Oliveira (2013), Pires (2014) e D'Ambrosio (2015) afirmam que existem proximidades bastante destacáveis no que diz respeito aos marcos dos princípios gerais para o ensino e o aprendizado da Matemática. Nos dois casos é possível constatar que: (i) A Matemática é reconhecida como uma área específica de conhecimento e oriunda da produção humana; (ii) a matemática é considerada essencial para a formação integral dos estudantes e para o desenvolvimento social; (iii) a resolução de problemas é considerada uma importante ferramenta-objeto para o ensino e a aprendizagem da matemática; e (iv) as aulas e parte significativa do aprendizado estão centrado na figura do professor.

Contudo, mesmo ambas as diretrizes se configurarem no formato de habilidades e competências, uma diferença central é que a BNCC tem por base a formação por habilidades e competências sem ser seriada, transitando entre formal e crítico; enquanto nos NAP se verifica uma subdivisão das competências e habilidades de forma seriada e por áreas, explorando os principais aspectos em cada uma das competências e sugestionando formas que podem ser trabalhadas, tendo uma preocupação com a formalização matemática e transitando também também entre formal e crítico.

A escolha de realizar um estudo comparado se fundamenta na importância desse tipo de investigação para o desenvolvimento geral das ciências (CANTORAL, 2017) e na possibilidade de ampliar os estudos retrospectivos e prospectivos nesta área, no intuito de identificar a existência ou não de uma tendência regional. A importância de um estudo dessa natureza se fundamenta também no preceito estabelecido pela Constituição Federal brasileira de buscar uma maior "integração econômica, política, social e cultural dos povos da América Latina, visando à formação de uma comunidade latino-americana de nações" (BRASIL, 1988, Art. 4º, Parágrafo Único).

No campo particular da educação e das políticas públicas em um entorno global, os estudos comparativos qualitativos, apoiados em revisões documentais e bibliográficas, são particularmente relevantes. Em geral, de acordo com Cantoral (2017), a literatura sobre estudos comparados mostra uma tendência de ascensão nos últimos anos, o que pode constatar-se no aumento de revistas indexadas, como a *Revista Latinoamericana de*

Educación Comparada (RELEC)[23], da *Sociedad Argentina de Estudios Comparados en Educación* (SAECE). Também é possível de se confirma isso por meio da publicação de livros como *"Internacionalización: políticas educativas y reflexión pedagógica en un medio global"* (CARUSO; TENORTH, 2011). No entanto, esses avanços, para Cantoral (2017), são insuficientes, na medida em que não têm se constituído como linhas de pesquisa nas reuniões científicas da área, realizadas na América Latina, como a Conferência Interamericana de Educação Matemática[24] (CIAEM), da *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), e a Reunião Latino-americana de Matemática Educativa[25] (RELME), do Comité Latino-americano de Matemática Educativa (CLAME). Nesse sentido, a presente pesquisa tem a dupla pretensão de contribuir na consolidação dos estudos comparados de Matemática como linha de pesquisa e em uma maior compreensão do âmbito educativo regional.

Uma consulta minuciosa do Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Pessoal do Nível Superior (CAPES)[26] e das referências elencadas na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações[27] da Universidade de São Paulo (USP), mostra que há uma escassez de estudos comparados sobre os currículos de Matemática do Ensino Médio brasileiro e da Educación Secundaria argentina, sendo que as pesquisas mais recentes costumam tratar apenas de aspectos relacionados ao Projeto Político Pedagógico (PPP) das escolas brasileiras. São necessários, portanto, estudos atualizados que examinem o marco dos princípios gerais da Matemática nos currículos prescritos e praticados. Na medida em que avançamos em uma melhor compreensão das dinâmicas regionais, é possível pensar em intercâmbios de experiências que contribuam com o conhecimento educacional no campo da Matemática escolar na Argentina e no Brasil.

A partir do que foi apresentado, podem aparecer os seguintes questionamentos: Quais foram os procedimentos necessários para a realização do presente trabalho?

É o que será visto na próxima seção, onde se detalha sobre os procedimentos metodológicos para a realização e futuras discussões de resultados.

---

[23] Disponível em: <http://www.saece.com.ar/relec/abstract.php?xarchivo=revistas/10/art7.inc>. Acesso em: 23 nov. 2020.
[24] Disponível em: <https://conferencia.ciaem-redumate.org/>. Acesso em: 23 nov. 2020.
[25] Disponível em: <https://clame-relme.org/>. Acesso em: 23 nov. 2020.
[26] Disponível em: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>. Acesso em: 21 nov. 2020.
[27] Disponível em: <https://www.teses.usp.br/>. Acesso em: 21 nov. 2020.

5 PROCEDIMENTOS DE PESQUISA (OU *APRENDIZADO E CONSTRUÇÃO)*

Tendo em vista ao que se almejou identificar, analisar e obter como resultados neste trabalho, de imediato se tem que os procedimentos de pesquisa aplicados acompanharam os objetivos específicos, dispostos na seção 3 “Objetivos”, do presente trabalho.

Inicialmente se traçou um debate bibliográfico acerca da Educação Comparada. As fontes bibliográficas foram utilizadas para compreender principalmente os aspectos conceituais e epistemológicos da Educação Comparada. Isto serviu para introduzir os mecanismos de estudos necessários para o prosseguimento da pesquisa.

Após essa discussão inicial, buscou-se compreender sobre o processo de elaboração dos currículos de Matemática de Brasil e Argentina, tendo um olhar voltado às diferentes vertentes pedagógicas que os envolvem, identificando os impactos da Educação Matemática nesse processo e analisando a trajetória das reformas curriculares de ambos os países, atentando-se à maneira de como a matemática é organizada e contemplada em cada um desses países, seu papel dentro dos currículos prescritos do segundo grau (em outras palavras, verificar quais são os aspectos da matemática que há maior valor didático para cada país e se a abordagem é mais instrumental ou investigativa) e qual sua função para a formação integral dos sujeitos. Esses estudos foram desenvolvidos com o apoio em documentos legais e de diretrizes e bases da Educação, de Brasil e Argentina e literatura consagrada e atualizada de área, analisando-os à luz da Educação Comparada. Após isso, examinou-se comparativamente as atuais propostas curriculares de Matemática de Brasil e Argentina, do segundo grau, contemplando-se suas estruturas, a estima quanto ao ensino e aprendizagem da matemática e os marcos dos princípios gerais (para o ensino de matemática). Para isso, houve a necessidade de um estudo qualitativo dos documentos de diretrizes e bases atuais da Educação de Brasil e Argentina, sobretudo a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BNCC-EM) brasileira e os dos *Nucleos de Aprendizajes Prioritarios* (NAP) da educação secundária argentina.

Como o presente trabalho primou por algo de ordem qualitativa, com a finalidade de identificar, analisar e compreender quais são as proximidades e distanciamentos que existem entre a BNCC-EM brasileira e os NAP argentinos para o ensino da Matemática no segundo

grau, optou-se como metodologia de trabalho científico a pesquisa documental e a pesquisa bibliográfica, acompanhadas de uma análise historiográfica, contextual, comparativa e crítica.

Como se sabe, a pesquisa bibliográfica e a documental se referem a procedimentos utilizados pelos pesquisadores para fundamentar investigações de caráter científico. Enquanto a primeira considera um conjunto de produções científicas que se comunica com "as principais teorias que norteiam o trabalho científico" (PIZZANI *et al*, 2012, p. 54), a pesquisa documental se refere à análise de fontes primárias, isto é, a documentos que contém informações originais, e que não foram analisadas antes por outros autores, ambas indo de encontro ao que se necessita para delinear a pesquisa proposta.

Entre as vantagens da pesquisa bibliográfica podemos mencionar que se trata de obras cuja validade científica é reconhecida dentro da disciplina de estudo, ao mesmo tempo em que buscam recolher o conjunto de contribuições anteriores, a partir das quais formulam novas perguntas e hipóteses, e propõem novas perspectivas de análise. Já em relação à pesquisa documental, as vantagens estão em que os documentos são fontes estáveis, isto é, permanecem no tempo e podem ser consultadas muitas vezes e servir de base para diferentes estudos. Nesse tipo de fonte "podem ser retiradas evidências que fundamentem afirmações e declarações do pesquisador" (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p. 39). Trata-se, segundo as autoras, de "fontes naturais", que "surgem num determinado contexto e fornecem informações sobre esse mesmo contexto" (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p. 38), além de permitirem o acesso a dados quando não é possível entrar em contato com o sujeito, "ou quando a interação com os sujeitos pode alterar seu comportamento ou seus pontos de vista" (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p. 39). Ou seja, a utilização da pesquisa documental e da pesquisa bibliográfica foram fundamentais tanto para a aquisição de materiais quanto para os seus entendimentos e análises críticas, que vieram acompanhadas do refinamento adequado das fontes bibliográficas e documentais utilizadas, concomitantemente de um estudo comparado minucioso. Inclusive esse processo foi essencial para a avaliação dos resultados obtidos, verificando se o levantamento realizado esgota a produção científica e teórica no campo onde se insere o tema de investigação e se ele responde, de maneira pertinente e consistente, ao problema e objetivos propostos na seção anterior deste trabalho, sem promover errôneas interpretações ou mesmo revisionismos que levem a equivocadas concepções.

Do que foi exposto até este momento, podem surgir as seguintes perguntas em mente: Viu-se até então os procedimentos que regeram o encaminhamento da pesquisa relatada neste

trabalho e um quadro comparativo dos aspectos dos princípios gerais que norteiam as diretrizes curriculares para a educação secundária de Brasil e Argentina. E o que dizer dos princípios particulares como os conteúdos, os entes pedagógicos e a maneira como decorre a avaliação?

É o que será elucidado na próxima seção.

6 ANÁLISE COMPARATIVA LACÔNICA DAS DIRETRIZES CURRICULARES DE BRASIL E O NAP ARGENTINO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS (OU *REBUS SIC STANTIBUS* E *PACTA SUNT SERVANDA)*

Discorrido em seções anteriores em procedimento circunspecto, tem-se que os *Nucleos de Aprendizajes Prioritarios* (NAP) de *la Educación Secundaria* argentina quanto a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BNCC-EM) brasileira as áreas do conhecimento são delineadas por competências e habilidades, embasadas em um conjunto de marco de princípios gerais que fundamentam o ensino e aprendizagem de cada uma das áreas do conhecimento durante todo o percurso do ensino secundário, possuindo como um dos objetivos a formação de uma base nacional comum curricular que possa nivelar os saberes considerados essenciais para a formação integral dos sujeitos e de uma sociedade mais acolhedora, bem como garantir uma unidade dos sistemas educativos de seus territórios nacionais.

Mesmo que o desenho das propostas curriculares seja semelhante entre si e tenham alguns objetivos formativos em comum, ambas as diretrizes possuem diferenças significativas. Por exemplo, no NAP de Matemática para o ensino secundário se observa com clareza haver uma preocupação de respeitar as peculiaridades de cada província argentina e em ser um documento de referência e orientação para que cada uma dessas províncias possa se basear para descrever suas orientações, modelizar os conteúdos essências, o que se valora em cada uma das habilidades a serem trabalhadas, os princípios de transversalidade, pluridisciplinaridade e interdisciplinaridade, como pode ser constatado na página 9, do documento, com destaque ao seguinte trecho:

> *En acuerdo con la definición del CFE[28], el núcleo de aprendizajes prioritarios se secuencia anualmente, atendiendo a un proceso de diferenciación e integración progresivas y a la necesaria flexibilidad dentro de cada ciclo y entre ciclos. En ese*

[28] Conselho Federal de Educação, em tradução livre para o português.

> *último sentido, la secuenciación anual pretende orientar la revisión de las prácticas de enseñanza en función de lo compartido entre provincias, y no debe interpretarse como un diseño que sustituye o niega las definiciones jurisdiccionales, construidas atendiendo a las particularidades históricas, culturales, geográficas, de tradiciones locales y regionales. Proponer una secuencia anual no implica perder de vista la importancia de observar con atención y ayudar a construir los niveles de profundización crecientes que articularán los aprendizajes prioritarios de año a año en el ciclo. Deberá enfatizarse en los criterios de progresividad, conexión vertical y horizontal, coherencia y complementariedad de aprendizajes prioritarios, al mismo tiempo que en otros criterios, como el contraste simultáneo y progresivo con experiencias y saberes diferentes, en el espacio y el tiempo (presente/pasado; cercano/lejano; simple/complejo, etc.). Será central promover contextos ricos y variados de apropiación de esos saberes prioritarios. Al mismo tiempo, las prácticas de enseñanza deberán orientarse a la comprensión de indicios del progreso y dificultades de los alumnos, para generar cada vez más y mejores apoyos, a través de intervenciones pedagógicas oportunas. Esos indicios son diferentes manifestaciones de acciones y procesos internos y se expresan cotidianamente, en diversas actividades individuales o grupales de comprensión (al explicar, dar argumentos, ejemplificar, comparar, resolver problemas, etc.) y muy generalmente en el diálogo que se observa en la interacción con el docente durante el proceso pedagógico que tiene lugar en las instituciones escolares*[29]. (NAP MATEMÁTICA, 2018, p. 9).

Já no caso da Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio brasileiro, mesmo que em sua construção histórica desde a Constituição Federal de 1988 há a propositura de sê-la um documento de referência para a elaboração dos currículos de cada unidade federativa nacional, no documento isto não é deixado claro, havendo-se uma compreensão ambígua quanto ao seu caráter, que se dá a impressão de ser prescritivo/obrigatório quase como se necessária ser uma "cópia" para a formação das propostas curriculares de cada unidade federativa, como pode ser constatado no seguinte trecho da página 5, do documento:

---

[29] Em tradução livre para o português: "Em acordo com a definição do CFE, o núcleo de aprendizagem prioritários é dado sequência anualmente, atendendo a um processo de diferenciação e integração progressiva e à necessária flexibilidade dentro de cada ciclo e entre ciclos. Nesse sentido, o prosseguimento anula pretende orientar a revisão das práticas de ensino em função do compartilhamento entre províncias e não deve ser interpretado como um desenho curricular que substitui ou nega as diretrizes jurisdicionais construídas para atender às particularidades históricas, culturais, geográficas e de tradições locais e regionais. Propõe uma sequência anual não implica em perder de vista a importância de observar com atenção e ajudar a construir os níveis de aprofundamento crescente que articularão os aprendizados prioritários de ano a ano no ciclo. Deverá ser enfatizado nos critérios de progressiva conexão vertical e horizontal a coerência e complementaridade de aprendizagens prioritários, ao mesmo tempo que em outros critérios como o contraste simultâneo e progressivo com experiências e saberes diferentes no espaço e no tempo (presente/passado, perto/longe; simples/complexo etc.). Será central promover contextos ricos e variados para orientar a compreensão e os indícios do progresso e de dificuldade dos alunos, para gerar cada vez mais e melhores apoios através de intervenções pedagógicas oportunas. Esses indícios são diferentes manifestações de ações e processos internos e se expressam cotidianamente em diversas atividades individuais ou grupais de compreensão (ao explicar, a dar argumentos, a exemplificar, ao comparar, ao resolver problemas etc.) e mais geralmente no diálogo que se observa a interação com o docente durante o processo pedagógico que tem lugar as instituições escolares" (NAP Matemática, 2018, p. 9).

> A partir dela, as redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares passarão a ter uma referência nacional comum e obrigatória para a elaboração dos seus currículos e propostas pedagógicas, promovendo a elevação da qualidade do ensino com equidade e preservando a autonomia dos entes federados e as particularidades regionais e locais. (BNCC-EM, 2018, p. 5)

Para além do que se constata do desenho curricular do NAP e da BNCC-EM, no que diz respeito ao caso particular da matemática, há parecenças entre si, como: (a) o fato de haver uma valorização quanto à utilização do construtivismo por meio da resolução de problemas para o ensino-aprendizagem da matemática; (b) as aulas regulares e parte do aprendizado serem viabilizados na centralização da figura do docente; (c) a matemática ser uma produção da humanidade; e (d) a Matemática ter o reconhecimento como uma área própria do conhecimento e reserva em seção própria das propostas curriculares. Entretanto, também possuem diferenças particulares quanto aos aspectos conteudistas, aos entes didático-pedagógicos e às avaliações, os quais serão descritos a seguir:

6.1 Dos Aspectos Conteudistas

Em consulta direta aos documentos, observa-se que na BNCC-EM não há divisão dos conteúdos e das séries, deixando que isto fique a cargo das secretarias de educação de cada unidade federativa, mas não de forma tão clara, mesmo possuindo orientações quanto à organização da progressão curricular, que apenas elenca alguns conhecimentos peculiares relacionados ao desenvolvimento do saber matemático e alguns elementos de transversalidade. Conforme se observa entre as páginas 523 e 535, os conteúdos são transmutados em forma de competências identificadas por códigos alfanuméricos, as quais são diluídas por habilidades agrupadas em campos de saber, organizados pelos critérios da progressão curricular em combinação com o marco dos princípios gerais e as competências específicas de matemática e suas tecnologias, sem ser subdividido em séries.

Já no caso do NAP Matemática, logo na seção de introdução é deixado claro no documento que a sedimentação dos conteúdos e dos temas de transversalidade, pluridisciplinaridade e interdisciplinaridade ficam a cargo de governo e sociedade civil das províncias e da Cidade Autônoma de Buenos Aires, que formam a nação argentina, já que o NAP deixa claro que cada local possui especificidades e necessidades que devem ser desenvolvidas para além dos núcleos de aprendizagem prioritários e que são essências para a formação integral dos sujeitos e manutenção dos princípios da isonomia. Atentando-se

especialmente às páginas de 13 até a 23, é possível perceber com clareza que os conteúdos são diluídos em competências que são agrupadas em habilidades e eixos de aprendizagem a saber: Números e Operações; Álgebra e Funções; Geometria e Medida; Probabilidade e Estatística. Mesmo que os conteúdos são diluídos por competências e eixos, é possível notar que há uma preocupação quanto ao desenvolvimento de cada um dessas competências. Sendo assim, são tecidos comentários tanto em texto corrido quanto em nota de rodapé aos pontos mais importantes para cada etapa, propondo sugestões de casos a serem analisados, maneiras de trabalho, cautela quanto a alguns detalhes de algumas jurisdições e jurisprudências educacionais das províncias, ferramenta-objetos de aplicação, entre outras sugestões de igual valor.

Em relação aos eixos de aprendizagem, esses são constituídos a partir dos estudos e discussões promovidos pelo Conselho Federal de Educação argentino em conjunto com a sociedade civil e são subdivididos de forma seriada (1º, 2º e 3º Ano) para o ciclo básico de aprendizagem.

6.2 Dos Entes Didático-Pedagógicos

Ao examinar a seção de Matemática da BNCC-EM e o NAP de Matemática para o segundo grau da Argentina, foi possível constatar que existe um afã quanto ao uso da técnica de resolução de problemas para promover o ensino de matemática. Porém, na BNCC-EM é possível perceber que se há uma maior preocupação quanto a desenvolver a matemática de uma maneira mais instrumental e com maior ênfase à interdisciplinaridade, pluridisciplinaridade e uso de objetos educacionais digitais e instrumentos de tecnologia da informação e comunicação do que é proposto pelo NAP. Entretanto, no NAP se constata um tratamento científico dado à matemática, valorizando-se o caráter formal de ciência factual dessa área do conhecimento e sequências didáticas investigativas e proporcionando ao estudante meios para que ele consiga notar diferentes maneiras de resolver problemas, conseguir formalizar e generalizar saberes e situações e reflexões que vão além da instrumentalização mecanizada da matemática. Esses elementos específicos são muito difíceis de serem constatados na BNCC-EM. Inclusive, válido aqui ressaltar que, mesmo que não diretamente, no NAP há o incentivo durante o desenvolvimento das competências se fazer o uso da história da matemática como um recurso profícuo para que o estudante possa

compreender melhor tanto como determinado conteúdo se desenvolveu quanto para as reflexões que servirão para a abstração matemática; enquanto na BNCC-EM, isto não fica claro.

Em particular às grandes áreas da Matemática, faz-se importante destacar que no NAP de Matemática é possível observar que se há um afã em relação aos conhecimentos envolvidos com Análise e Álgebra, enquanto na BNCC-EM há um "equilíbrio"/dosagem maior entre as áreas, mas sem o tratamento formal levado em conta no NAP. Já em relação à Probabilidade e Estatística, na BNCC-EM é incentivado o uso de tecnologias e se desenvolve diversas maneiras de representação das informações, havendo um enfoque no tratamento da informação maior do que é visto no NAP de Matemática. Contudo, no NAP é perceptível que há um estudo investigativo minudencioso maior do que a BNCC-EM com relação aos formais da probabilidade e da estatística.

6.3 Das Particularidades Avaliativas

Perquirindo as diretrizes curriculares citadas anteriormente, não há explicitamente em ambas recomendações ou mesmo orientações de quais instrumentos avaliativos são mais adequados para determinados momentos. O que se pode perceber tanto na BNCC-EM quanto no NAP de Matemática é que ambas as diretrizes, em teoria, priorizam avaliações do tipo formativa, atentando-se às diferentes matizes contextuais de aprendizagem e as condições institucionais. Além disso, em ambas as diretrizes curriculares foi percebido que a avaliação é colocada como um instrumento essencial para o aprimoramento do aprendizado dos estudantes, do trabalho docente e da administração da gestão escolar.

Na BNCC-EM verifica-se que não há distinção nítida quanto às avaliações qualitativas dos processos ou quantitativa de resultados, algo que no NAP de Matemática também não fica tão claro, apesar de que em alguns momentos é colocado no documento que o processo de avaliação formal não é suficiente para a promoção dos estudantes e que – de forma um pouco nebulosa – nas situações-problema se deva avaliar com prestígio tanto os processos de resolução quanto os resultados, deixando ao cargo de cada jurisdição local e/ou instituição os critérios e pesos.

Vincit omnia veritas repara-se que em ambos os documentos (BNCC-EM e NAP de Matemática) não há contemplação integral do que Luckesi (2005) e Libâneo (2013) colocam

como substancial para uma avaliação adequada para o ensino-aprendizagem da matemática: nesta, para os autores supracitados, deve-se ter um tratamento cauteloso com cada detalhe a ser avaliado, especialmente com relação aos conteúdos, dando uma atenção maior aos processos de construção do conhecimento e visando a avaliação como instrumento de aprimoramento dos trabalhos e preparo para as etapas futuras.

Para desfecho do quadro comparativo entre a Base Nacional Comum Curricular (do Brasil) e os *Nucleos de Aprendizajes Prioritarios de la Educación Secundaria* (da Argentina), tecer-se-á na próxima seção algumas considerações relevantes acerca do estudo realizado e aqui apresentado.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em vista do que foi apresentado e à guisa de considerações finais, pode-se notar que os estudos comparados podem ser um profícuo campo para contribuição à elaboração de propostas curriculares para o ensino e aprendizagem da matemática, já que possibilita, enquanto método científico, explorar similitudes e distinções entre sistemas educativos diferentes com a finalidade de constituir um quadro comparativo que possa trazer elementos significativos para o desenvolvimento didático-pedagógico dos saberes da matemática. Por exemplo, viu-se que Brasil e Argentina possuem no âmbito nacional uma estrutura de currículo prescrito semelhante, sendo elaborado com base na teoria curricular de competências e habilidades. Além disso, em ambas as diretrizes foi identificado em semelhança que a matemática é um conhecimento do produto da humanidade fundamental para a formação integral dos sujeitos e para o desenvolvimento das sociedades, devendo ser uma área própria do conhecimento nos desenhos curriculares. Porém, mesmo dentro das semelhanças estruturais já há diferenças destacáveis, já que os *Nucleos de Aprendizajes Prioritarios* (NAP) de *la Educación Secundaria* argentina se subdividem em eixos de conhecimentos e os diluem em ciclos, algo que não se encontra na BNCC-EM. Também existem diferenças significativas quanto à forma de portar à matemática e ao ensino e aprendizagem desse saber, elevando-se o caráter de ciência factual nos *Nucleos de Aprendizajes Prioritarios* (NAP) de *la Educación Secundaria* argentina e instrumental e de linguagem na Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BNCC-EM) brasileira. Essas diferenças se estendem para os aspectos conteudistas, aos entes pedagógicos e ao *modus*

operandi da avaliação, tendo que no NAP de Matemática se valoriza as sequências didáticas investigativas e o detalhamento das orientações comentadas e exemplificadas para o desenvolvimento de cada habilidade e competência, enquanto na BNCC-EM se passa uma preocupação com respeito à transversalidade dos conhecimentos a serem desenvolvidos e às aplicações matemáticas, algo que no NAP de Matemática é deixado claro que tais cuidados ficam a cargo das jurisdições educacionais de cada província. Em particular aos saberes ligados aos conteúdos, nota-se que no NAP de Matemática há um afã para o exercício da formalização, abstração e modelização, dando maior valia aos entes ligados à área de Análise e à área de Álgebra. Já na BNCC-EM, há um afã com respeito à parte das aplicações da matemática e dosagem na abordagem das diferentes grandes áreas da Matemática.

Ao fim e ao cabo e em vista do que foi discorrido até então, com especial olhar ao que se propõe o Parágrafo Único do artigo 4º da Constituição Federal do Brasil, o estreitamento dos laços entre Brasil e Argentina e os intercâmbios informativos, de docentes e discentes da educação básica e de pesquisadores e entusiastas da Educação Matemática entre essas duas nações que possuem fronteiras entre si e que são tão diferentes e semelhantes ao mesmo tempo, podem selar acordos bilaterais interessantes, que possuam como finalidade o aprofundamento das discussões acerca dos currículos prescritos e praticados nas diversas modalidades educacionais do ensino básico desses Estados, implementados melhorias nos sistemas educacionais públicos e privados e incrementando a formação dos docentes e gestores educacionais de diferentes esferas governamentais.

REFERÊNCIAS

ARGENTINA. Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. **Argentina en Pisa 2018**: informe de resultados. Cidade Autônoma de Buenos Aires, 2019. Disponível em: https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/argentina_en_pisa_2018_informe_de_resultados.pdf. Acesso em: 16 jan. 2021.

ARGENTINA. Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. **Ley n.º 26.206, Ley de Educación Nacional.** Cidade Autônoma de Buenos Aires, 2006. Disponível em: https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/ley-de-educ-nac-58ac89392ea4c.pdf. Acesso em: 29 set. 2020.

ARGENTINA. Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. **Nucleos de Aprendizajes Prioritários**. Cidade Autônoma de Buenos Aires, 2018. Disponível em: https://www.educ.ar/buscador?q=NUCLEOS+DE+APRENDIZAJES+PRIORIT%C3%81RIOS. Acesso em: 13 mar. 2020.

ARGENTINA. Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. **NAP Matemática, Educación Secundaria, Ciclo Orientado**. Cidade Autônoma de Buenos Aires, 2018. Disponível em: https://www.educ.ar/recursos/132578/nap-matematica-educacion-secundaria-ciclo-orientado. Acesso em: 13 mar. 2020.

AZANHA, J. M. P. Avaliação escolar, algumas questões conceituais. *In*: AZANHA, J. M. P. **A formação do professor e outros escritos**. São Paulo: Editora Senac, 2006.

BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF: Centro Gráfico, 1988. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Constituicao.htm. Acesso em: 29 set. 2020.

BRASIL. **Lei n.º 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Altera as Leis n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei n.º 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei n.º 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei n.º 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Diário Oficial da União. Seção 1. 17 fev. 2017. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Lei/L13415.htm. Acesso em: 15 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base – Ensino Infantil e Fundamental. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base – Ensino Médio. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 11 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC/SEB/DICEI, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 24 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetro Curriculares**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Livro I. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf. Acesso em: 13 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetro Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Livro I. Brasília, DF: MEC/SEB, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf. Acesso em: 13 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Saúde. **Plataforma Brasil**. Versão 3.2. Brasília, DF: Ministério da Saúde/CNS/SUS, [s.d]. Disponível em: https://plataformabrasil.saude.gov.br/login.jsf;jsessionid=940635F5CD9D4E37F871BF060BB8C556.server-plataformabrasil-srvjpdf132. Acesso em: 23 jan. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Relatório Brasil no Pisa 2018**: versão preliminar. Brasília, DF: Inep/MEC, 2019. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf. Acesso em: 16 jan. 2021.

CANTORAL, R. Prefácio. *In*: GONÇALVES, H. J. L.; PIRES, C. M. C. (Org.). **Educação Matemática:** currículos de Matemática de países latino-americanos – Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai. São Paulo: Dialógica Ed., 2017. p. 9-12.

CAPES. **Catálogo de teses e dissertações**. Versão 0.0.41. Brasília, DF: CAPES, 2016. Disponível em: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/. Acesso em: 21 nov. 2020.

CARUSO, M.; TENORTH, H. E. **Internalización:** políticas educativas y reflexión pedagógica em um medio global. Cidade Autônoma de Buenos Aires: Granica, 2011.

CARVALHO, E. J. G. Estudos comparados: repensando sua relevância para a educação. *In*: CONGRESO NACIONAL/ENCUENTRO INTERNACIONAL DE ESTUDIOS COMPARADOS EN EDUCACIÓN, 3./2., 2009, Cidade Autônoma de Buenos Aires. **Anais** [...] Cidade Autônoma de Buenos Aires: Sociedad Argentina de Estudios Comparados en Educación – SAECE, 2009. Disponível em: http://www.saece.com.ar/docs/congreso3/Goncalves1.doc. Acesso em: 10 jan. 2021.

CARVALHO, E. J. G. Estudos comparados em educação: novos enfoques teóricos-metodológicos. **Acta Scientiarum** - Educação, Maringá, v. 36, n. 1, p. 129-141, jan./jun. 2014. Disponível em: https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/ActaSciEduc/article/view/19012/pdf_16. Acesso em: 12 jan. 2021.

CETRÁNGOLO, O.; CURCIO, O. **Pruebas Pisa 2018**: el desempeño educativo de la Argentina. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: CECE, 2020. p. 26-30. Disponível em: http://fcece.org.ar/wp-content/uploads/informes/pruebas-pisa-2018.pdf. Acesso em: 16 jan. 2020.

CLAME. REUNIÓN LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA - RELME. Disponível em: https://clame-relme.org/. Acesso em: 23 nov. 2020.

D'AMBRÓSIO, U. Características distintas da história da Matemática e da Educação Matemática em países da América Latina. **HISTEMAT - Revista de História da Educação Matemática**, SBHM, ano 1, v. 1, n. 1, 2015. Disponível em:

http://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/17/21. Acesso em: 29 set. 2020.

DIAS, B. A. L.; GONÇALVES, H. J. L. Contribuições da educação comparada para investigações em currículos de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, SP, Brasil, v. 19, n. 3, p. 230-254, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/33161/pdf. Acesso em: 03 dez. 2020.

FERRER, J. F. **La educación comparada actual.** Barcelona: Ariel, 2002.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GOMES, N. L. **Indagações sobre currículo:** diversidade e currículo. Brasília, DF: MEC/SAEB, 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Ensfund/indag4.pdf. Acesso em: 03 abr. 2020.

GONÇALVES, H. J. L.; PIRES, C. M. C. (Org.). **Educação Matemática:** currículos de Matemática de países latino-americanos – Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai. São Paulo: Dialógica Ed., 2017.

ICMI. CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 15., 2019, Medellín, Colombia. **Anais** [...]. Medellín, Colômbia, 2019. Disponível em: https://conferencia.ciaem-redumate.org/. Acesso em: 23 nov. 2020.

KAZAMIAS, A. M. O conhecimento educacional: um tema negligenciado na educação comparada. *In*: KAZAMIAS, A. M.; COWEN, R.; ULTERHALTER, E. (Orgs.). **Educação comparada**: panorama internacional e perspectivas. v.2. Brasília, DF: Unesco/Capes, 2012. p. 194-204. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000225468. Acesso em: 14 jul. 2020.

LEAL, M.; CENTENO, C. P. PISA en el contexto latinoamericano: los casos de Argentina, Brasil y Chile. Historia de la Educación Matemática en Latinoamérica: 10 claves para su comprensión. **Revista Latinoamericana de Educación Comparada**, Cidade Autônoma de Buenos Aires, v. 5, n. 6, p. 46-62, 2014. Disponível em: https://www.saece.com.ar/relec/revistas/6/mon3.pdf. Acesso em: 15 jan. 2021.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem na escola**: estudos e proposições. 17. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D.A. Métodos de coleta de dados: observação, entrevista e análise documental. *In*: LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D.A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MONTORO, F. A. **Da "democracia" que temos para a democracia que queremos.** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1974. p. 99-102.

MORENO, A. C. Brasil cai em ranking mundial de educação em ciencias, leitura e matemática. **Portal de noticias G1**: o portal de noticias da Globo, 2016. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/brasil-cai-em-ranking-mundial-de-educacao-em-ciencias-leitura-e-matematica.ghtml. Acesso em: 15 jan. 2021.

NÓVOA, A. Modelo de análise de educação comparada: o campo e o mapa. *In*: SOUZA, D. B.; MARTINS, S. A. (Orgs.). **Educação comparada**: rotas de além-mar. São Paulo: Xamã, 2009. p. 23-62.

OLIVEIRA, E. C. **Impactos da educação matemática nos currículos prescritos e praticados:** estudo comparativo entre Brasil e Argentina. (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/35524. Acesso em: 18 set. 2020.

PIRES, C. M. C. Organização e desenvolvimento curricular em Matemática, em países da América Latina. *In*: MARTINHO, M. H. *et al*. (Eds.). SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 25., 2014. **Atas** [...]. Braga: APM, 2014. p. 79–90. Disponível em: https://www.apm.pt/files/files/SIEM/2014/ataspdf/_P4_53435f593dfd8.pdf. Acesso em: 29 set. 2020.

PIRES, C. M. C. Pesquisas comparativas sobre organização e desenvolvimento curricular na área de educação matemática, em países da América Latina. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 513-542, 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/13626/pdf. Acesso em: 10 set. 2020.

PIRES, C. M. C.; GONÇALVES, H. J. L. Aspectos conceituais e epistemológicos da Educação Comparada presentes no projeto "Pesquisas comparativas sobre organização e desenvolvimento curricular na área de Educação Matemática, em países da América Latina". **Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)**, Campo Grande, vol. 8, n. 18, p. 396-414, dez. 2015. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1434/962. Acesso em: 28 set. 2020.

PISA 2018: Brasil parado no tempo há pelo menos 10 anos. **Thinkonomics**, 2019. Disponível em:http://thinkonomics.com.br/2019/12/773/pisa-2018-brasil-parado-no-tempo-ha-pelo-menos-10-anos/. Acesso em: 15 jan. 2021.

PIZZANI, L. *et al*. A arte da pesquisa bibliográfica na busca do conhecimento. **Revista Digital de Biblioteconomia e Ciência da Informação**, Campinas, v. 10, n.1, p. 53-66, jul/dez 2012. Disponível em: www.sbu.unicamp.br/seer/ojs/index.php. Acesso em: 07 out. 2020.

SAECE. **Revista Latinoamericana de Educación Comparada**. Cidade Autônoma de Buenos Aires, 2020. Disponível em: http://www.saece.com.ar/relec/abstract.php?xarchivo=revistas/10/art7.inc. Acesso em 23 nov. 2020.

SILVA, T. T. da. **Documentos de identidade:** uma introdução às teorias do currículo. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA. **Sociedad Científica Argentina**. Disponível em: http://cientifica.org.ar/. Acesso em: 19 jan. 2021.

UNESCO-CV. **Programa de educação para todos**. 30 jun. 2011. Disponível em: https://www.cvunesco.org/educacao/educacao-para-todos. Acesso em: 17 jan. 2021.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **Biblioteca digital de teses e dissertações da USP**. [s.l.], 2020. Disponível em: https://www.teses.usp.br/. Acesso em: 21 nov. 2020.

VALENTE, W. R. A Educação Matemática e os estudos históricos comparativos. **Historia de la Educación**, Salamanca, Espanha, n. 28, p. 259-272, 2009. Disponível em: https://revistas.usal.es/index.php/0212-0267/article/view/10270/10703. Acesso em: 05 dez. 2020.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

DOLL JR., W. **Currículo:** uma perspectiva pós-moderna. Porto Alegre: Artes Médias, 1997.

GONZÁLEZ, F. E. Historia de la Educación Matemática en Latinoamérica: 10 claves para su comprensión. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Espanha, n. 52, p. 279-305, abr. 2018. Disponível em: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2018/52/historia.pdf. Acesso em: 30 set. 2020.

ONUCHIC, L. R. Uma história da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo. *In*: SEMINÁRIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, 1., 2008, Rio Claro. **Anais** [...]. Palestra de Encerramento. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, 2008. p. 1-15. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo3.pdf. Acesso em: 12 dez. 2020.

SILVA, M. A. **Currículos de Matemática no Ensino Médio:** em busca de critérios para escolha e organização de conteúdos. 2009. 248 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11393. Acesso em: 08 dez. 2020.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica:** a questão da democracia. 4 ed. Campinas: Papirus, 2008.

INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS: Convite para o ensino de Geometria

MATHEMATICAL INVESTIGATIONS: Invitation to the teaching of Geometry

Beatriz Lopes Roldão [1], Claudia Cueva Candido [2]

Licenciada em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Mestranda no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade de São Paulo. Professora de Matemática do ensino fundamental na Escola Vera Cruz; beatriz.roldao@usp.br

[2] Professora doutora do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Orientadora do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática; cueva@ime.usp.br

Resumo: Este trabalho problematiza as práticas utilizadas no ensino de Geometria nas últimas décadas e evidencia de que forma esta área do conhecimento matemático esteve deixada de lado nas práticas curriculares, contribuindo para a defasagens dos alunos no Ensino de Matemática. Por outro lado, aponta um aumento de orientações para a melhoria do ensino de Geometria nos currículos nacionais. Acreditamos que os "Cenários para Investigação" propostos por Skovsmose constituem fator comum entre as habilidades desenvolvidas permeiam a contextualização e a produção de significados, deixando o aluno como central no seu processo de aprendizagem. A pesquisa teórica se deu à luz de algumas referências, como Ole Skovsmose e Van Hiele, buscando aliar as práticas de ensino com o componente crítico e social da Educação. Com esse objetivo, propusemos uma oficina aos professores do ensino básico a fim de apresentar a eles as teorias de Skovsmose e Van Hiele, de forma a potencializá-los quanto ao planejamento de geometria e incentivando a discussão para compreender o porquê, embora presente nas propostas curriculares, as atividades de investigação são tão pouco exploradas.

Palavras-chave: Formação continuada. Ensino de Geometria. Cenários para Investigação. Modelo de Van Hiele. Educação Matemática Crítica. Estudo de Caso.

Abstract: This work problematizes the practices used in the teaching of Geometry in the last decades and shows how this area of mathematical knowledge was left aside in the curricular practices, contributing to the gaps of students in the Teaching of Mathematics. On the other hand, it points to an increase in guidelines for improving the teaching of Geometry in national curricula. We believe that the "Landscapes for Investigation" proposed by Skovsmose are a common factor among the skills developed, permeate the contextualization and production of meanings, leaving the student as central to their learning process. The theoretical research was based on some references, such as Ole Skovsmose and Van Hiele, seeking to combine teaching practices with the critical and social component of Education. With this objective, we proposed a workshop for primary school teachers to introduce them to Skovsmose and Van Hiele's theories, in order to empower them in terms of geometry planning and encouraging discussion to understand why, although present in the proposals curricular activities, research activities are so little explored.

Keywords: Mathematics. Teaching. Didactics. Landscapes of Investigation. Geometry teaching. Van Hiele.

1 INTRODUÇÃO

No presente artigo, buscaremos discutir e validar a importância do trabalho investigativo e argumentativo para o ensino de Geometria por acreditarmos que essa prática dentro das salas de aula de matemática, contribui para a formação de estudantes críticos e reflexivos. Além disso, buscamos apresentar ideias e ferramentas para formação continuada de professores, para que estes estejam seguros de conhecerem novas práticas de ensino que possam ampliar cada vez mais as possibilidades de atuação na área.

O foco do trabalho com Geometria é motivado por minha experiência enquanto aluna e docente. Durante o Ensino Básico, encontrava muitas dificuldades na resolução de exercícios sobre o tema e isto, à época, já me intrigava bastante, dado que eu percebia que o simples conhecimento de propriedades geométricas ou fórmulas nem sempre era diretamente aplicável e suficiente para chegar à solução do problema. Foi somente na graduação que pude aprender Geometria e, ao mesmo tempo, interessar-me por construções geométricas e por todo o desenvolvimento argumentativo e as competências que essa área da Matemática nos propicia. Percebi que mais valia a construção e todo o processo de demonstração para a resolução de problemas e que, ao saber o "caminho", ou seja, quando na aula o professor propunha validar ou apresentava a demonstração, poderíamos usar nos exercícios o mesmo processor para obtenção do resultado, sem necessariamente aplicar uma fórmula decorada e sem significado.

Enquanto docente, o cenário ainda parece ser bem próximo. Apesar de nos últimos anos os livros didáticos terem passado por reformulações e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) indicar que "o pensamento geométrico dos alunos é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes." (BNCC, 2017, p.271), percebemos que o ensino de Geometria por construções e prova perdeu o espaço dentro deste cenário onde a busca é pela repetição, prática de exercícios visando na maioria das vezes os grandes vestibulares. Podemos citar Nasser e Tinoco (2003, p.1) para embasar esta percepção:

> Após o abandono da matemática moderna, com o movimento de retorno às bases matemáticas o que se viu foi o abandono total do raciocínio dedutivo e das demonstrações. Embora "desenvolver o raciocínio lógico" seja um dos objetivos incluídos dos planejamentos de quase todos os professores de matemática [...] a realidade hoje mostra que a maioria dos alunos não está aprendendo a pensar e raciocinar quando estuda os diversos conteúdos da matemática. Se pensarmos um

> pouco na natureza das aulas de matemática da maioria das escolas brasileiras, chegamos a uma constatação: os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas ideias. Isto é, na maioria das escolas, o aluno ainda é levado a resolver uma lista enorme de exercícios repetitivos, que para ele não tem significado algum. Não vendo uma ligação significativa do conteúdo com sua vida, o aluno apenas repete os modelos dados pelo professor ou aplica fórmulas, e em nenhum momento é questionado ou levado a pensar por que a resposta é aquela, ou mesmo se a resposta é coerente, plausível com a pergunta do problema.

Apesar de ser uma referência relativamente antiga para contextualizar a situação das escolas de ensino básico dos dias atuais, podemos utilizar os resultados de desempenho dos estudantes do Brasil em testes internacionais para reiterarmos que o cenário pouco mudou desde então.

O PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) é um estudo comparativo internacional que acontece a cada três anos, gerenciado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Com ele é possível obter informações sobre o desempenho dos estudantes de 15 anos, faixa etária dos anos finais do ensino fundamental. É um teste obrigatório em quase todos os países, que tem como objetivo principal o de veicular dados sobre as características e atitudes com relação à aprendizagem de cada país, além de apontar os principais fatores que moldam o ensino, dentro e fora de escola. No Brasil, é tarefa do INEP o planejamento e a operacionalização da avaliação no país, o que envolve:

- Representar o Brasil perante a OCDE;
- Coordenar a tradução dos instrumentos de avaliação;
- Coordenar a aplicação desses instrumentos nas escolas amostradas e a coleta das respostas dos participantes;
- Coordenar a codificação dessas respostas;
- Analisar os resultados e elaborar o relatório nacional.
- Vamos trazer para este trabalho os resultados da edição mais recente do PISA, a de 2018, a fim de estabelecermos uma análise qualitativa dos dados apresentados.

A AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA NO PISA 2018

O PISA para a área de Matemática está baseado na análise de três aspectos básicos relacionados ao letramento matemático:

> 1) os processos matemáticos que descrevem o que os indivíduos fazem para conectar o contexto de um problema com a Matemática e, assim, resolver o problema, bem como as capacidades subjacentes a esses processos;
> 2) o conteúdo matemático visado para uso nos itens da avaliação; e
> 3) o contexto no qual estão situados os itens. (BRASIL, 2019, p.98).

A partir destes itens já é possível notar a valorização da Matemática correlacionada ao contexto, além da pura aplicação de tópicos matemáticos. Deve-se então esperar que o estudante seja capaz de articular as habilidades matemáticas para "formular, empregar e interpretar a Matemática em uma série de contextos, o que inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos." (BRASIL, 2019, p.98).

Esse desenvolvimento é fundamental para a formação de indivíduos que reconheçam o mundo à luz da Matemática e tornem-se engajados no processo de construir, refletir e colaborar com as decisões e situações diversas do cotidiano.

O quadro a seguir apresenta os conteúdos matemáticos abordados nos problemas, considerando quatro categorias: variações e relações, espaço e forma, quantidade, incerteza e dados.

Tabela 1 – Conteúdos Matemáticos e distribuição de itens no teste

QUADRO 13

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS E DISTRIBUIÇÃO DESEJADA DE ITENS NO TESTE

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS		DISTRIBUIÇÃO DESEJADA DE ITENS NO TESTE
Variações e relações	Envolve compreender os diversos tipos de variação que podem ocorrer num objeto matemático (estando este isolado ou fazendo parte de um sistema em que os objetos se influenciam) e reconhecer quando essas variações podem ocorrer, a fim de utilizar modelos matemáticos que permitam descrever e prever essas variações. Funções e álgebra, incluindo expressões algébricas, equações e inequações, representação de dados em gráficos ou em tabelas são fundamentais para a descrição, modelagem e interpretação de variações e relações.	25%
Espaço e forma	Envolve compreender a noção de perspectiva, a criação e a leitura de mapas, a transformação de formas (com e sem uso de tecnologias), a interpretação de vistas de cenas tridimensionais a partir de diferentes perspectivas, e a construção de representações de formas.	25%
Quantidade	Envolve a quantificação de atributos de objetos, relações, situações e entidades no mundo, a compreensão de várias representações de quantificações e o julgamento de interpretações e argumentos baseados em quantidades. O conhecimento dos números e das operações com números são a base desta categoria.	25%
Incerteza e dados	Envolve compreender o papel da incerteza num dado processo, a noção da variação que a incerteza provoca e reconhecer a incerteza e o erro em processos de medição. Probabilidades e estatística, conhecimento de números e de aspectos da álgebra, como gráficos e representações simbólicas, são conteúdos essenciais desta categoria.	25%

Fonte: Elaborado por Daeb/Inep, com base em dados da OCDE e OCDE (2019a).

Fonte: Daeb/Inep (2019)

A geometria aparece em “espaço e forma”, o que envolve a compreensão e visualização de figuras e formas, além das capacidades de interpretação e transformação de figuras.

A seguir podemos ver a distribuição dos itens da matemática sob três aspectos: Processos, Conteúdos e Contextos.

Tabela 2 – Distribuição dos itens de Matemática por dimensão da matriz e formato de resposta - PISA 2018

TABELA 11

DISTRIBUIÇÃO DOS ITENS DE MATEMÁTICA POR DIMENSÃO DA MATRIZ E FORMATO DE RESPOSTA – PISA 2018

DIMENSÃO	FORMATO DE RESPOSTA			
	MÚLTIPLA ESCOLHA SIMPLES	MÚLTIPLA ESCOLHA COMPLEXA	RESPOSTA CONSTRUÍDA	TOTAL
Processos				
Formular	3	3	13	19
Empregar	8	6	17	31
Interpretar	8	5	7	20
Total	19	14	37	70
Conteúdos				
Variações e relações	2	4	11	17
Espaço e forma	3	4	11	18
Quantidade	7	3	7	17
Incerteza e dados	7	3	8	18
Total	19	14	37	70
Contextos				
Pessoal	4	3	4	11
Ocupacional	1	3	12	16
Social	11	4	13	28
Científico	3	4	8	15
Total	19	14	37	70

Fonte: Elaborado por Daeb/Inep, com base em dados da OCDE.

Fonte: Daeb/Inep (2019)

Pensando nas características e nível de dificuldade de cada tarefa, é possível consultar a tabela a seguir, que descreve seis nível de atividades, bem como a pontuação mínima e o percentual de estudantes em cada nível. Em seguida, por fim, apresentamos o desempenho do Brasil, por nível, em relação a outros países.

Tabela 3 – Descrição e percentual de estudantes por nível de proficiência – Matemática – PISA 2018

QUADRO 15

DESCRIÇÃO E PERCENTUAL DE ESTUDANTES POR NÍVEL DE PROFICIÊNCIA – MATEMÁTICA – PISA 2018

(continua)

NÍVEL	ESCORE MÍNIMO	PERCENTUAL DE ESTUDANTES NO NÍVEL	CARACTERÍSTICAS DAS TAREFAS
6	669	OCDE: 2,4% Brasil: 0,1%	No Nível 6, os estudantes são capazes de conceituar, generalizar e utilizar informações com base em suas investigações e na modelagem de problemas complexos, e são capazes de usar seu conhecimento em contextos relativamente não padronizados. Conseguem estabelecer ligações entre diferentes fontes de informação e representações, e transitar entre elas com flexibilidade. Evidenciam um pensamento e um raciocínio matemáticos avançados. São capazes de associar sua percepção e sua compreensão junto com um domínio de operações e relações matemáticas simbólicas e formais para desenvolver novas abordagens e estratégias que lhes permitam lidar com situações novas. Conseguem refletir sobre suas ações e formular e comunicar com precisão suas ações e reflexões relacionadas às constatações, interpretações e argumentações que elaboram; são ainda capazes de explicar por que razão estas são adequadas à situação original.
5	607	OCDE: 8,5% Brasil: 0,8%	No Nível 5, os estudantes são capazes de desenvolver modelos para situações complexas e trabalhar com eles, identificando restrições e especificando hipóteses. Conseguem selecionar, comparar e avaliar estratégias adequadas de resolução de problemas para lidar com problemas complexos relacionados a esses modelos. Conseguem trabalhar estrategicamente, utilizando um vasto e bem desenvolvido conjunto de habilidades de pensamento e de raciocínio, representações conectadas de maneira adequada, caracterizações simbólicas e formais, e percepção relativa a essas situações. Começam a refletir sobre suas ações e são capazes de formular e de comunicar suas interpretações e raciocínios.

QUADRO 15

DESCRIÇÃO E PERCENTUAL DE ESTUDANTES POR NÍVEL DE PROFICIÊNCIA – MATEMÁTICA – PISA 2018

(continuação)

NÍVEL	ESCORE MÍNIMO	PERCENTUAL DE ESTUDANTES NO NÍVEL	CARACTERÍSTICAS DAS TAREFAS
4	545	OCDE: 18,5% Brasil: 3,4%	No Nível 4, os estudantes são capazes de trabalhar de maneira eficaz com modelos explícitos em situações concretas complexas, que podem envolver restrições ou exigir formulação de hipóteses. São capazes de selecionar e de integrar diferentes representações, inclusive representações simbólicas, relacionando-as diretamente a aspectos de situações da vida real. Conseguem utilizar seu conjunto limitado de habilidades e raciocinar com alguma perspicácia em contextos diretos. São capazes de construir e de comunicar explicações e argumentos com base em suas interpretações, argumentos e ações.
3	482	OCDE: 24,4% Brasil: 9,3%	No Nível 3, os estudantes são capazes de executar procedimentos descritos com clareza, inclusive aqueles que exigem decisões sequenciais. Suas interpretações são seguras o suficiente para servirem de base à construção de um modelo simples ou à seleção e aplicação de estratégias simples de resolução de problemas. São capazes de interpretar e de utilizar representações baseadas em diferentes fontes de informação e de raciocinar diretamente com base nelas. Demonstram alguma capacidade para lidar com porcentagens, frações e números decimais, e para trabalhar com relações de proporcionalidade. Suas soluções indicam que eles se envolvem em interpretações e raciocínios básicos.

QUADRO 15

DESCRIÇÃO E PERCENTUAL DE ESTUDANTES POR NÍVEL DE PROFICIÊNCIA – MATEMÁTICA – PISA 2018

(conclusão)

NÍVEL	ESCORE MÍNIMO	PERCENTUAL DE ESTUDANTES NO NÍVEL	CARACTERÍSTICAS DAS TAREFAS
2	420	OCDE: 22,2% Brasil: 18,2%	No Nível 2, os estudantes são capazes de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que inferências diretas. Conseguem extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um único modo de representação. Conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções básicos para resolver problemas que envolvem números inteiros. São capazes de fazer interpretações literais de resultados.
1	358	OCDE: 14,8% Brasil: 27,1%	No Nível 1, os estudantes são capazes de responder a questões que envolvem contextos familiares, nas quais todas as informações relevantes estão presentes e as questões estão claramente definidas. Conseguem identificar informações e executar procedimentos rotineiros, de acordo com instruções diretas, em situações explícitas. Conseguem realizar ações que são, quase sempre, óbvias e que decorrem diretamente dos estímulos dados.
Abaixo de 1		OCDE: 9,1% Brasil: 41,0%	A OCDE não especifica as habilidades desenvolvidas.

Fonte: Elaborado por Daeb/Inep, com base em dados da OCDE.

Fonte: Daeb/Inep (2019)

É estarrecedor que 41% dos estudantes brasileiros estejam abaixo do nível 1 e que 45,3% estejam distribuídos entre os níveis 1 e 2. Esses dados são fundamentais para levantarmos questionamentos acerca dos fatores que não contribuem para um bom desempenho dos estudantes. Então o temos o gráfico de percentual dos estudantes em cada nível:

Gráfico 1 – Percentual de estudantes por nível de proficiência nos países selecionados - Matemática - PISA 2018

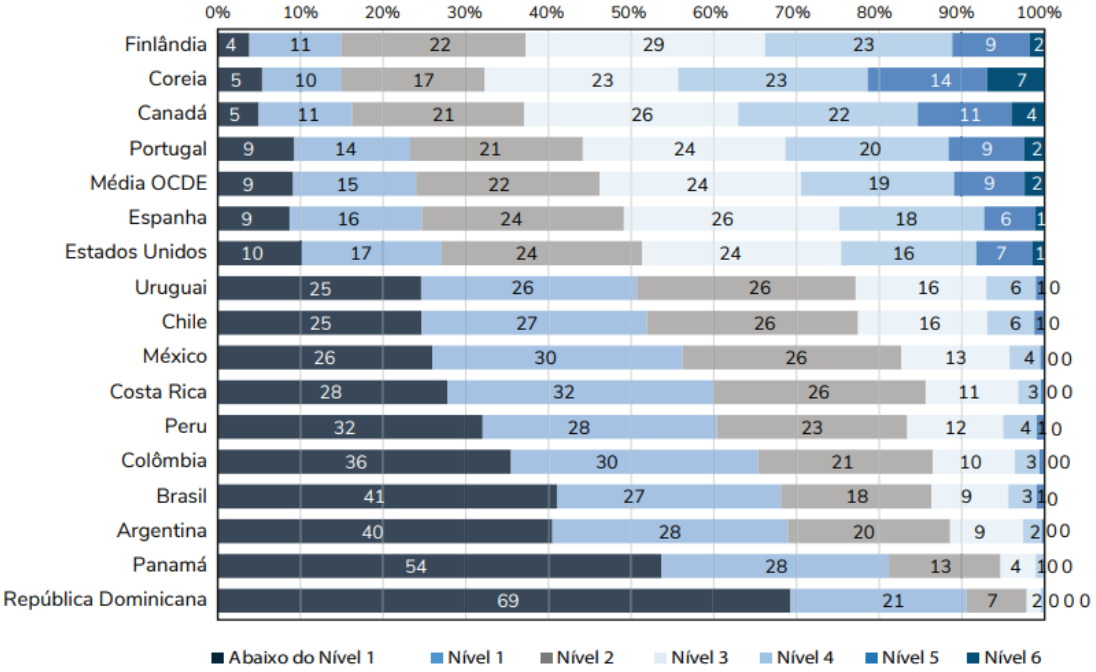


GRÁFICO 16

PERCENTUAL DE ESTUDANTES POR NÍVEL DE PROFICIÊNCIA NOS PAÍSES SELECIONADOS – MATEMÁTICA – PISA 2018

Fonte: Elaborado por Daeb/Inep, com base em dados da OCDE.

Fonte: Daeb/Inep (2019)

No projeto de pesquisa aqui apresentado com o enfoque do nosso projeto é o de aprofundarmos o ensino de Matemática à luz das situações de investigação, vale considerarmos as características das tarefas de nível 3, onde "os estudantes são capazes de executar procedimentos descritos com clareza, inclusive aqueles que exigem decisões sequenciais. Suas interpretações são seguras o suficiente para servirem de base à construção de um modelo simples ou à seleção e aplicação de estratégias simples de resolução de problemas. São capazes de interpretar e de utilizar representações baseadas em diferentes fontes de informação e de raciocinar diretamente com base nelas [...] Suas soluções indicam que eles se envolvem em interpretações e raciocínios básicos." (BRASIL, 2019, p.111).

O estudante que atinge o nível 3 é capaz de seguir os procedimentos descritos, mas também consegue desenvolver estratégias de solução, baseadas nas diferentes informações que dispõe. Acreditamos que os objetivos propostos para esse nível são também

desenvolvidos com atividades de cunho investigativo, ou seja, trabalhar com esse tipo de abordagem em sala de aula certamente instrumentalizará o estudante para a execução dessas tarefas.

Com o gráfico 1 é possível verificar que apenas 13% dos estudantes brasileiros atingem pelo menos o nível 3 e que, a maioria desses estudantes encontra-se no nível 1 ou abaixo dele. O documento descreve que este nível comtempla "ações que são, quase sempre, óbvias e que decorrem diretamente dos estímulos dados."

Ou seja, é possível vislumbrarmos que ainda há, em grande parte das escolas no Brasil, o cenário descrito por Nasser e Tinoco (2003, p.1), em que "os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas ideias. Isto é, na maioria das escolas, o aluno ainda é levado a resolver uma lista enorme de exercícios repetitivos, que para ele não tem significado algum."

A forma com que a Matemática ainda é praticada na maioria das escolas parece não contribuir para a formação crítica do aluno, capaz de argumentar matematicamente e produzir significado aos conceitos apresentados. Essa forma tradicional de ensino não incentiva a discussão coletiva, a descoberta da Matemática a partir de atividades que estimulem os estudantes a quererem buscar a solução. Na Parte 1 deste trabalho abordaremos a Geometria como foco principal, trazendo algumas referências para entender como se deu o seu ensino ao longo da história recente e quais são os principais desafios que temos hoje para o ensino.

Ole Skovsmose, professor e pesquisador dinamarquês, em seu texto "Cenários para Investigação", caracteriza a prática tradicional da educação matemática com o paradigma do exercício. Essa prática é inerente e ainda predominantemente praticada no ensino de Matemática em todo o mundo, pois de alguma forma foi-se consolidando a ideia de que a prática e a repetição de exercícios resultam em aprendizado. Os exercícios a que Skovsmose se refere são, em sua maioria, questões diretas e fechadas, nas quais todas as informações constam no enunciado e não se faz necessário um questionamento sobre a veridicidade ou obtenção desses dados. Ole comenta que este paradigma se distancia de um cenário para investigação - termo utilizado pelo autor para se referir à atividade abertas que se utilizam de investigações, validações e, principalmente, o protagonismo do estudante motivado a explorar o tema em questão - pois nele o aluno não é convidado a se inteirar do processo de exploração e argumentação. A Parte 2 deste trabalho se encarrega de explanar melhor sobre a Educação Matemática Crítica, explicar e exemplificar os Cenários para Investigação e apresentar ideias que possibilitem pensar o Ensino de Matemática para além do paradigma do exercício.

> Exercícios desempenham um papel crucial no ensino de matemática tradicional. Ao longo de todo o período em que frequentam a escola, as crianças, em sua maioria, respondem a mais de 10 mil exercícios. Contudo, essa prática não ajuda necessariamente a desenvolver a criatividade matemática. Será que o papel da educação matemática é preservar visões equivocadas de ordem social e política, que estão profundamente arraigadas na sociedade? Será que nos perdemos enquanto educadores? Ou será que a educação matemática desde sempre é pautada por interesses do mercado de trabalho e nós, educadores matemáticos, temos dificuldade de reconhecer isso? (SKOVSMOSE, 2014, p. 16).

A ruptura entre o ensino fundamentado no exercício para um cenário investigativo, que convida o aluno a experimentar, investigar e formular hipóteses não se dá de forma imediata, é um processo importante e necessário para a construção de uma Educação desenvolvida de forma coletiva, encorajando os estudantes dentro do seus respectivos processos de aprendizagem e, assim, resultando em uma Matemática que se referencie na realidade, trazendo sentido e significado a todos os integrantes deste processo.

> Mover-se do paradigma do exercício em direção ao cenário para investigação pode contribuir para o enfraquecimento da autoridade da sala de aula tradicional de matemática e engajar os alunos ativamente em seus processos de aprendizagem. Mover-se da referência à matemática pura para a referência a vida real pode resultar em reflexões sobre a matemática e suas aplicações. Minha expectativa é que caminhar entre os diferentes ambientes de aprendizagem pode ser uma forma de engajar os alunos em ação e reflexão e, dessa maneira, dar à educação matemática uma dimensão crítica. (SKOVSMOSE, 2000, p.1).

O objetivo principal do nosso trabalho é apoiar os professores de Matemática que se interessem pelo trabalho investigativo, para isso na Parte 3 vamos propor algumas atividades "convite à investigação", que podem servir de base para criação de muitas outras atividades. Essas atividades tem um enfoque na Geometria, por este ser um tema de interesse e onde levanto questões sobre as formas de ensino, brevemente apresentadas anteriormente e melhor apresentadas na Parte 1. Além disso, traremos para discussão coletiva com professores de Matemática, de questões que podemos considerar "preocupações" para o ensino de Geometria, buscando propor ideias e maneiras de se construir uma Educação Matemática que realmente proponha significado aos estudantes e torne a sala de aula um ambiente diverso, que contemple contextos sociais, culturais e políticos. O desenvolvimento de propostas de ensino de Geometria a partir de atividades de Investigação podem evidenciar a importância do desenvolvimento argumentativo e dedutivo dos alunos para consolidação do processo de aprendizagem?

2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

O estudo e desenvolvimento da Geometria são de extrema importância devido à presença de suas propriedades e relações em nosso cotidiano. Desde o início da vida estamos expostos a situações de reconhecimento de objetos do mundo físico, estimulados a desenvolver capacidades no campo da localização e percepção de figuras geométricas. Com isso, faz sentido desde a infância o incentivo para a identificação de propriedades, exploração de hipóteses e percepção de regularidades acerca de questionamentos ligados ao estudo da Geometria.

A Geometria tem historicamente um papel de grande destaque no mundo real, desde o Egito (século 5 a.C.) onde os sacerdotes dedicavam-se à apreciação de formas da natureza e a Grécia (século 5 a.C.) em razão das aplicações práticas da geometria e o desafio assumido pelos gregos de fazer a formalização lógica de todos esses conhecimentos. Neste capítulo vislumbraremos estabelecer algumas relações entre o a Escola Básica e a Geometria, sob o enfoque de como se deu essa relação nos últimos. Além disso, apresentaremos alguns indicativos, baseados em documentos curriculares, que evidenciem a forma esperada para o ensino desta área nas escolas brasileiras. Dessa forma, conseguiremos vislumbrar alguns fatores que determinaram o modelo de ensino praticado hoje e quais são os principais desafios para o desenvolvimento de práticas de ensino voltadas a investigação, tendo a exploração como parte fundamental da aprendizagem.

O processo de surgimento e desenvolvimento da Geometria, assim como todo o saber, acontece a partir de interações com o contexto social, que muitas das vezes buscam atender a demandas econômicas e culturais da região. Com isso, atividades como medição de propriedades pelas sociedades rurais, as construções e desenhos de ornamentos são alguns exemplos de como utilizava de noções geométricas, basicamente como processos de sistematização. Com a civilização da Grécia antiga, passamos por um processo de formalização da Geometria, onde muito se produziu de conhecimentos para validação dos processos já utilizados e descobertas de novas relações e propriedades.

> A civilização grega dos séculos 7 a.C. a 3 a.C. é tida, hoje, como a responsável pela organização da geometria como ciência dedutiva. Esse período é caracterizado pelo início do emprego do método axiomático, que se tornaria o modo científico de sistematização da Matemática. (PITOMBEIRA, 2007, p. 136).

Dessa forma, é imprescindível que a Geometria seja parte integrante do ensino básico e este trabalho será um convite a reflexões sobre esta área da Matemática. É evidente que não será possível abarcar toda a Geometria, por isso escolhemos alguns temas que julgamos úteis que sejam trabalhados de forma significativa e, assim, estes farão diferença ao aprendizado dos temas decorrentes.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Pensando que o foco é explorarmos a formação continuada de professores do ensino básico, de forma a colocá-los a refletirem sobre o papel da Matemática na construção social e instrumentalizá-los com práticas e possibilidades de atuação no ensino de Geometria, trouxemos a Matemática Crítica a luz das ideias e propostas de cenários para Investigação do Ole Skovsmose, e a estruturação do processo de aprendizagem em geometria a luz do Modelo de Aprendizagem do casal Van Hiele.

4 METODOLOGIA

A abordagem metodológica utilizada neste trabalho é de cunho qualitativo, onde o foco da pesquisa concentra-se em análise de materiais interpretativos como anotações e registros dos participantes, entrevistas, gravações, questionários, entre outros. Nesse tipo de pesquisa estamos fazendo a opção de priorizar todo o processo de desenvolvimento do projeto, mais do que somente um "resultado" esperado.

A metodologia de ensino adotada na produção deste texto está diretamente relacionada com os questionamentos e motivações que permearam todo o desenvolvimento dessa pesquisa e são fruto de questionamentos que fui levantando durante grande parte da minha formação escolar e acadêmica.

Dessa forma, elaboramos um conjunto de atividades que foram propostas como oficina, para promover a discussão entre professores do Ensino Básico acerca de possibilidades que promovam o ensino de Geometria mais significativo para os estudantes, a luz de abordagens investigativas.

A investigação matemática é a inspiração principal para o desenvolvimento deste trabalho pois, partindo desta abordagem, acreditamos que há a possibilidade de formulação de

hipóteses de ensino e aplicação valiosas, que certamente trarão ao professor maior instrumentalização para lidar com diversas abordagens, tornando o cenário de ensino de Geometria um ambiente criativo e desafiador.

> Aprender matemática não é simplesmente compreender a matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detetivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção de sua faceta investigativa é como andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erro e aprendendo com eles." (BRAUMANN, 2002, p. 5).

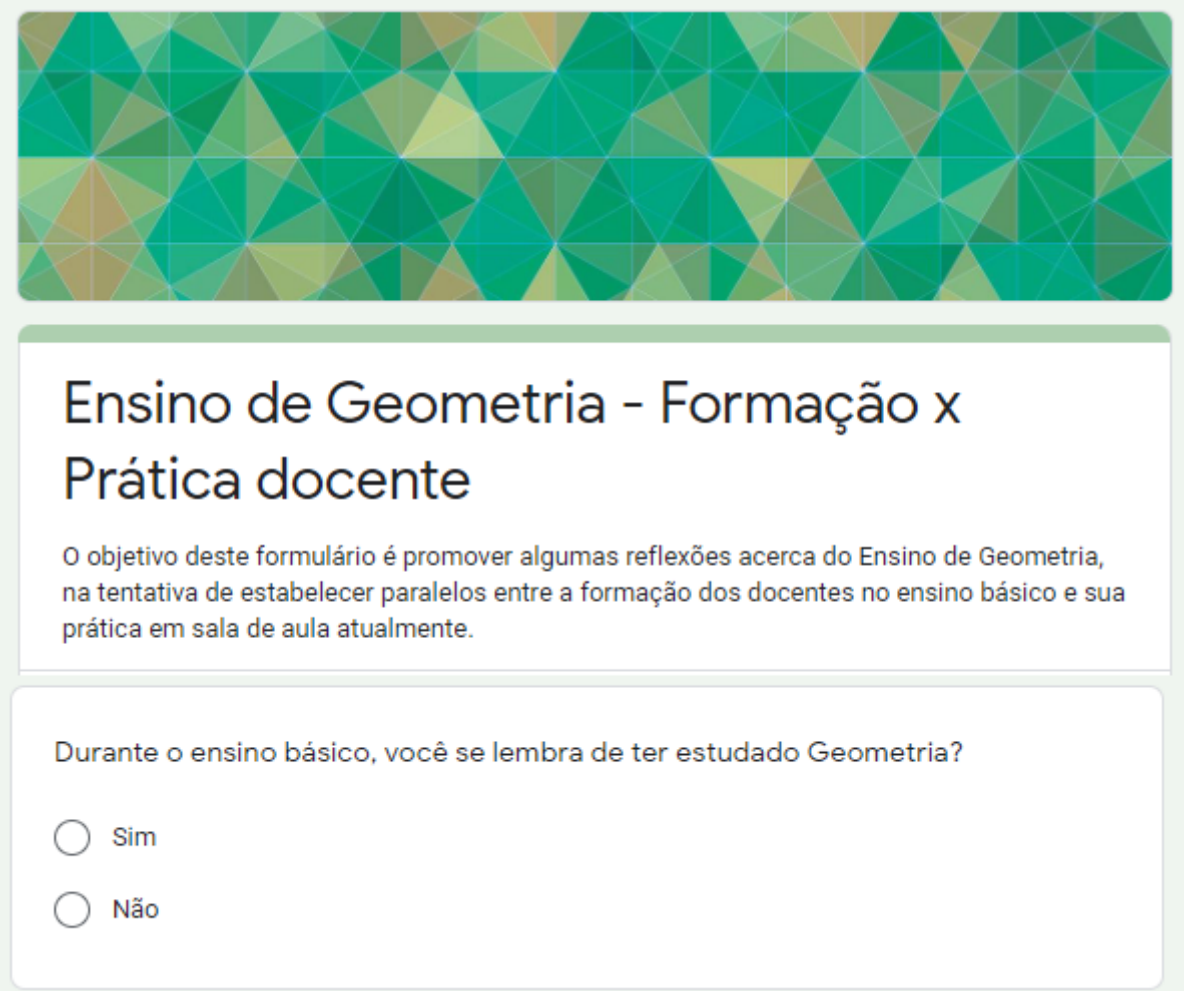
Inspirando-nos nas ideias da metodologia do estudo de caso, a oficina descrita, aplicada e analisada na última parte do projeto é produto de todo o estudo teórico e das ideias que acreditamos potencializar o professor de Matemática em seu ofício. Com isso, teremos dois públicos alvo: os professores da rede de ensino básico e alunos do último ano da licenciatura. Dessa forma, estaremos atingindo, em algum nível, os professores que já estão na prática docente e aqueles que estão chegando a pensarem o ensino de Geometria, além de encorajá-los a promoverem mudanças na educação, sob um viés sempre crítico da Matemática.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

No mês de setembro de 2021, fizemos uma oficina com duas turmas do curso de MAT1500 – Projetos de Estágio. A disciplina é destinada aos alunos dos anos finais do curso de Licenciatura em Matemática pelo IME-USP e acontece em parceria com escolas da rede pública de ensino, onde os professores das escolas participam dos encontros e supervisionam os alunos no estágio.

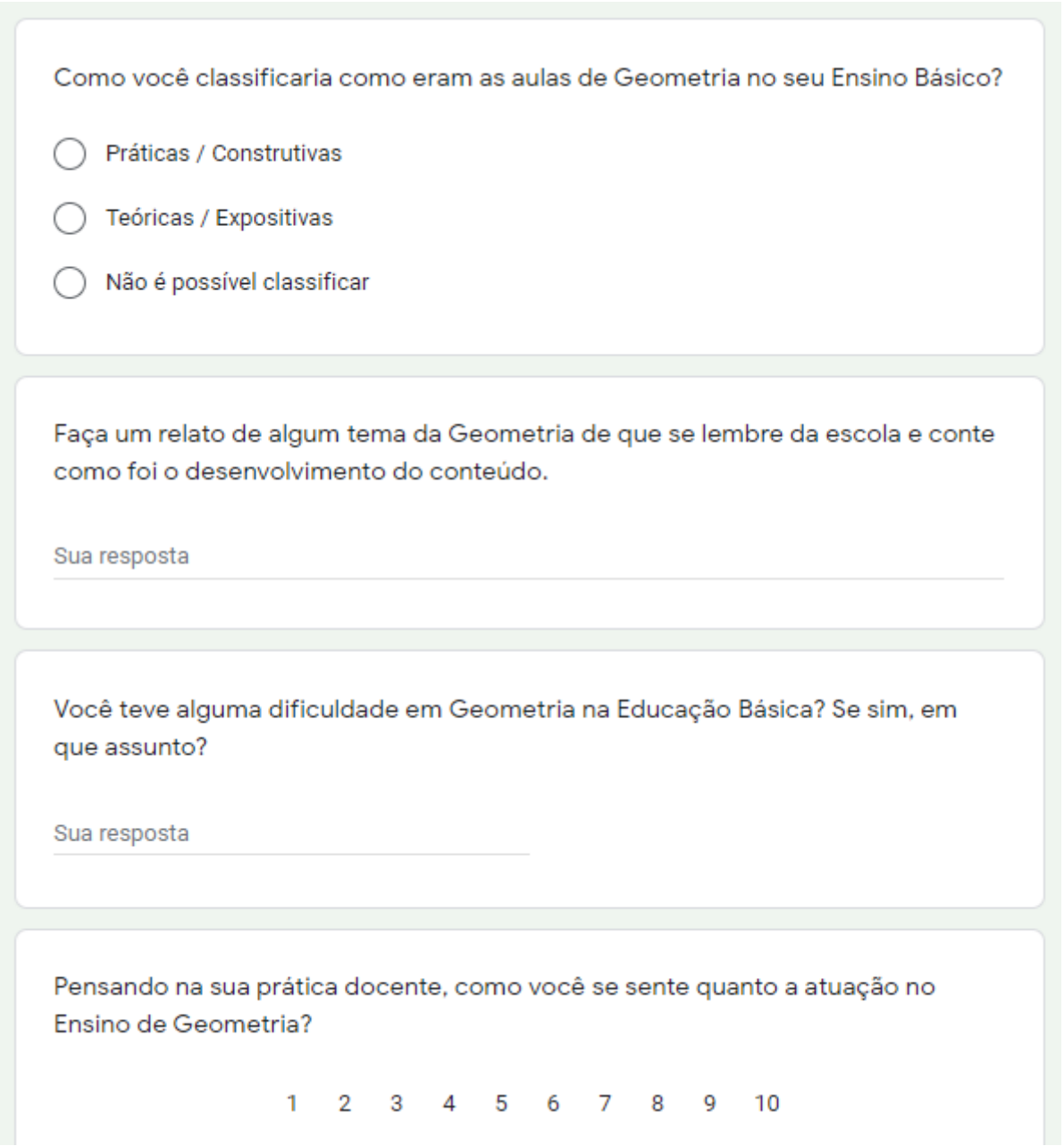
Devido a pandemia de COVID-19, as aulas da Universidade continuam no modelo remoto, com os encontros acontecendo via Google Meet e as atividades atribuídas pela plataforma Moodle. Assim, pensamos a oficina para dois momentos: o assíncrono contou com um Formulário inicial com alguns questionamentos acerca das percepção dos envolvidos quanto ao ensino de Geometria; em seguida sugerimos a leitura do texto "Cenários para Investigação" e o artigo "O modelo de Aprendizagem do casal Van Hiele". Como tarefa no Moodle, solicitamos algumas reflexões após a leitura.

Figura 1 – Questionário Inicial



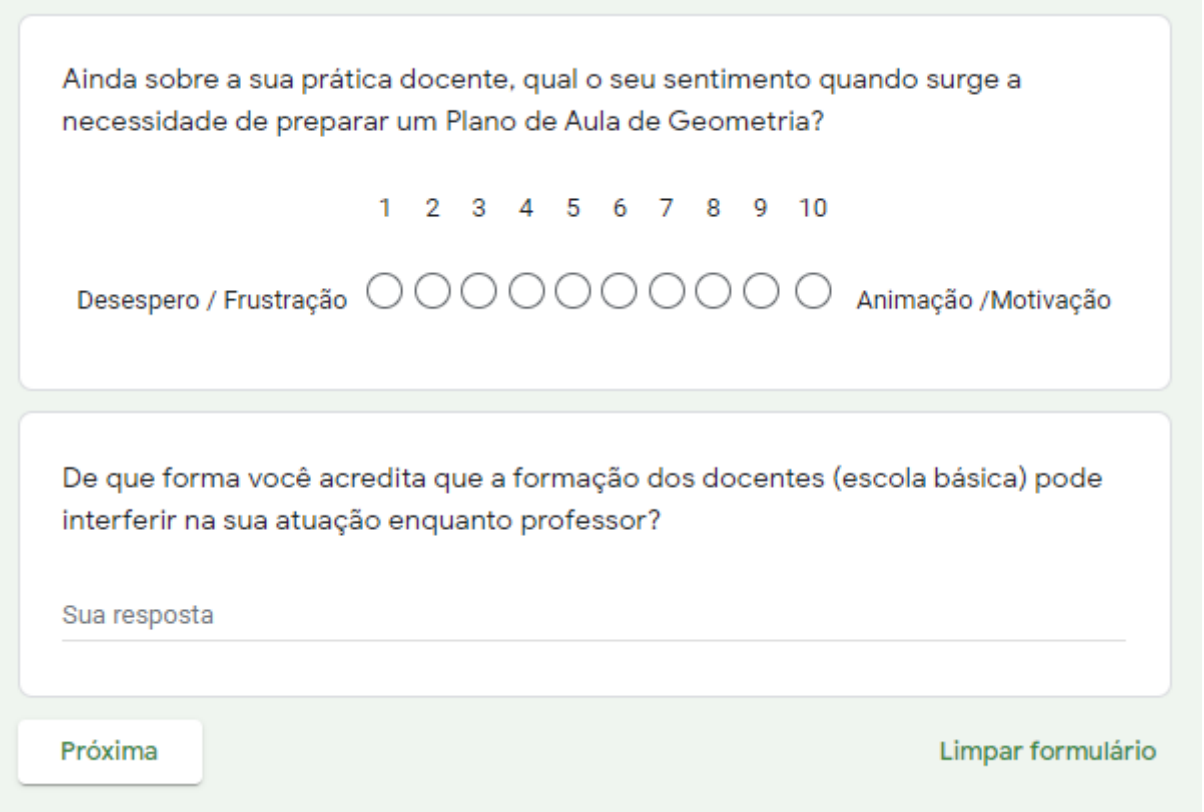
Fonte: Elaborado no Google Forms pelos autores (2021)

Figura 2 – Questionário Inicial



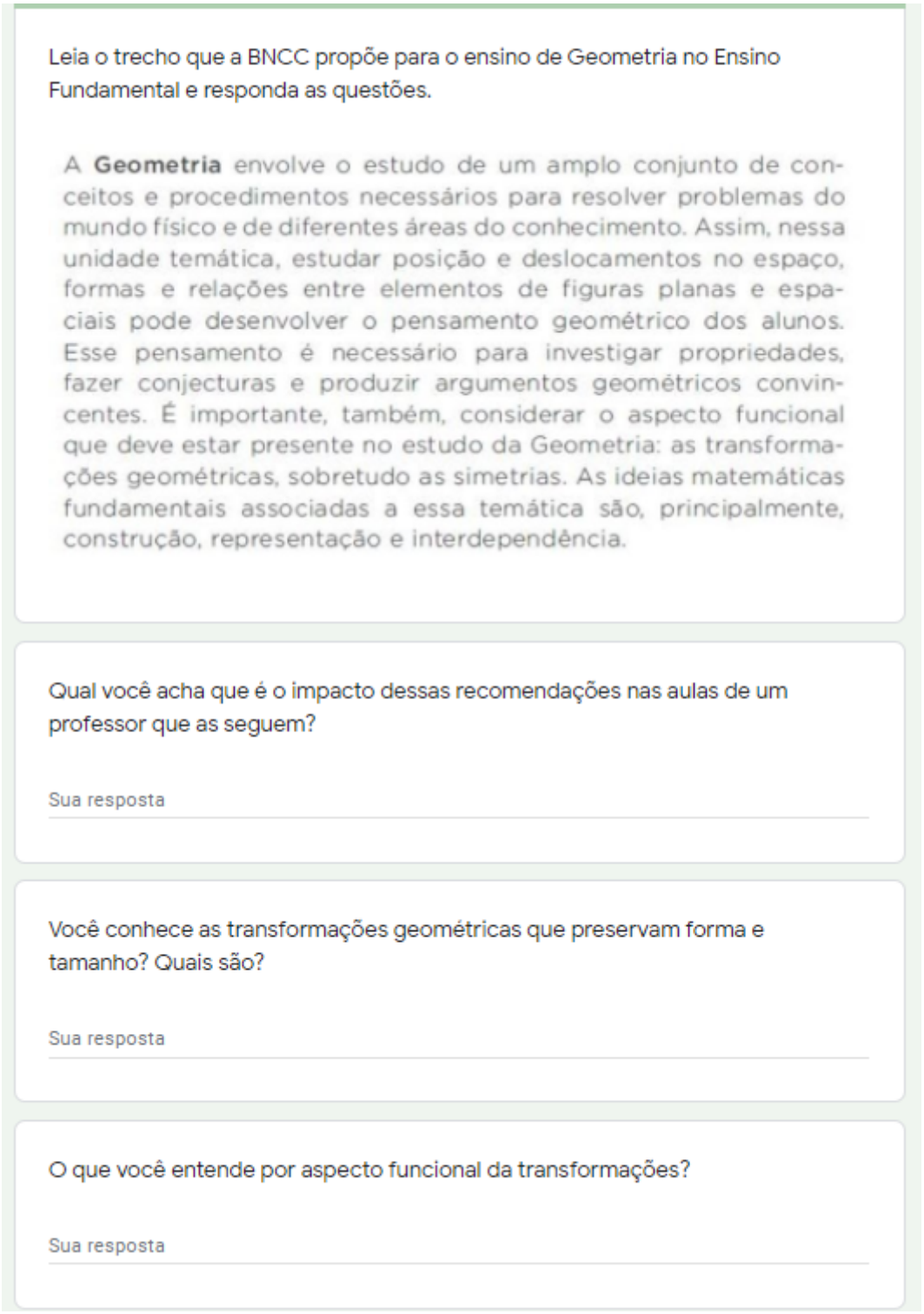
Fonte: Elaborado no Google Forms pelos autores (2021)

Figura 3 – Questionário Inicial



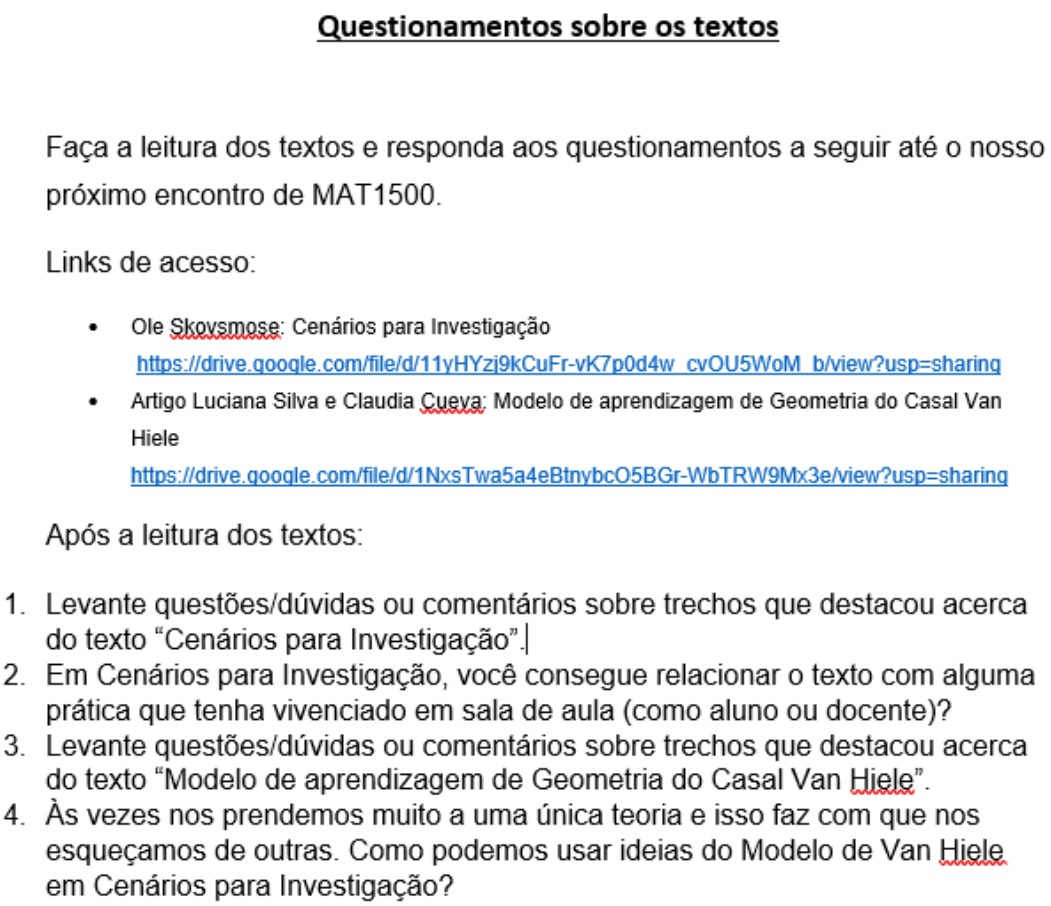
Fonte: Elaborado no Google Forms pelos autores (2021)

Figura 4 – Questionário Inicial



Fonte: Elaborado no Google Forms pelos autores (2021)

Figura 5 – Questionário sobre os textos.



Questionamentos sobre os textos

Faça a leitura dos textos e responda aos questionamentos a seguir até o nosso próximo encontro de MAT1500.

Links de acesso:

- Ole Skovsmose: Cenários para Investigação https://drive.google.com/file/d/11yHYzj9kCuFr-vK7p0d4w_cvOU5WoM_b/view?usp=sharing
- Artigo Luciana Silva e Claudia Cueva: Modelo de aprendizagem de Geometria do Casal Van Hiele https://drive.google.com/file/d/1NxsTwa5a4eBtnybcO5BGr-WbTRW9Mx3e/view?usp=sharing

Após a leitura dos textos:

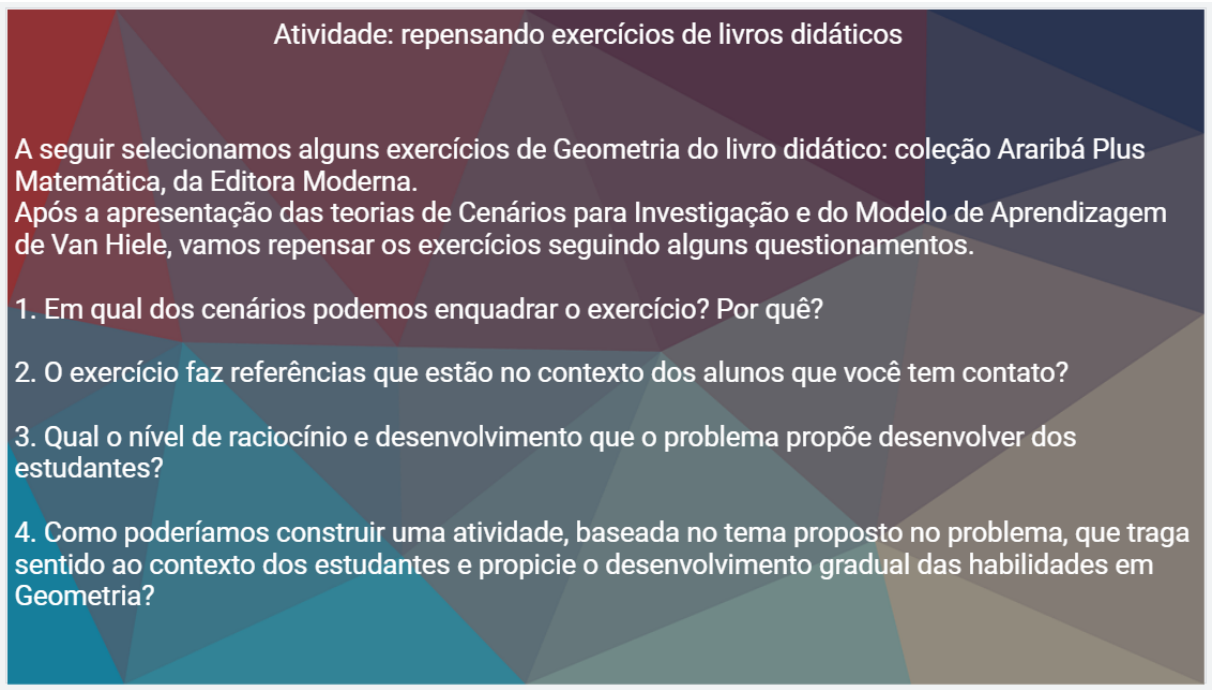
1. Levante questões/dúvidas ou comentários sobre trechos que destacou acerca do texto "Cenários para Investigação".
2. Em Cenários para Investigação, você consegue relacionar o texto com alguma prática que tenha vivenciado em sala de aula (como aluno ou docente)?
3. Levante questões/dúvidas ou comentários sobre trechos que destacou acerca do texto "Modelo de aprendizagem de Geometria do Casal Van Hiele".
4. Às vezes nos prendemos muito a uma única teoria e isso faz com que nos esqueçamos de outras. Como podemos usar ideias do Modelo de Van Hiele em Cenários para Investigação?

Fonte: Autores

Após essa primeira parte, fizemos um encontro síncrono via Google Meet, onde discutimos sobre o contexto atual do ensino de geometria e as teorias contidas nos textos. Foi um momento importante para que os estudantes expusessem suas percepções enquanto alunos e os professores contassem um pouco sobre com têm sido as práticas de Geometria.

Na parte final da oficina, promovemos o encontro dos grupos de estágio com o professor supervisor para que eles, com base nas teorias discutidas, que analisassem dois exercícios de livro didático e, por fim, propusessem ideias para tornar o exercício uma atividade investigativa e que tenha significados aos alunos da escola de estágio. Foi um momento que os participantes relataram desafiador, mas que resultou em grandes ideias e discussões. Os registros da atividades foram realizados utilizando a ferramenta Jamboard.

Figura 6 – Repensando exercícios de livros didáticos.



Fonte: Autores

Figura 7 – Repensando exercícios de livros didáticos – Exercícios

1. Observe os telhados de duas casas situadas em diferentes lugares do mundo.

Restaurante em Soest, Alemanha. Foto de 2017.

Casa em Vila Ressaca, em Senador José Pinto (PA). Foto de 2017.

Cada plano do telhado é chamado de "água".

a. O ângulo destacado em cada telhado determina sua inclinação. Com um transferidor, meça os ângulos.

b. Em sua opinião, por que essas casas têm telhados com inclinações diferentes?

3. Faça uma estimativa da área do estado do Paraná.

• ESTADO DO PARANÁ

Elaborado com base em: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 175.

Reúna-se com um colega para responder às questões.

a. Como vocês fizeram para calcular a área desse estado?

b. Encontraram o mesmo valor para a área? Se não, por quê?

c. Pesquisem na internet ou em um atlas a área do estado do Paraná e verifiquem se o resultado obtido por vocês está próximo do real.

Fonte: Própria

Num próximo momento, ainda proporemos a cada grupo de estágio que selecione um exercício fechado, que é trabalhado pelo professor do livro didático e que monte uma atividade investigativa a ser aplicada com os alunos da rede. Acreditamos que este exercício será de grande valia para os professores, licenciandos e alunos, pois professor e licenciandos estarão colocando em práticas novas ferramentas de ensino e promovendo um olhar mais direcionado aos alunos dos exercícios que geralmente são genéricos. Além disso, os alunos da escola estarão experenciando uma nova forma de visualizar um tema da geometria, que pode potencializar seu processo de aprendizagem.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo foi desenvolvido a partir do trabalho que vem sendo construído como dissertação do Mestrado Profissional de Ensino em Matemática. O foco principal é promover questionamentos e reflexões que possam ser mais um instrumento utilizado pelos professores em sua prática. Acreditamos que a melhoria do ensino é um processo contínuo e diário e, a partir do momento que o professor conhece diversas técnicas e ferramentas, ele está cada vez mais apto a identificar as dificuldades de seus alunos e auxiliá-los no desenvolvimento da aprendizagem de cada um.

O trabalho está em construção, mas já pudemos vivenciar alguns momentos de grande formação a todos. Os materiais coletados (gravações, atividades, registros escritos) serão analisados de forma qualitativa, focando em todo o processo. Com isso, acreditamos que será possível estabelecer comparativos que elucidem a importância do ensino investigativo na construção processo de aprendizagem.

Além disso, esta proposta servirá como mais uma ferramenta disponível a todos os professores de Matemática, pois acredito que a prática docente é uma atividade de constante preparação, assim quanto mais ferramentas e abordagens um professor possuir, melhor ele estará preparado para seu ofício.

As discussões e conclusões geradas pelo trabalho visarão contribuir para o oferecimento de novas ferramentas de ensino, buscando levar os alunos a refletirem e se desenvolverem de forma autônoma, fazendo com que a educação matemática impacte significativamente em nossa sociedade, consolidando a educação matemática com sua dimensão crítica e potencializadora.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. **Relatório Brasil no PISA 2018**: versão preliminar. Brasília, DF: MEC/INEP, 2019. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf. Acesso em: 30 set. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB, 2018.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. *In*: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. **As atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.** Lisboa: SEM-SPCE, 2002. p. 5- 24.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. A**. Argumentação e provas no ensino de matemática.** Rio de Janeiro: UFRJ, 2001.

PITOMBEIRA, J. B.; LIMA, P. F. (coord). **Coleção explorando o ensino – Matemática**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2010. Volume 17.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica**. Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo. Campinas, SP: Papirus, 2014.

SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo. 2. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2010.

ENSINO DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NO ENSINO MÉDIO: Uma abordagem com várias representações semióticas

SEQUENCES AND SERIES AT HIGH SCHOOL: An approach with different semiotic representations

Rodrigo Martins Lopes [1], Vera Helena Giusti de Souza [2]

[1] Prof. de Matématica na Educação Básica II, licenciado em Matemática pela Universidade Nove de Julho; rodrigoml@ime.usp.br
[2] Profª Dra. em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, licenciada e Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo; vhgiusti@usp.br

RESUMO: Pesquisas mostram que o uso de vários sistemas de representação semiótica em sequências e séries, na Educação Básica, enriquece o aprendizado em Matemática, mas compreender, discriminar e saber usar esses sistemas não é espontâneo e precisa ser trabalhado pelo professor em sala de aula, de forma complementar ao livro didático. Por essa razão, tem-se por objetivo identificar dificuldades nos processos de conversão e tratamento de diferentes registros de representação semiótica em sequências e séries geométricas e explorar concepções de infinito de um grupo de alunos do Ensino Médio. Espera-se responder quatro questões "Uma abordagem com vários registros de representação semiótica contribui para a aprendizagem de sequências e séries geométricas no Ensino Médio?", "Essa abordagem favorece a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais?", "Quais concepções de infinito emergem nas respostas dos participantes?" e "Quais as dificuldades explicitadas pelos participantes nos processos de tratamento e conversão de registros de representação semiótica?". Foram elaboradas quatro propostas de ensino, três baseadas no triângulo de Sierpinski e uma na dízima periódica 0,999…, e a primeira delas foi aplicada a sete estudantes de 2ª série do Ensino Médio brasileiro, cuja análise consta neste texto. Como produto final esperado de um Mestrado Profissional, dever-se-á deixar essas atividades propostas para o professor de Matemática da Educação Básica, com elementos que consideramos interessantes para o ensino de sequências e séries geométricas e também para um trabalho com concepções de infinito que aparecem no assunto.

Palavras-chave: Sequências. Séries geométricas. Infinito. Registros de representação semiótica. Ensino Médio. Matemática. Ensino. Didática.

ABSTRACT: Researches in Mathematics Education show that using various semiotic representation systems, in sequences and geometric series, enriches students´ learning and, according to Raymond Duval, understanding and knowing how to use those systems is not spontaneous and needs to be stimulated by teachers in classroom. For this reason, the principal aim is identifying difficulties in different semiotic representation systems conversion and treatment processes in sequences and geometric series and also exploring conceptions of infinite in a group of Brazilian High School students, as a research theme for a Professional Master Dissertation in Mathematics Teaching. It is expected to answer three questions, "Does an approach with various semiotic representation systems contribute to sequences and geometric series learning in High School?" "Does this approach allow the interaction of

algorithmic, formal and intuitive aspects?", ¨Which infinite conceptions emerge in students answers?¨, "What difficulties are pointed out by participants in semiotic representation systems treatment and conversion processes?". It has been designed four activities about Sierpinski triangle and the first one has been applied to seven Brazilian High School students (16-17 years old), and analysis of these data are in this text. As Professional Master final product it is intended to leave these activities as a proposal for Basic Education Mathematics teacher, with interesting elements for teaching sequences and geometric series and also for a work with infinity conceptions involved in this subject.

Keywords: Sequences. Geometric series. Infinite. Semiotic representation systems. High School. Mathematics. Teaching. Didactics.

1 INTRODUÇÃO

Ao ingressar no curso de Licenciatura em Matemática, fui confrontado com alguns tópicos abordados na grade curricular do curso e que mostraram um alto grau de dificuldade para mim e para os colegas de classe, em especial sequências e séries em Cálculo III. E, mesmo que tenhamos sido aprovados em Cálculo I e II, apresentávamos dificuldade em compreender as ideias de infinito implícitas nas séries, como por exemplo a "convergência" de uma adição com "infinitas" parcelas.

Refletindo sobre essas dificuldades, surgiram perguntas "Será que na Educação Básica faltou algo que poderia ter contribuído para que pudéssemos compreender os conceitos de infinito e de convergência apresentados?" "Não estão presentes no conteúdo as adições com infinitas parcelas e a convergência?". Procurei respostas em três coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovados no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2018. Verifiquei que os autores tratam desses conceitos com exemplos de dízimas periódicas na 1º série do Ensino Médio em progressões geométricas com $0 < r < 1$, para calcular a soma infinita de uma PG convergente.

Se séries geométricas estão diretamente conectadas a um conteúdo presente (e trabalhado) na Educação Básica, não seria normal os estudantes sentirem tanta estranheza em questões relacionadas às ideias de infinito envolvidas no trato desses assuntos, como a "adição" de infinitas parcelas, nem o fato dessa "adição" resultar numa "soma" finita, como é o caso das séries convergentes e, em particular, das dízimas periódicas e das progressões aritméticas ou geométricas "infinitas". Uma hipótese é que isso acontece porque são

propostos apenas cálculos com o simples uso de fórmulas e/ou tarefas repetitivas do gênero calcular e/ou determinar, o que contradiz Duval (2012) que menciona que muitas vezes a mera aplicação de fórmulas não faz sentido para o aluno.

Alguns assuntos que poderiam contribuir são apresentados aos estudantes na escolaridade básica. Um deles é o das dízimas periódicas, que pode ser explorado com séries - chamadas séries geométricas - e envolve duas noções de "infinito". Uma delas está na representação decimal da dízima, que tem "infinitas" casas decimais, e a outra, na representação da dízima em série com "infinitas" parcelas. Por exemplo, quando escrevemos $0,999... = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + ...$, podemos discutir com os estudantes o significado dos três pontinhos em cada uma das representações.

Observei que na Educação Básica - por exemplo nas provas da Avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP), propostas pela SEESP bimestralmente - os estudantes são constantemente "convidados" a mostrar que sabem converter uma dízima periódica em sua fração geratriz, mas será que compreendem o verdadeiro significado dessa conversão? O que está implícito na mudança de representação na igualdade acima? Compreendem a diferença entre as duas representações? E as ideias de infinito, tanto na convergência como na adição de infinitas parcelas?

Foi a partir de questões como essas que meu interesse pedagógico e didático por sequências e séries geométricas trouxe como objetivo estudar e pesquisar como abordar o trato do infinito e algumas de suas diferentes representações na matemática, a fim de compreender conceitos que até então estavam implícitos para mim em fórmulas aplicadas aos limites, derivadas e integrais, o que é uma convergência, o que é uma adição com infinitas parcelas.

Há muitas propriedades matemáticas que podem ser investigadas em conteúdos da Educação Básica, mas que acabam passando desapercebidas por nós professores e que poderiam ajudar os estudantes em estudos posteriores, tanto em faculdades de ciências exatas como em estudos técnicos. Uma delas, no meu entender, está ligada a conceitos relacionados às sequências e séries. Como ensinar coisas que podem ser complexas aos estudantes, com uma matemática distante da mera exposição de fórmulas? Mas cada vez mais próxima de uma compreensão conceitual e significativa, por meio de atividades interessantes?

No período da graduação, tive contato com diversas teorias sobre o ensino da matemática. Umas dessas teorias, a dos Registros de Representação Semiótica, proposta pelo pesquisador francês Raymond Duval, possibilitou-me uma reflexão sobre a importância de utilizar diferentes registros de representação para a compreensão de um objeto matemático. No segundo semestre de 2018, ingressei no Mestrado Profissional do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (MPEM) do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP) e juntamente com minha orientadora buscamos investigar o trato desses assuntos. No mestrado, visualizei a possibilidade de ampliar minha formação acadêmica por meio do desenvolvimento de uma pesquisa que tivesse como foco uma abordagem de Ensino de Matemática por meio da pluralidade de sistemas de representação de que a matemática dispõe para se comunicar.

Diante das experiências adquiridas na graduação e, especialmente, com as dificuldades dos estudantes, relacionadas às ideias de infinito, presente em diferentes formas, optamos por utilizar a Teoria das Representações Semióticas (DUVAL, 2009) sobre a necessidade de conhecer e coordenar pelo menos dois sistemas de representação semiótica e os argumentos de Fischbein (1994) sobre a importância da interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais para a aprendizagem em Matemática, no caso específico de sequências e séries geométricas no Ensino Médio, com o objetivo de pesquisar uma forma de ensino que vá além da mera utilização de fórmulas e para que o estudante possa compreender e apreender o real significado por trás de um conteúdo.

Acreditamos que a consolidação de conceitos e ideias matemáticos que estão presentes no trato de sequências e séries geométricas é caracterizada principalmente por processos de generalização que podem ocorrer quando há interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais, ao realizar tratamento e conversão de vários sistemas de representação semiótica.

2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

O estudo dos padrões em sequências e séries geométricas, como parte dos conteúdos de Álgebra e de Geometria, pode permitir o entendimento, a discriminação e o uso de diferentes sistemas de representação, pois ao tentar identificar padrões o estudante faz

observações e compreende conceitos e propriedades e ainda assume um papel fundamental na sua aprendizagem. Essa ligação permite ao professor explorar, com os diferentes registros de representação, concepções de infinito e trabalhar tratamentos e conversões. Precisamos explorar, no ensino de sequências e séries geométricas, os registros de representação, os padrões, as regularidades, os números e concepções de infinito.

No caso das séries geométricas, deve-se trabalhar dízimas periódicas, fração geratriz, discutir convergência e divergência de uma série geométrica por meio de exemplos com representações numéricas, algébricas, geométricas e gráficas. Mason (1996) considera que a busca da percepção de padrões e regularidades é um caminho para expressar generalidades. Vale e Pimentel (2015) defendem a ideia dos padrões como tema transversal a todos os níveis de ensino e ressaltam que

> [...] a profundidade e variedade das conexões que os padrões possibilitam com todos os tópicos da matemática conduz à consideração deste tema como transversal em toda matemática escolar, quer para preparar os alunos para aprendizagens posteriores quer no desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas e comunicação (VALE; PIMENTEL, 2015, p.168).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais + do Ensino Médio (PCN+), 2002, temos

> O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno entender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. Essas ideias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades. (BRASIL, 2002, p. 121).

Para Duval (2009), na Educação Básica e até mesmo em cursos superiores, quando se envolvem diferentes sistemas de representação semiótica de um objeto matemático, os estudantes encontram dificuldades para compreender, espontaneamente, as mudanças de registros e tendem a confundir um objeto com suas representações; daí, a importância de o professor trabalhar, em sala de aula, diferentes sistemas de representação e suas mudanças.

Conforme González-Martin (2009), uma das principais mudanças na transição do "cálculo" praticado no Ensino Médio para o universitário é a necessidade de trabalhar com limites ou com adições com infinitas parcelas, especialmente de sequências e/ou séries infinitas. Foram identificados por González-Martin (2009) e também por González-Martín, Nardi e Biza (2011), duas dificuldades em relação ao conceito de soma infinita. O primeiro é

a ideia intuitiva e natural de que a soma de infinitos termos deve ser infinita. O segundo é a concepção de que um processo infinito deve passar por cada etapa, uma após a outra, sem pular, o que leva ao conceito de infinito potencial.

De acordo com Fischbein (1994), para um estudante do Ensino Médio (ou do Ensino Superior) aceitar que vale a igualdade $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = 2$, ele precisa considerar o conjunto infinito de elementos da sequência em sua totalidade, ou seja, o infinito real. Fischbein (1994) relata um estudo feito por Vinner (1991) que, ao aplicar essa igualdade, com o intuito de definir o conceito de limite - após o ensino deste - com 15 estudantes superdotados do Ensino Médio, chegou aos seguintes resultados: soma = 2 (5,6%), soma = infinito (51,4%) e "a soma é menor que 2" ou "a soma tende a 2" (16,8%).

Segundo Vinner (1991), os estudantes não consideram a totalidade das parcelas e consideram o infinito da sequência como potencial, isto é, "a soma tende a 2 ou a soma é menor do que 2" (grifos nossos) e assumem que pode ser realizado sem nunca parar, a mesma dificuldade apontada por González-Martín, Nardi e Biza (2011). Em concordância com Fischbein (1994), "Como se pode ver, apenas uma porcentagem muito pequena de alunos deu a resposta ($s = 2$). A explicação é que, como mencionamos acima, o infinito real é contra intuitivo." (FISCHBEIN, 1994, p. 240, tradução nossa).[30]

Quina (2015), ao aplicar quatro atividades sobre sequências e séries, utilizando registros de representação semiótica, com alunos de 1ª série do Ensino Médio, buscou mostrar que o uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica enriquece o aprendizado em Matemática; no entanto, relata que notou um alto grau de dificuldade nas atividades propostas, pois muitos não conseguiram fazer a conversão entre os registros e não compreenderam as ideias de infinito envolvidas. Duval (2012) defende que compreender os registros de representação não ocorre espontaneamente e que esse tema necessita ser explorado em sala de aula por meio de atividades que trabalhem diferentes tipos de registros, dos mais simples aos mais complexos.

Segundo Bachelard (1996), o ensino das ciências exatas encontra inúmeros obstáculos epistemológicos no Ensino Médio (com funções, álgebra e o conceito de infinito) e é importante que o professor saiba que um novo conhecimento só acontece por meio de um

[30] *As one can see, only a very small percentage of students gave the correct answer (S = 2). The explanation is that, as we mentioned above, actual infinity is counterintuitive."* (FISCHBEIN, 1994, p. 240).

processo de questionamento constante, de retificação das concepções erradas trazidas pelo estudante, para a superação desses obstáculos. O não reconhecimento, pelos professores, de que pode haver obstáculos epistemológicos para a formação do pensamento científico do estudante é criticado por Bachelard e o professor precisa reconhecer que um estudante pode não compreender algo e entender o porquê dessa não compreensão.

> Os professores de ciências imaginam que o espírito começa como uma aula, que é sempre possível reconstruir uma cultura falha pela repetição da lição, que se pode fazer entender uma demonstração repetindo-a ponto a ponto. (BACHELARD, 1996, p.23).

Temos certeza que podemos ir além de exercícios e fórmulas e escolher, se houver, um livro ou um material didático que não restrinja o tema Sequências e Séries geométricas a isso. Assim, colocamos algumas indagações: como são introduzidos os conceitos de sequências e de séries geométricas em livros didáticos? Os professores iniciam o estudo do conteúdo com problemas e questões motivadoras? Podemos optar - e se sim, como fazer isso - pelo ensino do tema com o uso de várias representações semióticas?

2.1 Objetivos

Temos como objetivo de pesquisa desenvolver, analisar didaticamente e apresentar, ao final do Mestrado Profissional, propostas de ensino, compostas por conjuntos de atividades que envolvam generalizações, observação de padrões, concepções de infinito, justificativas e diferentes representações, no caso de sequências e séries.

Parte desse objetivo foi atingido, pois já desenvolvemos quatro propostas de ensino, três baseadas no triângulo de Sierpinski e uma na dízima periódica 0,999…., das quais damos detalhes na secção Metodologia.

E pretendemos responder quatro questões:

“Uma abordagem com vários registros de representação semiótica contribui para a aprendizagem de sequências e séries geométricas no Ensino Médio?”

“Essa abordagem favorece a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais?”

“Quais concepções de infinito emergem nas respostas dos participantes?”

“Quais as dificuldades explicitadas pelos participantes nos processos de tratamento e conversão de registros de representação semiótica?”.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 Contribuições da teoria dos registros de representação semiótica

Raymond Duval é filosofo francês, pesquisador e professor emérito da *Université du Littoral Côte d'Opale,* na cidade de Boulogne-sur-mer, na França. Com sua teoria, propõe investigar a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático.

O que seriam essas representações? "Uma escrita, uma notação, uns símbolos representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor... Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo." (DUVAL, 2012, p.268).

Segundo ele, a coordenação de vários registros de representação semiótica é fundamental para a apreensão conceitual de objetos matemáticos e para que o objeto seja reconhecido, mas não confundido com suas representações. É com estas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente, isto é, dá "acesso" ao objeto representado. Por exemplo: podemos ter acesso a uma parábola por meio da representação algébrica $y = ax^2 + bx + c, com\ a \neq 0$, da representação gráfica ou ainda da representação em língua materna "Dados um ponto P do plano e uma reta à qual P não pertence, uma parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam da reta e do ponto P".

Como os objetos matemáticos não são acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, o único meio de acessá-los é por meio de suas representações semióticas, que vão permitir que uma pessoa o estude, o compreenda e o comunique a outros.

Desse modo, "Como os sujeitos em aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem tratar apenas com as representações semióticas?" (DUVAL, 2012, p. 268). A impossibilidade de acesso direto aos objetos matemáticos, por serem abstratos, e a consequente confusão objeto/representação torna mais difícil a aprendizagem matemática.

De acordo com Duval, faz-se necessário, então, que esses sistemas de representação permitam três atividades cognitivas: a formação das representações, o tratamento destas e a conversão de um sistema para outro,

A formação de uma representação semiótica consiste no uso de um ou vários signos, pertencentes a um sistema semiótico já existente e utilizado para representar um objeto, de acordo com regras específicas. Por exemplo, formar palavras na língua portuguesa, combinando as letras do alfabeto para formar as sílabas que compõem a palavra a ser representada.

O tratamento é a atividade cognitiva que permite modificar uma representação em outra, no mesmo sistema semiótico. Por exemplo, parafrasear um texto em língua materna.

> Um tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema. O cálculo é um tratamento interno ao registro de uma escritura simbólica de algarismos e de letras: ele substitui novas expressões em expressões dadas no mesmo registro de escritura de números (DUVAL, 2009, p.57).

A conversão é a atividade cognitiva que permite transformar uma representação feita num certo sistema de representação na representação em outro sistema de representação. Por exemplo, passar da representação algébrica de uma função para a gráfica.

E Duval defende que uma pessoa precisa discriminar, entender e usar pelo menos dois sistemas de representação diferentes, para não confundir um objeto matemático com suas representações.

3.2 Argumentos de Fischbein

Fischbein (1994) contrapõe a Matemática como corpo formal e dedutivo rigoroso do conhecimento conforme exposto em tratados e livros didáticos de alto nível e a Matemática como atividade humana. Segundo ele, devemos olhá-la como um processo criativo da atividade humana, que implica em momentos de "iluminação, hesitação, aceitação e refutação" e que os estudantes sejam capazes de produzir afirmações matemáticas, construir provas e avaliar, não apenas formalmente, mas também intuitivamente, a validade dessas produções.

E chama atenção para a necessidade do educador matemático observar a existência, ou não, e a interação, ou não, de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais na atividade matemática de um ser humano.

O aspecto formal refere-se a axiomas, definições, teoremas e provas, que representam o núcleo da Matemática como uma ciência formal e precisam ser considerados quando analisamos a Matemática como um processo humano. Devem penetrar como um componente ativo do processo de raciocínio e devem ser inventados ou aprendidos, organizados, checados e usados ativamente.

O componente algorítmico diz respeito às técnicas e procedimentos de resolução, que devem ser ativamente treinados, pois apenas aspectos formais não são suficientes para adquirir habilidade em resolver problemas.

O aspecto intuitivo corresponde a uma intuição cognitiva, um entendimento intuitivo, uma solução intuitiva. A intuição cognitiva é o que o individuo considera verdadeiro sem a necessidade de prova ou justificação. Como consequência, as intuições podem desempenhar um papel facilitador no processo de conhecimento mas, eventualmente, podem aparecer equívocos e contradições. Por exemplo, muitos estudantes pensam que quanto maior for o perímetro de uma figura, maior será a sua área, ou que a soma de infinitas parcelas será infinito.

Essas intuições podem se tornar obstáculos epistemológicos, no sentido de Bachelard (1996) nos processos de aprendizado, resolução ou invenção. Por isso, Fischbein argumenta que é necessário que haja interação de aspectos formal, algorítmico e intuitivo para que haja aprendizagem e, se for o caso, a superação desses obstáculos.

4 METODOLOGIA

Como procedimento metodológico imediato para atingir os objetivos propostos, e na qualidade de trabalho final de uma Dissertação de Mestrado Profissional, colocamos “Propor uma abordagem para o ensino de sequências, progressões e séries geométricas, por meio de materiais concretos, com o uso de diferentes registros de representação semiótica”.

Destacamos os procedimentos metodológicos utilizados para a elaboração e a análise das propostas de ensino, bem como aplicação e análise dos dados de uma das atividades de uma das propostas.

- Propor uma abordagem para o ensino de sequências e séries no Ensino Médio, com o uso de diferentes registros de representação semiótica.
- Elaboração da Atividade: sob a perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009), investigar se o participante faz, ou não, interação entre aspectos intuitivos, algorítmicos e formais (FISCHBEIN, 1994). Para isso, procuramos explorar a utilização de diferentes registros para representar um mesmo objeto matemático, a partir de manipulação concreta, em papel sulfite 90, tamanho A1,
- Aplicação da atividade a um grupo de estudantes de uma 2º série do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de São Paulo.
- Análise dos dados obtidos - gravações de áudio, fotografias - para destacar dificuldades e percepções dos participantes na elaboração de registros figurais e algébricos, que envolvem processos de tratamento e conversão.
- Identificar dificuldades dos participantes nos processos de conversão e de tratamento de registros de representação semiótica em sequências e séries geométricas.
- Investigar dificuldades dos estudantes com a concepção de infinito nas representações algébrica, numérica, figural e gráfica.
- Investigar dificuldades dos estudantes quanto aos aspectos algorítmicos, intuitivos e formais.

Conforme apontado nos objetivos, já elaboramos quatro propostas de ensino, três baseadas no triângulo de Sierpinski e uma em dízimas periódicas, mas não analisamos didaticamente, ainda, nenhuma delas.

As três primeiras propostas podem ser descritas da seguinte forma:

1. Construção de três etapas do triângulo de Sierpinski no GeoGebra, hachurando o triângulo que não tem vértices no original e assim por diante; preenchimento de uma tabela com diversos registros (figural, numérico, algébrico) para representar o desenho obtido, o número de triângulos hachurados, a área de cada um desses triângulos e a área total desses triângulos nas três etapas consideradas; e respostas a um questionário investigativo. 2. Similar à proposta 1, mas hachurando os triângulos que se apoiam no original e assim por diante. 3. Similar à proposta 1, porém partindo da construção do triângulo de Sierpinski com papel sulfite.

Por conta da pandemia, só conseguimos organizar a aplicação de uma parte da proposta 3, com sete alunos de uma 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular da Cidade de São Paulo. Apresentamos, neste texto, parte da análise dos dados obtidos

(protocolos, gravações de áudio e fotografias feitas com celular) com essa aplicação e com a qual pretendemos destacar dificuldades dos participantes na elaboração de registros figurais e algébricos e nos processos de tratamento e conversão; se há, ou não, interação de aspectos algorítmicos, formais e intuitivos; concepções de infinito.

Para a construção das figuras, utilizamos como recursos pedagógicos materiais manipuláveis. Escolheu-se encaminhar a atividade em três fases, partindo da construção para a generalização.

Fase 1 – Construção das figuras, por meio de dobradura com materiais concretos. Foi proposto aos participantes a construção do triângulo de Sierpinski, por meio de dobradura em papel A_1 sulfite 90g.

Etapa 2 - Após o processo de construção da dobradura, propusemos um trabalho investigativo de generalização, por meio do preenchimento de uma tabela com cinco colunas e seis linhas.

Fase 3 - Solicita-se aos participantes que respondam um conjunto de questões sobre o que pode ser observado e generalizado nas duas fases anteriores. Para isso, disponibilizamos um questionário aos participantes, a qual foi abordada algumas questões que envolvem a ideia de infinito e convergência.

5 RELATO DA APLICAÇÃO COM SETE ESTUDANTES DE 2 SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Nosso objetivo é oferecer uma abordagem para a exploração de diferentes representações semióticas de sequências e séries geométricas, bem como enriquecer ideias associadas ao infinito, seja como resultado de uma "adição", seja como um processo que tem "infinitos" passos. A atividade foi aplicada em junho de 2021, com duração total de 1 hora e 30 minutos, a uma turma de 7 participantes da 2ª série do Ensino Médio, do turno da manhã, em uma escola particular da cidade de São Paulo. Para não os identificar pelo nome, utilizamos as siglas P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 e P_7 para referenciá-los.

A análise dos dados apresentados nesta secção corresponde aos dados obtidos com a atividade individual feita com os 7 participantes e que pode ser dividida em três fases:

Fase 1: dobradura (ver figura 1);

Fase 2: preenchimento de uma tabela (ver tabela 1) com diferentes representações - figural, numérica e algébrica;

Fase 3: resposta a um questionário (ver quadro 1), formado por questões relacionadas às ideias de infinito (como processo) e de convergência (como resultado de uma "adição"). Com a identificação dos erros e das dificuldades, pudemos comparar as respostas para avaliar se houve, ou não, interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais (FISCHBEIN, 1994).

Apresentamos a análise dos dados de acordo com as três fases citadas.

5.1 Fase 1 – dobradura

Cada participante recebeu um triângulo equilátero recortado com aproveitamento de um dos lados de um papel A1 sulfite 90 g, para realizar, por dobradura, as três primeiras etapas da construção do triângulo de Sierpinski. Apresentamos o passo a passo da dobradura realizada com os participantes.

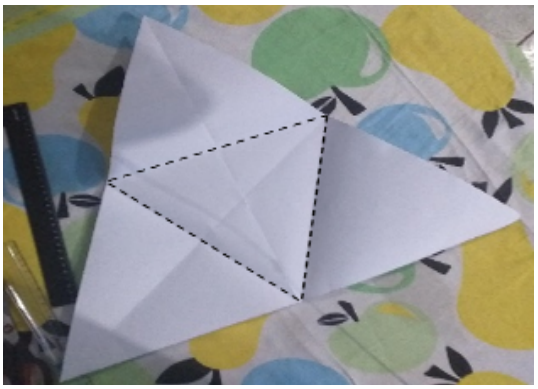
Primeiro passo: encontrar o ponto médio de um dos lados e dobrar o papel de modo que o vértice oposto coincida com esse ponto (ver figura 1).

Figura 1: Processo de construção do triângulo de Sierpinski

Fonte: Autores

Segundo passo: desdobrar o papel, dobrar nos pontilhados e desdobrar novamente, em seguida, dobrar o papel sobre si mesmo para vincar o pontilhado (ver figura 2).

Figura 2: Figura geradora



Fonte: Autores

Terceiro passo: pintar (ou hachurar) o triângulo que não tem os vértices do triângulo original – triângulo pontilhado da (figura 2), formado pelos pontos médios dos lados do triângulo original - para que, assim, conseguissem obter a figura geradora (ver figura 3). Assim chamada porque, no triângulo de Sierpinski, é ela que aparece “infinitas” vezes.

Esta é a Etapa 1, que corresponde à linha 2 da Tabela a ser preenchida.

Figura 3: figura geradora Etapa 1

Fonte: Autores

Quarto passo: em cada um dos três triângulos não hachurados da Etapa 1, repetir a dobradura feita na Etapa 1 e pintar o triângulo que não tem os vértices do triângulo original (ver figura 4).

Esta é a Etapa 2, que corresponde à linha 3 da Tabela a ser preenchida

Figura 4: Triângulo da Etapa 2

Fonte: Autores

Quinto passo: repetir esses passos nos nove triângulos não hachurados da Etapa 2. Esta é a Etapa 3, que corresponde à linha 4 da Tabela a ser preenchida (ver figura 5).

Figura 5: Triângulo da Etapa 3

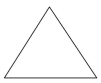
Fonte: Autores

5.2 Fase 2 – preenchimento da tabela

Terminadas as três Etapas de dobradura, propusemos um trabalho investigativo de generalização, por meio do preenchimento de uma tabela (ver tabela 1) com cinco colunas e seis linhas. Estas correspondem, respectivamente, às Etapas 0, 1, 2, 3, n e ($n \to \infty$) da Fase 1. Na coluna 1, pede-se o registro figural das dobraduras obtidas na Fase 1, com destaque para os triângulos hachurados nas etapas respectivas. Na coluna 2, está discriminada a Etapa, sendo que as quatro primeiras células contêm, respectivamente, os números 0, 1, 2 e 3 e as

duas últimas - relativas à Etapa genérica n e $(n \to \infty)$ - estão em branco e precisavam ser preenchidas pelos participantes. Na coluna 3, pede-se o registro numérico concernente à quantidade de triângulos hachurados (ou pintados). Na coluna 4, pede-se a área do menor triângulo hachurado (ou pintado) em cada uma das Etapas. Na coluna 5, pede-se a soma das áreas dos triângulos hachurados e que "aparecem" no registro figural correspondente - são as somas parciais para obtenção da soma das áreas de todos os triângulos hachurados (ou pintados) no chamado Triângulo de Sierpinski.

Tabela 1: Estudo da área pintada - triângulos coloridos

Desenho	***Etapa (n)***	***Números total de triângulos coloridos (todos)***	***Área de cada triângulo colorido (menor)***	***Área total de todos os triângulos coloridos (somas parciais)***
	***0***	0	0	0
	1	***1***	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}$
	2	***4***	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2} + 3^1.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right)$
	3	***13***	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2} + 3^1.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right) + 3^2.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}\right)$
	4	***40***	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^5}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2} + 3^1.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right) + 3^2.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}\right) + 3^3.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^5}\right)$
...	...	...	...	...
Genérico	N $com n \geq 1$	$a_1 = 1$ $3a_{(n-1)} + 1$ $com\ n \geq 2$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ $com\ n \geq 1$	$\sum_1^n l^2\frac{\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ $com\ n \geq 1$
...	...	...	...	...
Quando o número de termos tende ao infinito $(n \to \infty)$	$\lim_{n\to\infty} n = \infty$	$\lim_{n\to\infty} 3a_{(n-1)} + 1 =$ $com\ \ n \geq 1$	$\lim_{n\to\infty}$ $\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ $com\ \ n \geq 1$	$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n l^2\frac{\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ $com\ \ n \geq 1$

Fonte: Autores

Reforçamos que na 5ª linha da tabela pede-se a generalização do que ocorre nas 4 primeiras linhas, em termos de etapas vencidas no processo infinito (resultados parciais de um número finito de etapas), caso em que o participante tem que preencher a coluna 2 com o

símbolo genérico, por exemplo n, e na 6ª linha, a generalização sobre o que ocorre ao final do processo infinito (número infinito de etapas), que corresponde a fazer $(n \to \infty)$. Em ambos os casos, o participante precisa basear-se em aspectos formais e algorítmicos.

Com a tabela, o objetivo é provocar o raciocínio indutivo e, consequentemente, a análise e a generalização de padrões e de regularidades em representações figurais, numéricas e algébricas que podem ser associadas a sequências e séries geométricas, bem como discutir processos de conversão e de tratamento desses registros. Na análise das respostas obtidas, investigar se o participante faz, ou não, interação entre aspectos intuitivos, algorítmicos e formais (FISCHBEIN, 1994).

5.3 Fase 3 – questionário investigativo

Solicita-se aos participantes que respondam um conjunto de questões (ver quadro 1) sobre o que pode ser observado e generalizado, a partir das dobraduras e do preenchimento da tabela, envolvendo as ideias de infinito e de convergência. Essas questões foram disponibilizadas em papel.

Quadro 1: questionário - triângulos coloridos

1 - Ao fazer as dobraduras, quais propriedades matemáticas podemos encontrar a cada nova etapa?
2 - Seria possível continuarmos a construção do triângulo indefinidamente? Se sim, quantos triângulos teríamos?
3 - Seria possível o número de triângulos ser infinito? Se sim, podemos dizer que a área também será infinita?
4 - O número de iterações (etapas) será infinito? Se sim, seria possível justificar?
5 - O processo de iteração (etapas) é sempre o mesmo? Se sim. Por quê?
6 - Há alguma regularidade na forma com que as áreas aumentam no decorrer das iterações (etapas)? Que regularidade é essa?
7 - O que ocorre com a "área de cada triângulo colorido (menor)" a cada novo termo (etapa). Se aproxima de algum valor específico? Essa iteração (etapas) será infinita?
8 - A cada novo termo (etapa), a sequência "área total de todos os triângulos coloridos" se aproxima de algum valor específico? Essa interação será infinita?

Fonte: Autores

Na próxima seção, apresentamos uma análise geral das respostas dos participantes **P_1, P_2, P_3, P_3, P_4, P_5, P_6 e P7**, obtidos com a Atividade.

6 RESULTADOS JÁ OBTIDOS

A primeira observação importante que fazemos é que nenhum dos participantes preencheu as linhas 5 e 6 da tabela, que correspondem, respectivamente, à generalização do número de etapas possíveis - n - e o que ocorre ao final do processo infinito de etapas - $(n \to \infty)$. Assim, a análise referente às 4 primeiras linhas da tabela. A segunda, é que os participantes foram orientados a preencherem as tabelas tendo como base as dobraduras.

Apresentamos no quadro (ver quadro 2) os percentuais de respostas em branco, erradas e corretas para cada uma das colunas das tabelas preenchidas pelos participantes. Foram consideradas **corretas** as que correspondiam com a representação exigida na coluna/tabela; a coluna **Em Branco/quadro** indica que a coluna/tabela estava em branco ou parcialmente em branco e a coluna **Erradas/quadro** corresponde às respostas erradas/tabela ou sem sentido.

Quadro 2: Classificação das respostas dos participantes

Descrição das colunas na tabela das representações	**Corretas**	**Erradas**	**Em branco**
1ª. Coluna / Representação figural	85,8 %	14,2%	0%
3ª. Coluna / Números total de triângulos coloridos (todos)	100%	0%	0%
4ª. Coluna / Área de cada triângulo colorido (menor)	28,6%	57,14	16,2%
5ª. Coluna / Área total de todos os triângulos coloridos	0%	28,6%	71,5%

Fonte: Elaborado pelos autores

De fato, a representação figural não apresentou dificuldades aos participantes, pois, ao fazerem as dobraduras, perceberam o processo repetitivo a cada etapa. A terceira coluna foi preenchida corretamente por todos os participantes. A análise da quarta coluna revelou dificuldades na identificação do padrão que define a área de cada triângulo menor, a cada etapa. Apenas os participantes **P_1** e **P_3** conseguiram preencher as colunas. Isso mostra as

dificuldades dos participantes em fazerem conversões para representações algébricas, em linha com o que já afirma Duval (2009) em sua teoria por serem não-congruentes apresentam maiores dificuldades de conversão. Ainda na quarta coluna, os erros dos outros participantes, mostram que, por mais que eles tenham percebido nas dobraduras, que a relação de proporção da área é de ¼ a cada nova etapa, não conseguiram representar algebricamente este padrão.

Outra dificuldade encontrada, foi que os participantes não sabiam calcular a área de um triângulo equilátero de lado ***l***. Com o intuito de fazer com que os participantes pudessem generalizar, foi proposto que chamassem a área do triângulo equilátero de A_0. Logo que, os participantes $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_3}$ tinham manifestados que o padrão entre as áreas era de ¼ a cada nova etapa. O participante $\mathbf{P_3}$ respondeu como a área sendo ¼ da área da etapa zero e o participante $\mathbf{P_1}$ respondeu como sendo 0,25 da área da etapa zero.

Além disso, cinco participantes deixaram a quinta coluna em branco. As dificuldades dos estudantes em apresentarem uma representação algébrica para as colunas 4 e 5, pode estar ligada às dificuldades relacionadas à identificação de padrões e generalização nas somas das áreas do triângulo a cada etapa, como mudança entre representações e generalização. Os resultados dos protocolos dos participantes reiteram, portanto, que o desempenho negativo dos participantes nas representações algébricas deve-se à ausência de aspectos algorítmicos (Fischbein, 1994), pois, claramente, demonstraram dificuldades em representar generalizações de padrões. Segundo Duval (2009), essa mudança de registro da representação numérica para a algébrica não é fácil para os estudantes.

O insucesso nas representações algébricas pode ser explicado, possivelmente, por uma ausência de conhecimentos matemáticos que já foram - ou deveriam já ter sido - abordados em anos anteriores e que seriam necessários para generalizarem. O fato dos participantes não conseguirem definir uma representação algébrica de uma sequência numérica, pode estar ligado, em grande medida, a uma categoria de ensino que supervaloriza técnicas de obtenção de resultados e o uso de fórmulas algébricas. Com isso, esse tipo de atividade pode parecer estranho aos participantes, ou não são cobrados quando são exigidos raciocínios matemáticos mais avançados que vão além de aplicação de fórmulas.

A análise mostra evidentes dificuldades na generalização, conversão, tratamento e identificação da lei algébrica, presentes nos estudantes do Ensino Médio. Essa perspectiva reitera dificuldades dos participantes em lidar com aspectos algoritmos e formais (Fischbein,

1994) relativos ao estudo de sequências e séries geométricas, que podem impactar negativamente o desenvolvimento do raciocínio matemático e dificuldades de conversões para diversas representações. Esses dados indicam que os aspectos de Fischbein, (1994) e as diferentes representações de Duval (2009), quanto aos processos de representação e mudança entre representações talvez não tenham sido explorados de forma ampla com estes estudantes na educação básica.

Desta forma, essa "ausência" de interação entre os aspectos algorítmicos e formais dificultaram o desenvolvimento de processos de generalização e representação. Além disso, a presença de espaços deixados em branco nas tabelas evidenciam que aspectos intuitivos e algorítmicos não foram colocados em interação com aspectos formais, ou seja, os aspectos intuitivos quanto ao processo de construção da dobradura – o qual foi observado nos questionários dos participantes- não interagiram com os aspectos algoritmos e formais na tabela. Essa não interação aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, e nas diversas formas de representar um objeto matemático, no caso de sequências e séries geométricas, tende a restringir a capacidade dos estudantes em lidar com problemas deste gênero. E, por conta disso, não tiveram autonomia para generalizar por não estarem familiarizados com generalizações.

REFERÊNCIAS

BACHELARD, Gaston. **O novo espírito científico:** contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução Estrela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, p. 17-28, 1996. Disponível em: http://astro.if.ufrgs.br/fis2008/Bachelard1996.pdf. Acesso em: 10 de set. de 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf . Acesso em: 10 de set. de 2021.

DÍAZ, O. R. T. A atualidade do livro didático como recurso curricular. Tradução: Maria Susley Pereira. **Linhas Críticas**, Brasília: DF, v. 17, n. 34, p. 609-626, set/dez 2011.

Disponível em: http://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/6248/5121. Acesso em: 10 de set. de 2021.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revemat:** Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012b. dez. 2012. Trad. Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p97/22381. Acesso em: 10 de set. de 2021.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Registres de representations semiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012. Trad. Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: http://priodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso em: 10 de set. de 2021.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2005. p. 11-34.

DUVAL, R**. Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. (Fascículo I).

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M. A**.** Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. *In:* **Pro-Posições**: Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação - Unicamp, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/1761/10-artigos-fiorentinid_etal.pdf. Acesso em: 10 de set. de 2021.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. *In:* BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; STRÄßER, R; WINKELMANN, B. **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994. p. 231-245. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~dpdias/2016/GEN5711%20-%20Fischbein.pdf. Acesso em: 10 de set. de 2021.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. L'introduction du concept de somme infinie: une première approche à travers l'analyse des manuels. *In*: ACTES DU COLLOQUE EMF 2009, Dakar. **Actes** [...]. Université de Genève, 2009. Groupe de Travail 7, p. 1048-1061. Disponível em: http://emf.unige.ch/files/6414/5329/9054/EMF2009_GT7_Gonzales.pdf. Acesso em: 10 de set. de 2021.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S.; NARDI, E.; BIZA, I. Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 42, n. 5, p. 565-589, 2011. Disponível em: https://ueaeprints.uea.ac.uk/id/eprint/15824/1/2011_IJMEST_Gonzalez_Martin_Nardi_Biza_42_5_565_589_Repository.pdf. Acesso em: 10 de set. de 2021.

QUINA, C. M. **Sequências e Séries**: uma proposta duvaliana para a educação básica. 2015. 181f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-21012016-211144/publico/Dissertacao_Caio_Moura_Quina.pdf. Acesso em: 10 de set. de 2021.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões Visuais, Generalização e Raciocínio. *In*: Machado, S. D. A.; Bianchini, B. L.; Maranhão, C.S.A. (Orgs.). **Teoria elementar dos números**: da educação básica à formação dos professores que ensinam matemática. São Paulo: Iglu, 2015. p.167-198.

UMA ABORDAGEM DE ENSINO DE MATEMÁTICA POR MEIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA MECÂNICA

AN APPROACH TO TEACHING MATHEMATICS THROUGH MECHANICAL ENGINEERING PROBLEM SOLVING

Valter Firmino da Silva Junior [1], Barbara Corominas Valério [2]

[1] Mestrando do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP; valtersilva@usp.br
[2] Docente do Departamento de Matemática do IME-USP e orientadora; barbarav@ime.usp.br

Resumo: Pretendemos realizar uma abordagem de ensino de matemática por meio de resolução de problemas de engenharia mecânica. Nos embasamos no referencial teórico de resolução de problemas, que será aplicado em nossa pesquisa, em particular, envolvendo problemas de engenharia mecânica cuja solução e compreensão perpassam por conteúdos ou habilidades de matemática de nível de ensino básico. Neste trabalho, apresentamos um problema envolvendo bomba hidráulica. Nesse problema, busca-se obter as curvas características da bomba e de um sistema, a partir de três pontos para cada curva. Para tanto, assumimos um comportamento parabólico para as duas curvas. Além disso, pede-se para achar o ponto de operação da instalação. Com essa abordagem diferenciada, pretende-se despertar interesse e motivação dos alunos para o aprendizado dessa matemática aplicada e contextualizada.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Ensino de Matemática. Engenharia mecânica.

Abstract: We intend to carry out an approach to teaching mathematics through solving mechanical engineering problems. We are based on the theoretical framework of problem solving, which will be applied in our research, in particular, involving mechanical engineering problems whose solution and understanding permeate basic education content or math skills. In this work, we present a problem involving a hydraulic pump. In this problem, we seek to obtain the characteristic curves of the pump and of a system, from three points for each curve. Therefore, we assume a parabolic behavior for the two curves. In addition, you are asked to find the operating point of the installation. With this differentiated approach, it is intended to arouse students' interest and motivation for learning this applied and contextualized mathematics.

Keywords: Problem solving. Mathematics teaching. Mechanical engineering.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma abordagem de matemática utilizando a metodologia de Resolução de Problemas (RP) via problemas de engenharia mecânica. Com isso, pretendemos estudar conceitos de matemática do ensino médio com uma proposta diferenciada.

A motivação para a escolha do tema do presente trabalho está atrelada ao fato de o presente autor, além de ser formado em licenciatura em matemática, também é graduado em engenharia mecânica. Assim, considerando o interesse pelas áreas de ensino de matemática e engenharia mecânica, acredita-se que seja possível desenvolver uma proposta de intervenção que envolvesse essas áreas e que seja de interesse dos alunos.

Resolver problemas é parte fundamental da matemática em seus diferentes níveis. Muito do conhecimento e teorias atuais da matemática surgiram com a busca de se tentar resolver problemas específicos. Diante desse desenvolvimento natural da matemática, é interessante fazer com que o aluno vivencie tal processo de desenvolvimento. Acreditamos que trabalhar com a metodologia de Resolução de Problemas na escola de educação básica é uma oportunidade de tornar o ensino mais interessante para o aluno, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio matemático.

2 REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

A necessidade de resolver problemas remonta a um período bem antigo da civilização, por exemplo, ainda no período em que a atividade econômica principal era a agricultura, problemas como ter que calcular a área de um terreno para plantio ou ter que calcular o perímetro de terreno para se obter o comprimento de cerca necessário para cercá-lo foram exemplos de problemas com os quais as civilizações antigas se depararam.

Contudo, como teoria de metodologia de ensino, a Resolução de Problemas surge na primeira metade do século XX, nos Estados Unidos. Thorndike (1921) (apud Onuchic, 2019), no livro “The New Methods in Arithmetic” (Os Novos Métodos na Aritmética) apresentou algumas técnicas desta metodologia.

A principal referência quando se fala em Resolução de Problemas é George Polya, que possui várias obras voltadas ao tema. Após seus trabalhos, e de outros estudiosos do assunto, a pesquisa em Resolução de Problemas começou a ganhar força, enquanto estratégia de ensino, a partir do final da década de 1960 nos Estados Unidos, e depois em outros países. No entanto, só começou a marcar presença no currículo escolar norte-americano no pós Movimento da Matemática Moderna (MMM), a partir da década de 1980.

Em seu livro "A Arte de Resolver Problemas", Polya (1945) (apud Onuchic, 2019) apresentou as 4 fases de Resolução de Problemas: 1) compreender o problema; 2) estabelecer um plano; 3) executar o plano; e 4) retrospecto da solução. Além disso, ele também apresentou em suas obras um estudo mais aprofundado de como se trabalhar com RP.

Segundo Onuchic (2019):

> No ano de 1980, o documento "An Agenda for Action – recommendations for School Mathematics of the 1980s" (Uma Agenda para Ação – Recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980), publicado pelo NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos), propôs que Resolução de Problemas fosse o foco da matemática escolar nos anos 1980. O trabalho com RP deveria considerar a "[...] aplicação da matemática ao mundo real, servindo à teoria e à prática de ciências atuais e emergentes, e resolvendo questões que ultrapassassem as fronteiras das ciências matemáticas." (NCTM, 1980, p.2, tradução Onuchic)(apud Onuchic, 2019).

Assim, nesse documento, já constava a importância de uma abordagem de matemática escolar via resolução de problemas aplicados a contextos que extrapolam o ambiente matemático, por exemplo, aplicado à física, engenharia, economia, etc. Como propomos neste trabalho.

No livro "New Directions for Elementary School Mathematics" (Novas Direções para a Matemática da Escola Elementar) do NCTM, Schoeder e Lester (1989) (apud Onuchic, 2019) trazem três possíveis abordagens de resolução de problemas: (1) ensinando *sobre* resolução de problemas, (2) ensinando *para* resolver problemas, e (3) ensinando *via* resolução de problemas.

Em (1), ensinando *sobre* resolução de problemas, trata-se de apresentar técnicas ou procedimentos para resolver problemas. Trabalhar com o método proposto por Polya, ou com alguma variação dele, enquadra-se nesse item. Em (2), ensinando *para* resolver problemas, concentra-se no ensino de matemática voltado para resolver problemas, o foco é conseguir utilizá-la, por exemplo com a memorização e aplicação de fórmulas, talvez isso seja mais

próximo ao que ocorre em cursos pré-vestibular ou cursos para concurso, em que a ênfase é preparar o aluno para fazer provas. Nesse caso, primeiro é desenvolvida a parte "teórica" e depois o professor propõe problemas aos alunos, em que os alunos aplicam a teoria vista para resolver esses problemas. Em (3), ensinando *via* resolução de problemas, a abordagem começa com uma situação-problema, e conceitos e habilidades matemáticas são desenvolvidos durante a resolução do problema.

Neste trabalho, pretende-se essencialmente uma abordagem via metodologia de RP, que acreditamos ser mais adequada ao contexto da presente pesquisa. Sem deixar, no entanto, ainda que implicitamente, de empregar orientações desenvolvidas pelo Polya, não nos eximimos de tratar do ensino para resolução de problemas, considerando a aplicação da matemática para resolver problemas de engenharia mecânica. Logo, aqui abordaremos, simultaneamente, tanto o "via", quanto o "para", quanto o "sobre".

3 DESENVOLVIMENTO

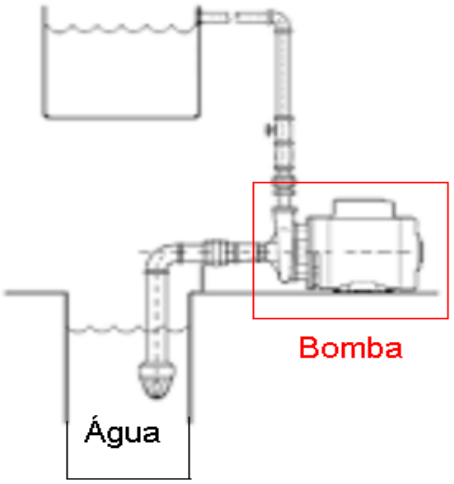
3.1 Problema da bomba

Sabemos que a água que chega às nossas casas vem por tubulações subterrâneas, mas as caixas d'água em nossas residências estão localizadas normalmente em cima do teto. Assim, como é possível que a água suba de um nível abaixo da terra para um nível acima do teto da casa? Isso ocorre naturalmente? Ou tem algum elemento que faz com que a água suba?

Este problema está presente em nosso cotidiano e provavelmente muitos alunos nunca pararam para pensar no assunto. O que ocorre em nossas casas, pode ser transformado em um problema mais geral, presente em várias situações. Como elevar a água de um reservatório inferior para um reservatório em um nível mais elevado?

Por causa da força gravitacional, a água só desce espontaneamente, para que ela suba é necessário que alguma máquina realize esse serviço. A máquina que usamos para realizar esse trabalho chamamos de Bomba hidráulica, ela bombeia o fluido fornecendo energia a ele para que ele seja transportado de um nível baixo a um nível mais elevado. A figura a seguir ilustra uma instalação em que a bomba desempenha tal função.

Figura 1 – Bomba como solução para elevar água de reservatório inferior para superior



Fonte: Adaptado do site da Intech Machine [31]

No entanto, voltando ao ponto das caixas d'água em nossas casas, não há uma bomba próxima a cada casa, mas sim unidades de bombeamento em pontos estratégicos que suprem a demanda de um bairro ou região.

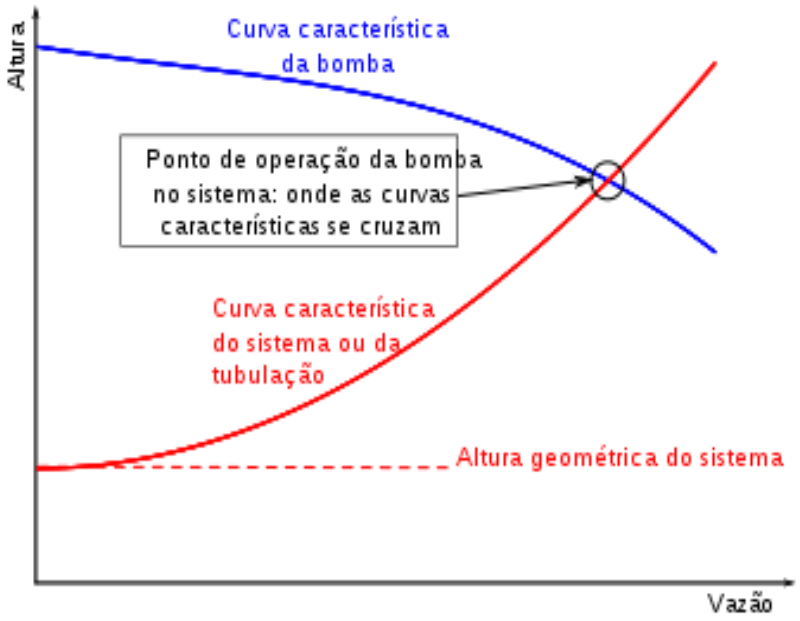
Figura 2 – Exemplo de Instalação com bomba hidráulica

Fonte: arquivo pessoal

[31] Disponível em:< https://intechmachine.com.br/cuidados-na-montagem-instalacao-e-utilizacao-das-bombas-dagua/>

Uma vez introduzido o papel de uma bomba hidráulica, será apresentado aos alunos o gráfico a seguir que ilustra o comportamento das curvas características de uma bomba e de uma instalação.

Gráfico 1 – Exemplo de curvas características de bomba e instalação



Fonte: Wikipedia [32]

Os alunos serão separados em grupos, receberão impresso o gráfico acima e serão instigados a refletirem e discutirem sobre o comportamento dessas curvas: O que esse gráfico nos diz? Como as curvas se comportam? Como explicar tal comportamento? Que tipo de curvas nós temos? É uma reta? Uma função exponencial? ou com qual outra curva elas se parecem? Elas têm intersecção? Como é chamado esse ponto? Qual o significado dele?

Como resultado dessa discussão dos alunos, espera-se que eles cheguem a refletir sobre os aspectos que apresentamos a seguir, os quais serão melhor conceituados junto a turma após eles terem refletido sobre o gráfico.

O eixo x do gráfico representa a vazão, que indica o volume de líquido transportado por unidade de tempo. Já o eixo y representa a altura, também chamada de carga, que está associada à pressão e à energia do fluido.

[32] Disponível em: <https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Bomba_x_Sistema1.svg>.

a) Na curva característica do sistema, por que será que a altura aumenta quando a vazão aumenta?

A altura aumenta em função do aumento da vazão, pois com o aumento da vazão a velocidade do fluido é maior e a perda de energia do fluido também é maior devido ao atrito do fluido nos componentes do sistema (tubulações, restrições, curvas, válvulas etc.). Em outras palavras, para um sistema operar em maiores vazões ele vai requerer mais energia do fluido, a qual, por sua vez, é fornecida pela bomba.

b) Na curva característica da bomba, por que será que a altura diminui quando a vazão aumenta?

A altura diminui em função do aumento da vazão, pois para maiores vazões temos maiores velocidades e, da equação de energia de um fluido (equação de Bernoulli), para maiores velocidades temos menores alturas, já que a energia total se conserva. Ou ainda, quanto maior a velocidade, maior a energia cinética do fluido e assim menor será sua energia potencial, já que a soma dessas duas se conserva, logo menor será a altura, que é proporcional à energia potencial.

c) Por que se recomenda que a bomba e o sistema operem no ponto de operação?

O Ponto de operação da bomba é o ponto no qual a bomba opera com máximo rendimento, na melhor situação possível, com melhor aproveitamento energético.

Após tal análise, discussão e formalização dos conceitos envolvidos no gráfico apresentado, serão propostos os 4 exercícios a seguir em que os seguintes conteúdos matemáticos serão tratados: função de 2° grau e seu gráfico, resolução de sistemas lineares de 3 equações e 3 incógnitas, encontrar o ponto de intersecção de curvas e resolução de equação do 2° grau.

1) Encontrar a equação da curva característica de uma bomba hidráulica cujos pontos experimentais são apresentados na tabela a seguir, é razoável admitir que a curva característica da bomba seja uma função do 2º grau. (Será comentado que rigorosamente as curvas de bombas não seguem uma função do 2° grau, ela é obtida experimentalmente pelo fabricante. Contudo, para efeito didático, modelamos aqui a curva como uma função do 2° grau, o que nos permite uma boa aproximação de uma curva real).

Tabela 1 – Pontos bomba

Q (m³/min)	Hb (m)
0	90
2	82
5	40

2) Analogamente, encontrar a equação da curva característica de um sistema/instalação cujos pontos experimentais são apresentados na tabela a seguir, considere que a perda de carga da instalação também é uma função do 2º grau. (será discutido com os alunos o motivo da curva seguir uma função do 2° grau. Basicamente, isso deve-se ao fato de as perdas na instalação dependerem do quadrado da velocidade do fluido)

Tabela 2 – Pontos sistema

Q (m³/min)	Hs (m)
1	26
3	50
5	90

3) Encontre o ponto de operação da bomba, ou seja, o ponto em que a altura manométrica fornecida pela bomba coincide com a perda de carga da instalação em uma mesma vazão. Ou em outras palavras, encontre o ponto de intersecção das duas curvas.

4) Construir em um único gráfico as 2 funções obtidas nos itens 1) e 2) e indicar neste gráfico o Ponto de Operação da bomba, conforme obtido no item 3).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao tratar de resolução de problemas de engenharia mecânica cuja solução e compreensão envolvam conteúdos matemáticos, espera-se despertar o interesse e motivação dos alunos para aprenderem tais conteúdos, no contexto dessa abordagem diferenciada. E perceberem, também, que a matemática não existe apenas para um fim em si mesma, ela é aplicável a inúmeras situações, sendo aqui apenas ilustrada uma delas: engenharia mecânica.

REFERÊNCIAS

ONUCHIC, L. R. **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. São Paulo: Paco Editorial, 2019. Disponível em: https://pt.scribd.com/read/412691409/Resolucao-de-Problemas-Teoria-e-Pratica#. Acesso em: 28 set. 2021.

NÚMEROS REAIS: Uma proposta de abordagem para o Ensino Fundamental

REAL NUMBERS: A proposed approach to Elementary School

Érika Dudr Pereira [1], Vera Helena Giusti de Souza [2]

[1] Profª de Matemática formada em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo e mestrando em Ensino de Matemática pela Universidade de São Paulo; erika.dudr.pereira@usp.br
[2] Profª Dra. Em Educação Matemática formada em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo, mestrado em Matemática Matemática pela Universidade de São Paulo e doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo; verahgsouza@gmail.com

Resumo: Temos por objetivo no presente artigo deixar evidente propostas relacionadas à nossa dissertação que tem como foco clarear a ideia do quão importante se faz uma abordagem para os números reais o quanto antes no Ensino Fundamental II. Em relação ao viés teórico, baseamo-nos nas ideias de *imagem de conceito*, *definição de conceito*, *fatores de conflito potencial* e *fatores de conflito cognitivo* de Tall e Vinner (1981). Para evidenciar uma de nossas hipóteses, apresentaremos a análise de dois alunos de um questionário já aplicado na pesquisa, um de primeira e outro de terceira série do Ensino Médio, além de prováveis passos futuros.

Palavras-chave: Números reais. *Imagem de conceito. Definição de conceito.* Ensino Médio. Ensino Fundamental. Matemática. Ensino. Didática.

Abstract: Our object in this article is to make evident proposals related to our dissertation, which focus on clarifying the idea of how important an approach to real number is made as soon as possible in Elementary School II. Regarding the theoretical, we base ourselves on the ideas of *concept image*, *concept definition*, *potential conflict factors* and *cognitive conflict factors* of Tall and Vinner (1981). To demonstrate one of our hypotheses, we will present the analysis of two students from a questionnaire already applied in the reserch, one from the first and the other from the third grade of High School, as well as probable future steps.

Keywords: Real Numbers. *Concept Image*. *Concept Definition*. High School. Elementary School. Mathematics. Teaching. Didactics.

1 INTRODUÇÃO

Interessados em pesquisar e propor ideias relevantes no contexto da Educação Matemática, buscamos desenvolver a presente pesquisa, visando tratar um ponto considerado por nós nevrálgico na Educação Básica, que são os números reais.

Antes de nos aprofundarmos nas ideias, acreditamos ser importante trazer o contexto no qual a pesquisa tem se desenvolvido, e um pouco de nossa experiência como aluna e

professora. Inicialmente, destacamos o contexto pandêmico e que, por conta disso, tivemos que fazer algumas adaptações para obter as devolutivas de formulários e termos, por exemplo, por plataformas online. Ainda assim, acreditamos ter conseguido dar um andamento de qualidade para nosso projeto, mesmo com as dificuldades enfrentadas e novas adaptações.

Enquanto aluna da Educação Básica, julgamos que nossa trajetória entre o 6º ano do Ensino Fundamental e a 3ª série do Ensino Médio (entre os anos 2009 e 2015) serviu também como motivação para o desenvolvimento das ideias voltadas para os números reais, visto que nos recordamos ter tido uma abordagem pouco lúdica e muito tradicional, sem conseguir estabelecer conexões na cadeia que vai desde os números naturais até os números reais, enxergando-os mais isoladamente e aprofundando pouco o assunto.

Como aluna de graduação em Licenciatura em Matemática (entre os anos 2016 e 2019), a experiência foi dificultosa, uma vez que ideias vistas no transcorrer do curso, mais especificamente na disciplina "Análise Real", como a construção dos números reais, foram carregadas de formalismo e pouca discussão sobre formas de abordar os números reais em sala de aula da Educação Básica.

Ingressando no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (MPEM) do IME-USP, foi possível ter uma experiência um pouco mais satisfatória, em relação à construção dos números reais, na disciplina "Análise Real com Aplicações", porém ainda com ideias carregadas de formalizações e pouca relação direta com o contexto dos alunos em sala de aula na Educação Básica, e de que maneira o docente pode transpor tais aspectos para os alunos com um grau de formalização dentro das habilidades e competências esperadas de cada um dos anos neste nível de ensino.

Além de dificuldades para o ensino e a aprendizagem dos números reais, observamos que os documentos oficiais preveem, conforme será explicitado, o início do trabalho com estes números ao fim do Ensino Fundamental e acreditamos que isso possa começar antes, com uma abordagem viável para os alunos. Julgamos ainda que a maneira pela qual currículos e documentos oficiais propõem abordagens para os números reais não é a melhor possível e cremos que alunos do Ensino Médio têm saído da Educação Básica com deficiências no assunto devido à má compreensão de ideias desde os anos iniciais.

Antes de elaborar e possivelmente aplicar uma abordagem para a introdução dos números reais no Ensino Fundamental II, propusemos e analisamos um questionário diagnóstico para evidenciar dificuldades de alunos de Ensino Médio em relação a esses

números. Também entrevistamos o professor destes participantes para só então acharmos que poderíamos introduzir os números reais, o quanto antes, no Ensino Fundamental, com um conjunto de atividades.

2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

O tratamento aprofundado ao qual tivemos acesso na disciplina "Análise Real com Aplicações", oferecida pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP, motivou-nos a pesquisar abordagens de assuntos da área, como os números reais, por exemplo, na Educação Básica. Além disso, após leitura crítica dos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCNs, 1998), da *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC, 2017), do *Currículo do Estado de São Paulo* (CESP, 2008), bem como do *Currículo Paulista* (CP, 2019), cujo resultado será explicitado, temos a intenção de desenvolver e testar um conjunto de atividades para aplicação em sala de aula de Matemática, voltado para propriedades dos números reais e outros aspectos envolvidos, no contexto do Ensino Fundamental, com foco em turmas de 7º ano. Com a aplicação de tais atividades, temos o intuito de estudar e analisar tanto as experiências e situações em sala de aula, como também as respostas obtidas nos protocolos dos participantes, a fim de observar se esse conjunto de atividades teve influência positiva na concepção sobre os números reais em alunos deste nível de ensino.

Mas por que acreditamos que tal conteúdo - que geralmente ganha maior profundidade no Ensino Médio ou até no Ensino Superior - deve ser abordado tão "cedo"? Qual ganho tal abordagem no 7º Ano poderia trazer aos alunos?

Observemos um trecho da pesquisadora Igliori (1999):

> Numa pesquisa diagnóstica, que realizamos com alunos do terceiro grau (Igliori e Silva, 1998), pudemos encontrar alguns dos aspectos apontados por Brousseau e reforçados por Duroux como, por exemplo, a incapacidade de encontrar um número decimal entre 3,25 e 3,26. O estudante diz nessa pesquisa que o "sucessor" de 3,14 é 3,15, numa nítida transposição do conceito de sucessor, conceito esse existente no contexto dos números naturais e transposto para os números decimais. (IGLIORI, 1999, p.89).

De acordo com o texto, alunos do Ensino Superior, chamado na época de terceiro grau, chegam com deficiências de compreensão em questões relacionadas à concepção de densidade do conjunto dos números racionais (Q) no conjunto dos números reais (R). Tal aspecto torna-se notável uma vez que utilizam propriedades, por exemplo, observadas nos

números naturais (N), para determinar qual o sucessor, ou antecessor, de um número com uma determinada quantidade de casas decimais. A densidade dos números racionais está diretamente ligada à construção dos números reais, o que evidencia a importância de abordar tal assunto o quanto antes nos anos da Escola Básica.

A pesquisa diagnóstica relatada por Igliori (1999) permitiu, indiretamente, que os alunos do Ensino Superior expusessem suas concepções sobre a densidade de Q em R, bem como a respeito dos números reais, concepções essas que já deveriam estar nas *imagens de conceito* (TALL; VINNER, 1981), desse grupo, uma vez que a abordagem dos números reais está prevista ainda no Ensino Fundamental, como evidenciado em documentos oficiais.

A *imagem de conceito*, segundo Tall e Vinner (1981) diz respeito a: "[...] todos os atributos mentais associados a um conceito, sejam conscientes ou inconscientes [...]"[33] (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

Analisamos documentos curriculares oficiais com o objetivo de encontrar desde que momento os conjuntos numéricos aparecem para os alunos. Escolhemos os que, no nosso entender, causaram impacto, como os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCNs, 1998) e os mais recentes, como a *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC, 2017), o *Currículo do Estado de São Paulo* (CESP, 2011) e o *Currículo Paulista* (CP, 2019). Achamos conveniente analisar tais documentos pois todos tiveram influência no currículo dos alunos participantes da pesquisa, visto que os PCNs serviram de base para a elaboração dos currículos escolares, incluindo os que estamos analisando CESP, BNCC e CP.

Em cada um dos tópicos apresentados pelos *Parâmetros Curriculares Nacionais,* é possível ressaltar diversos aspectos. Por meio dos objetivos, conceitos e procedimentos de cada um dos ciclos, podemos observar que surgem, com grande ênfase, a aprendizagem e a compreensão das propriedades, características e aplicações dos conjuntos numéricos e é possível notar que a construção dos números reais, apesar de não ser explicitada por estes termos, está intrínseca em todos os quatro anos do Ensino Fundamental II e, por isso, deve ser explorada assim que possível, com a devida cautela sobre essa "construção". Vemos que o que se prevê para trabalho em sala de aula, são tópicos que precisam deixar evidente a interligação entre os conjuntos numéricos, e não apenas isoladamente.

[33][...] all mental attributes associated with a concept, whether they be conscious or unconscious [...] (TALL; VINNER, 1981, p. 152).

Analisamos a *Base Nacional Comum Curricular* (BRASIL, 2018), que desde 2019 atua como documento normativo para as redes de ensino públicas e privadas e auxilia na elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas e vimos que prevê a introdução aos números racionais, fundamentais para a construção dos números reais, desde o 4º Ano do Ensino Fundamental.

Por meio dos objetos de conhecimento da BNCC, vemos algumas das ideias que surgem em se tratando dos números racionais. Isso também ocorre na BNCC quando observamos os objetos de conhecimento para os números naturais e inteiros, e que pode ser conferido por intermédio do próprio documento.

É razoável inferir que as caracterizações esperadas do conjunto dos números reais, na 3ª série do Ensino Médio, fazem-se presentes ao longo do ensino Fundamental II. Observamos que em cada um dos documentos oficiais mais atuais - Currículo Paulista e BNCC - poucas coisas são diferidas, eles se assemelham em muitos aspectos e acreditamos que a abordagem proposta não é eficaz, pois alunos de diversos níveis de ensino têm permanecido com conceitos insuficientes para uma compreensão rica dos números reais e temos como objetivo deixar claro isto em nossa pesquisa. Para que possíveis lacunas sejam preenchidas, vemos que se faz necessário abordar os assuntos designados para os anos iniciais de maneiras não convencionais, desfazer possíveis nós que podem ser formados no Ensino Fundamental e carregados até o final do Ensino Médio, ou mesmo no Ensino Superior. As ideias a serem desenvolvidas têm o objetivo de influenciar o cotidiano dos discentes, pois ao elucidar o que ocorre com os números, quaisquer conjuntos a que pertençam (N, Z, Q, $\mathbb{I}$ e/ou R), os alunos poderão estudar e compreender aspectos relevantes ao seu dia a dia, tais como medidas, presentes em todos os contextos e nas mais diversas profissões, como arquitetura, engenharia, biologia, matemática, física e muitas outras.

Destacamos o fato de explorarmos em nossa pesquisa a ideia da representação decimal dos números, para cada um dos conjuntos numéricos com a perspectiva cabível para sala de aula. Para utilizar esta representação, no decorrer de nossa investigação, averiguamos como isto tem aparecido no atual documento oficial curricular na área da Educação, utilizado em nosso país, a BNCC. Apesar de nos encontrarmos no Estado de São Paulo, destacamos a BNCC uma vez que é o documento oficial utilizado em nosso país, e porque a abordagem proposta no *Currículo Paulista* é a mesma.

Tendo em vista o impacto que os números reais têm tido no Ensino Médio, decidimos realizar um estudo diagnóstico com turmas de primeira a terceira série para que pudéssemos comprovar nossa hipótese de que tais alunos possuem dificuldades mesmo nesta etapa final da Educação Básica. Comprovada esta hipótese, por meio da análise de dados, proporemos nosso plano de intervenção no Ensino Fundamental, acompanhado de um conjunto de atividades que iremos elaborar para tal.

Nosso objetivo de ensino, então, é fazer com que alunos desenvolvam ideias bem elaboradas e justificadas matematicamente, sem automatização do processo de aprendizagem, que geralmente as escolas têm desenvolvido.

Como objetivo de pesquisa, pretendemos deixar clara a importância e eficácia do trabalho docente com os números reais o quanto antes no Ensino Fundamental, a fim de que se possa dar a devida profundidade, para cada ano, de acordo com as competências e habilidades previstas, a novos conhecimentos e que isso possa ter reflexos positivos ao fim do Ensino Médio e, consequentemente no Ensino Superior.

Apresentamos como questões de pesquisa: “É realmente necessária a abordagem antecipada dos números reais na Educação Básica?” “Se sim, como fazê-la?”.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Visando fundamentar a pesquisa com uma perspectiva teórica, a fim de que obtenhamos um olhar mais formal para o projeto, trazemos neste momento as ideias que utilizamos para isso.

Investigando compreensões sobre os conjuntos numéricos e como estes tem encaminhado os alunos para interpretar e compreender os números reais, utilizamos como auxílio os construtos de *imagem de conceito* e *definição de conceito* de Tall e Vinner (1981), e também dos mesmos autores, *fatores de conflito potencial* e *conflito cognitivo*.

Explicitamos como esses construtos se desenvolvem e como se aplicam em nossos estudos.

3.1 Imagem de conceito e definição de conceito

Observemos um trecho de como podemos expressar o significado de *imagem de conceito*, descrito por Tall e Vinner (1981)

> Devemos usar *imagem de conceito* para descrever a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais e propriedades e processos associados. É construída ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando conforme o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL; VINNER, 1981, tradução nossa).[34]

Conforme a citação, nota-se que a *imagem de conceito* de uma pessoa sobre um determinado conteúdo, é única, uma vez que varia de pessoa para pessoa, sofre mudanças com o passar do tempo, e é um conjunto de ideias que concebe a representação cognitiva de um determinado aspecto. Tais ideias formalizadas na mente de um indivíduo podem estar corretas ou não, mas ainda assim são suas concepções, e que podem ser modificadas e/ou enriquecidas. Temos esta ideia formalizada quando nos referirmos no decorrer do texto à *imagem de conceito*.

Vejamos agora do que se trata a *definição de conceito* também proposta por Tall e Vinner (1981):

> Devemos considerar a *definição de conceito* como uma forma de palavras usadas para especificar esse conceito. Pode ser aprendido por um indivíduo de maneira mecânica ou aprendido de forma mais significativa e relacionado em maior ou menor grau ao conceito como um todo. Também pode se uma reconstrução pessoal pelo estudante de uma definição. É então a forma de palavras que o aluno usa para sua própria explicação de sua imagem de conceito (evocada). (TALL; VINNER, 1981, tradução nossa).[35]

Conforme a definição, é possível notar que, quando tratamos de *definição de conceito*, estamos nos referindo à maneira como uma pessoa define o conceito. Assim como a *imagem*

---

[34] We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures. (TALL; VINNER, 1981).

[35] The definition of a concept (if it has one) is quite a different matter. We shall regard the concept definition to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for his own explanation of his (evoked) concept image. (TALL; VINNER, 1981).

de conceito, a *definição de conceito* pode ser correta ou não, é individual e pode sofrer modificações.

Formalizadas essas duas definições, temos como pergunta a ser respondida com o questionário diagnóstico proposto: Quais seriam a *imagem de conceito* e a *definição de conceito* de número real para um aluno de Ensino Médio? O mesmo questionamento é válido para números naturais, inteiros, racionais e irracionais, e buscamos responder estas indagações ao longo dos procedimentos metodológicos que escolhemos, bem como a análise de dados à posteriori.

3.2 Fatores de conflito potencial e fatores de conflito cognitivo

Apreciemos agora o que são *fator de conflito potencial e fator de conflito cognitivo* também descritos por Tall e Vinner (1981) em "*Educational Studies in Mathematics*":

> Chamamos uma parte da imagem de conceito ou definição de conceito como um conflito com outra parte da imagem de conceito ou definição de conceito, um fator de conflito potencial. Tais fatores não precisam nunca ser evocados em circunstâncias que causam um conflito cognitivo real, mas se forem evocados os fatores em questão serão chamados de fatores de conflito cognitivo. (TALL; VINNER, 1981, tradução nossa).[36]

Como observado, *fatores de conflito potencial* surgem quando há um desarranjo entre elementos de uma mesma *imagem de conceito*. Notamos que os autores chamam de *fator de conflito cognitivo* a situação em que dois ou mais fatores de conflitos potenciais são evocados ao mesmo tempo.

Dessa forma, em nossos estudo e análise, usamos *fator de conflito potencial* e *fator de conflito cognitivo*, para nos referir a essas ideias explicitadas por Tall e Vinner (1981).

4 METODOLOGIA

Neste momento, temos por objetivo descrever e explicar como desenvolvemos nossa pesquisa até agora, desde nossas escolhas para perguntas em um questionário diagnóstico com

[36] We shall call a part of the concept image or concept definition which may conflict with another part of the concept image or concept definition, a potential conflict factor. Such factors need never be evoked in circumstances which cause actual cognitive conflict but if they are so evoked the factors concerned will then be called cognitive (TALL; VINNER, 1981).

alunos do Ensino Médio, como o aplicamos e analisamos e como organizamos uma entrevista "semi aberta" com o professor desses alunos para que este nos desse sua avaliação pedagógica sobre o assunto e as questões propostas.

Temos, então, duas situações principais que embasam nossos estudos preliminares, o Questionário Diagnóstico Inicial e a entrevista com o professor. A primeira foi realizada com alunos de primeira a terceira série do Ensino Médio, a qual permitirá, por intermédio da análise das respostas adquiridas, propormos um plano de intervenção à construção dos números reais no Ensino Fundamental II.

A segunda, organizada por nós com o professor de Matemática dos participantes, permitirá que possamos comparar as perspectivas dele sobre as respostas que seus alunos dariam ao questionário, questão a questão, bem como, principalmente, quais têm sido suas percepções referentes à maneira como são abordados os números reais desde o Ensino Fundamental, até principalmente o Ensino Médio.

O Questionário Diagnóstico Inicial foi aplicado em alunos de um colégio privado de Ensino Infantil a Ensino Médio da cidade de Jundiaí-SP. Antes de qualquer aplicação foi feito um pedido à coordenação e à direção do colégio com explicações de intenção e objetivos em relação à aplicação do questionário para pesquisa. Tendo concordado com a proposta, o colégio assinou o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para a Instituição e os responsáveis pelos alunos foram comunicados oficialmente pelo colégio, para que tivessem contato com a proposta de pesquisa e concordassem ou não com a participação dos alunos pelos quais são responsáveis. Tanto os responsáveis como os alunos que concordaram assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

O professor também assinou um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, concordando em ceder duas de suas aulas para cada uma das três turmas (de 1ª a 3ª série do Ensino Médio) para a aplicação do Questionário Diagnóstico Inicial, bem como em participar da entrevista proposta por nós em horário extra classe.

4.1 Questionário Diagnóstico Inicial

Realizamos tal questionário para comprovar, ou não, uma de nossas hipóteses principais, ou seja, que os alunos apresentam dificuldades no que tange aos números reais e aspectos relacionados, como a densidade dos racionais e dos irracionais e a ideia de sucessor,

por exemplo, ao longo do Ensino Médio, tanto em decorrência de uma má elaboração de conceitos neste nível de ensino, como também em relação à maneira como os alunos têm visto esses pontos no Ensino Fundamental II, que é nosso foco de intervenção.

Para que conseguíssemos diagnosticar tais dificuldades, propusemos o questionário com foco em analisar como se comporta a *imagem de conceito evocada e a definição de conceito* dos alunos participantes em relação aos números reais, desde os naturais, os inteiros, os racionais e os irracionais, buscando inclusive prováveis f*atores de conflito potencial* e *fatores de conflito cognitivo* relacionados a este assunto (TALL e VINNER, 1981).

Escolhemos alunos do Ensino Médio para o diagnóstico, justamente para que conseguíssemos analisar como têm lidado com os números reais, desde ingressantes nesta etapa (1ª série) até concluintes da Educação Básica (3ª série) e que já possuem, ou pelo menos deveriam possuir, uma *imagem de conceito* estruturada em relação aos números reais.

O Questionário Diagnóstico Inicial foi aplicado a 24 alunos de Ensino Médio, porém utilizamos as respostas apenas de 14 desses que são os que entregaram os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido apesar de os demais terem concordado em participar informalmente, como se pode observar com a primeira pergunta do Questionário. Todos os participantes tomaram ciência do que se tratava e qual a finalidade do estudo com o próprio professor de Matemática (por causa da pandemia) que pôde explicar a proposta a eles, bem como que em breve poderiam ter contato com os resultados obtidos. Nenhum dos alunos será identificado pelo nome e serão chamados por apelidos, sendo de A1 a A7 os da primeira série, e de C1 a C7, os da terceira série. Contabilizamos os dados dos alunos de segunda série em nosso arquivo pessoal, porém, como explicado anteriormente, não os utilizaremos em nosso estudo.

Em vista do contexto de pandemia, realizamos o Questionário via plataforma "*Google Forms*", sem que os alunos tivessem tido qualquer contato com o mesmo anteriormente. Ele foi realizado em duas aulas de 50 minutos em cada turma. Inicialmente perguntamos o nome do aluno para nossa organização pessoal de quem havia entregue os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido ou não, mas esta questão não entrou na numeração de perguntas. Abaixo segue como o questionário se apresentava.

Tabela 1: Questionário Diagnóstico Inicial

NOME (você não será identificado na pesquisa pelo seu nome, esta informação só será utilizada para confirmação do recebimento do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido):

1) **Você concorda que suas respostas a esta pesquisa sejam utilizadas para fins acadêmicos? (Suas respostas não terão identidade revelada e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa).**
   - ☐ **Sim**
   - ☐ **Não**
2) **Qual sua idade?**
3) **De qual série do Ensino Médio você é?**
   - ☐ **1ª série**
   - ☐ **2ª série**
   - ☐ **3ª série**
4) **Se você é da 2ª ou 3ª série, em qual escola você fez o(s) ano(s) anterior(es) do Ensino Médio? (Se você for da 1ª série, apenas diga "sou da 1ª série").**
5) **Em que escola você fez o Ensino Fundamental II?**
6) **Escreva com suas palavras o que é um número natural para você e dê dois exemplos de números naturais.**

7) Escreva com suas palavras o que é um número inteiro para você e dê dois exemplos de números inteiros.

8) Escreva com suas palavras o que é um número racional para você e dê dois exemplos de números racionais.

9) Escreva com suas palavras o que é um número irracional para você e dê dois exemplos de números irracionais.

10) Escreva com suas palavras o que é um número real para você e dê dois exemplos de números reais.

11) A cada um dos itens de a) a j) a seguir identifique a quais conjuntos numéricos você julga que cada número pertence:

a) 1,73

☐ Natural ☐ Inteiro ☐ Racional ☐ Irracional ☐ Real

Justifique sua resposta do item a).

b) pi

☐ Natural ☐ Inteiro ☐ Racional ☐ Irracional ☐ Real

Justifique sua resposta do item b).

c) 1/3

☐ Natural ☐ Inteiro ☐ Racional ☐ Irracional ☐ Real

Justifique sua resposta do item c).

d) 1,99999999...

☐ Natural ☐ Inteiro ☐ Racional ☐ Irracional ☐ Real

Justifique sua resposta do item d).

e) 2,030040050...

☐ Natural ☐ Inteiro ☐ Racional ☐ Irracional ☐ Real

Justifique sua resposta do item e).

f) √225

☐ Natural ☐ Inteiro ☐ Racional ☐ Irracional ☐ Real

Justifique sua resposta do item f).

g) √3

☐ Natural ☐ Inteiro ☐ Racional ☐ Irracional ☐ Real

Justifique sua resposta do item g).

h) 0,141141...

☐ Natural ☐ Inteiro ☐ Racional ☐ Irracional ☐ Real

Justifique sua resposta do item h).

i) 1,2500000

☐ Natural ☐ Inteiro ☐ Racional ☐ Irracional ☐ Real

Justifique sua resposta do item i).

j) 0,4999999999...

☐ Natural ☐ Inteiro ☐ Racional ☐ Irracional ☐ Real

Justifique sua resposta do item j).

12) Entre quais números inteiros se encontra o número 0,167298...? EXPLIQUE O PORQUÊ de sua escolha.

13) Na sala de aula o professor perguntou aos alunos: "Qual é o menor número que se localiza entre 2 e 3?" Um aluno disse "2,1" e outro disse "2,01". Qual deles está certo? Ou nenhum deles acertou a resposta? JUSTIFIQUE o porquê de sua resposta.

14) Existe alguma diferença entre os números 1,2 e 1,2000? Se sim, qual?

15) Considere o número 5/7. Vamos chamar esse número de B. Ao fazer essa divisão, o visor da calculadora mostra 0,714285. B é um número racional ou irracional? Justifique o porquê você chegou a esta conclusão.

k) Um professor perguntou para seus alunos qual era o sucessor do número 3,1415. Duas respostas foram mais populares, alguns disseram 3,1416 e outros 4,1415. Você achaque há alguma resposta correta? Justifique seu raciocínio.

Fonte: Dados da pesquisa

As perguntas de 1 a 5 foram colocadas a fim de que conhecer o perfil dos alunos, como idade, de qual série do Ensino Médio ele é, caso fosse da 2ª ou 3ª série, onde havia feito o(s) ano(s) anterior(es) do Ensino Médio, ou seja, na mesma escola ou em outra e, por fim, onde havia feito o Ensino Fundamental II. Nas perguntas 6 a 10, pedimos as *definições de conceito* de número Natural, Inteiro, Racional, Irracional e Real, respectivamente, e dois exemplos de cada. Na pergunta 11, abordamos 10 exemplos de números diferentes, perguntando em itens como o aluno o classificava (Natural, Inteiro, Racional, Irracional e Real) bem como as justificativas para tais escolhas. Nas perguntas 12 a 16 abordamos questões relacionadas à densidade do conjunto dos números reais, características específicas de determinados números e problemas relacionados à racionalidade ou irracionalidade de um número, bem como a ideia de sucessor, todas com pedido de justificativa.

4.2 Entrevista com o Prof. de Matemática dos participantes

Como justificamos anteriormente, realizamos uma entrevista com o professor de Matemática para que pudéssemos comparar suas perspectivas pedagógicas em relação às respostas dos participantes, bem como ter uma ideia de sua trajetória como docente e um levantamento de suas concepções em relação ao ensino dos números reais. A entrevista ocorreu mediada pela plataforma "*Google Meet*" tendo em vista o contexto de pandemia. Preparamos antecipadamente um roteiro de perguntas a fim de que o diálogo fosse aberto e minimamente guiado, acompanhado por uma áudio gravação e por um observador neutro, o que nos proporcionou observações imediatas, por escrito, do que ocorreu durante a entrevista, que teve duração de cerca de uma hora e quarenta minutos e ocorreu algumas horas depois da aplicação do questionário para as turmas, sem que o professor tivesse qualquer contato com as respostas dos alunos, apenas com as perguntas do questionário.

4.3 Projeto 7ºAno do Ensino Fundamental

Após comprovarmos nossas hipóteses com base na análise de dados, ou seja, de que existem diversos problemas relacionados aos números reais, decorrentes de como tem sido a

abordagem dos mesmos tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, temos por objetivo propor um plano de intervenção no Ensino Fundamental II. No momento, temos ideia de desenvolvê-lo ainda no 7ºAno, embasado em um conjunto de atividades ainda a ser elaborado, visto que iremos, como professora pesquisadora, ministrar aulas de Matemática em duas destas turmas no mesmo colégio no qual foi realizado o Questionário Diagnóstico Inicial.

Cremos que esta intervenção deva acontecer o mais cedo possível no Ensino Fundamental II, uma vez que, como pontuamos anteriormente, pesquisadores como Fischbein (1995) destacam e argumentam que a maneira rasa com que assuntos relacionados aos números reais são tratados pelos alunos do Ensino Médio advém do estudo mal desenvolvido de outros conteúdos que, segundo nossa concepção, podem ser abordados o quanto antes no Ensino Fundamental e como argumentamos anteriormente.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresentamos a análise dos dados obtidos com o questionário de dois alunos, um de primeira série do Ensino Médio (A1) e outro de terceira (C3). Para facilidade de entendimento do texto, organizamos essa análise em três etapas. A primeira está associada com as questões 6 a 10, com as quais observamos as *definições de conceito* dos participantes para o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, respectivamente. Além das definições, como pedimos dois exemplos, destacamos se estes foram dados e se mostram coerência com a definição dada pelo participante.

A segunda etapa é a análise dos dez itens da questão 11, para verificar se: 1. as classificações feitas pelos participantes, aos exemplos numéricos estão coerentes com as *definições de conceito* dadas nas questões 6 a 10; 2. são dadas as justificativas solicitadas; e 3. se essas justificativas são coerentes com as *definições de conceito*.

A terceira etapa é dedicada à análise individual das questões 12, 13, 14, 15 e 16, para destacar concepções evocadas da *imagem de conceito* – inclusive se são condizentes ou não com as *definições de conceito* – e se podemos dizer que o participante tem uma imagem de conceito rica em concepções pertinentes e livre de fatores de conflito, tanto potencial como cognitivo.

Participante A1

Tabela 2 – Respostas do participante A1 ao questionário

	A1	
Q6	Não sei descrever o que seria o número natural, mas consigo dar exemplos, 2 e 3	
Q7	É um número que não possui vírgulas, sendo ele inteiro, como por exemplo 3,0 e 10,00.	
Q8	Não sei ao certo.	
Q9	Não sei ao certo.	
Q10	São aqueles que pertencem ao grupo dos reais, como o -1 e 4.	
Q11a	Natural e Real	J: Pois pertence ao grupo dos reais.
Q11b	Irracional e Real	J: Não sei ao certo.
Q11c	Racional	J: Não sei ao certo.
Q11d	Real	J: Não sei ao certo.
Q11e	Irracional e Real	J: Não sei ao certo.
Q11f	Racional	J: Não sei ao certo.
Q11g	Racional e Real	J: Não sei ao certo.
Q11h	Racional	J: Não sei ao certo.
Q11i	Irracional	J: Não sei ao certo.
Q11j	Irracional	J: Não sei ao certo.
Q12	Entre os números 0 e 1.	
Q13	2,01.	
Q14	Sim, o 1,2 é maior do que o 1,2000...	
Q15	Não sei ao certo.	
Q16	Acho que o número 3,1416 pois, o 4,1415 seria 1,0 a mais.	

Fonte: Dados da pesquisa

A única *definição de conceito* dada por A1 é a de número real (Q10), mas não é útil para identificar um número real pois A1 escreve "*São aqueles que pertencem ao grupo dos reais*". Isso indica *fatores de conflito potencial e cognitivo.*

Com relação aos exemplos numéricos, A1 não apresenta nenhum para o conjunto dos números racionais nem para os irracionais e escreve "*Não sei ao certo.*". Para os outros conjuntos, A1 dá seis exemplos apenas de números inteiros, sendo eles 5 números positivos, e um negativo (-1), na questão dos números reais, negativo.

Destacamos que, na questão 7, A1 define os números inteiros como aqueles que não possuem vírgula, mas dá dois exemplos com vírgula (3,0 e 10,00), o que indica a existência de um *fator de conflito potencial*.

Com relação à classificação dos números, em cada um dos itens da questão 11, não conseguimos estabelecer um paralelo com as *definições de conceito* de A1 pois, como dissemos, ele apenas define o conjunto dos números reais e sua justificativa – exceto para o item a – é "*não sei ao certo*". E apesar disso, achamos importante destacar que A1, em seis dos dez itens da questão 11, usa apenas uma classificação, sem incluir os reais para todos. Será esquecimento? Ou uma prática matemática embutida de dar uma única resposta?

De qualquer forma, é importante, para nosso diagnóstico, verificar e destacar erros e acertos de A1 nas classificações que fez. Na pergunta 11a, A1 classifica 1,73 como natural e real e justifica com o texto similar ao da definição, citando apenas *"...pertence ao grupo dos reais*".

Para os demais itens, sem justificativa, destacamos como "erradas": A1 classifica √225 (que é 15) como "*Racional*" (item f) e √3 (item g) como "*Racional e Real*" e surge a dúvida "Será por causa do sinal de raiz???"; 1,2500000 (item i) e 0,49999999999... (item j) como "*Irracional*", enquanto 1,99999... apenas como "*Real*".

Nas questões 12, 13, 14, 15 e 16, A1 só justifica a questão 16, e isso nos impossibilita de saber o porquê das respostas dadas. Assim, nos limitamos a verificar se a resposta está certa ou errada e, no caso das erradas, interpretar quais concepções são evocadas da sua *imagem de conceito*.

Na questão 13, A1 afirma que o menor número entre 2 e 3 é 2,01, evocando de sua imagem de conceito que existe um número menor entre os inteiros 2 e 3.

Na questão 14, A1 evoca que "*1,2 é maior que 1,2000...*", e isso indica que, em sua *imagem de conceito*, acrescentar zeros nas casas decimais do número, juntamente com as reticências, "modifica" o número e, no caso, o torna menor que o outro que não os possui.

Na questão 15, A1 não consegue evocar concepções de sua *imagem de conceito* para responder que 5/7 é racional, independentemente do resultado 0,714285 da divisão mostrada na calculadora (ver questão) e escreve "*Não sei ao certo*". Uma explicação para isso é a falta de *definição de conceito* para os racionais e, talvez, a falta do uso de uma calculadora em sala de aula.

Na questão 16, A1 evoca, como sucessor de 3,1415, o número 3,1416 e afirma que "*Acho que o número 3,1416 pois, o 4,1415 seria 1,0 a mais.*" deixando claro que, em sua *imagem de conceito*, o sucessor de um número é obtido ao somar 1 na última casa decimal e não na parte inteira, conforme sua justificativa.

Tabela 3 – Respostas do participante C3 ao questionário

	C3	
Q6	Números naturais são queles que são inteiros e positivos. Ex: 1 e 100	
Q7	São naturais junto com os negativos. Ex: 1 e -1	
Q8	Racional são as frações, decimais e os inteiros. Ex:1/2, 0,24 e 32	
Q9	Irracionais não podem ser fração se não for nos numeros inteiros. Ex:√5 e √3	
Q10	Numeros reais inclui tds os números. Ex: 1 e 0,724589...	
Q11a	Racional e Real	J: Porque nos racionais que se usa decimais
Q11b	Racional e Real	J: Porque achei o mais correto
Q11c	Racional e Real	J: Porque é uma fração
Q11d	Irracional e Real	J: Porque achei o mais correto
Q11e	Irracional	J: Porque achei correto
Q11f	Natural, Inteiro e Racional	J: Porque o resultado é 15 que é um número inteiro
Q11g	Irracional	J: Porque o resultado é decimal e não fração
Q11h	Racional	J: Porque achei o mais correto
Q11i	Racional e Real	J: Porque achei o mais correto
Q11j	Irracional	J: Porque achei o mais correto
Q12	Depois do zero e antes do um, pois ele esta mais próximo de zero mas ainda sim perto do um	
Q13	Nenhum deles, já que entre 2 e 3 existe uma infinidade de números	
Q14	Sim, pois em 1,2 pode haver mais numeros atras ou ser redondo, mas em 1,2000 sabemos oq esta atras	
Q15	Irracional	
Q16	Acho que 3,1416 esta correta, pois os decimais tambem contam	

Fonte: Dados da pesquisa

Nas perguntas 6 a 10, C3 dá uma *definição de conceito* para cada um dos conjuntos numéricos.

Vemos que existe uma circularidade nas definições para o conjunto dos números naturais e dos números inteiros, uma vez que ele utiliza um para tratar o outro, o que indica um *fator de conflito potencial* e possível *fator de conflito cognitivo*. Outro aspecto que observamos é o fato de C3 dar uma definição na questão 9 (dos números irracionais) de difícil interpretação por não conseguirmos estabelecer uma ligação. Uma hipótese que temos pelos exemplos que o participante deu (√3 e √5) é que o participante pode considerar que os números irracionais são apenas as radiciações não exatas.

Observando os exemplos dados por C3 nas questões 6 a 10, todos possuem coerência com as definições dadas.

Nos itens da questão 11, vemos inicialmente que em alguns deles C3 não inclui o conjunto dos números reais. Poderia ser esquecimento? Percebemos ainda nas justificativas dos itens desta questão que C3 possui dúvida em suas respostas às questões 6 a 10, pois como ele precisa estabelecer uma ligação entre as definições e os itens da questão 11, encontrou-se em um impasse, respondendo "*Porque achei o mais correto*". Acreditamos nisso, pois essa justificativa aparece em situações como no item b ao classificar pi como racional e real, "1,999999999..." e "0,4999999999..." como irracionais, pois se ele se baseasse em suas *definições de conceito* para dar essas classificações, elas não seriam coerentes. Temos assim um *fator de conflito cognitivo*.

Na questão 12, C3 evoca que "0,167298..." está entre 0 e 1 por estar perto de ambos. Percebemos na *imagem de conceito* de C3 a ideia de que o número dado, próximo de 0,2 por exemplo, está próximo de 1, segundo ele.

Na questão 13, C3 evoca que nenhuma das respostas está correta e justifica algo não perguntado, pois C3 afirma que há uma infinidade de números entre 2 e 3 e por isso não há resposta, porém isto, por si só, não justifica, pois mesmo que haja uma infinidade de números neste intervalo poderíamos ter um menor.

Na questão 14, C3 evoca que há diferença entre 1,2 e 1,2000, e trata as casas decimais à direita como aquelas "*atras*", o que parece evocar que existe diferença pois em 1,2 não conhecemos suas casas decimais, mas em 1,2000 sim.

Na questão 15, C3 evoca que 5/7 é irracional e não apresenta justificativa. É possível identificar um *fatores de conflito potencial e cognitivo*, pois na *definição de conceito* de C3 de números irracionais ele afirma que "*não podem ser fração*", mas classifica 5/7 como irracional.

Na questão 16, C3 evoca que o sucessor de 3,1415 é 3,1416, o que parece indicar que para ele devemos somar 1 na última casa decimal do número.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nosso projeto até o presente, pudemos analisar *imagens de conceito, definições de conceito*, *fatores de conflito potencial* e *fatores de conflito cognitivo* (TALL; VINNER, 1981) de alunos de Ensino Médio, por meio de um estudo de caráter investigativo com um

questionário diagnóstico com 16 questões. Devido ao contexto de pandemia, realizamos todos os procedimentos até agora de maneira remota.

As ideais de Tall e Vinner (1981) foram de suma importância para nossas análises, conclusões e novas questões. Conseguimos confirmar nossa hipótese de que existem deficiências presentes em alunos de Ensino Médio da escola envolvida, relativas aos números reais.

Nossa preocupação também é preocupação de outros pesquisadores e não é de fácil tratamento em sala de aula na Educação Básica, uma vez que é um assunto que carrega consigo um grau de complexidade que exige um detalhamento a ser estudado, e para qual não encontramos suporte em documentos curriculares oficiais.

Por meio das análises feitas, notamos a importância de propor novas abordagens para o ensino dos números reais na Educação Básica a partir do 6º ano e, por isso, ainda deixamos em aberto o conjunto de atividades que queremos elaborar e, possivelmente aplicar, no 7º ano do Ensino Fundamental. Acreditamos que uma abordagem que traga visualizações práticas aos alunos e maneiras de relacionar e compreender como cada um dos conjuntos numéricos se completam, trará uma boa perspectiva de aprendizagem para dirimir os problemas que identificamos. Esse passa a ser então o foco de continuação da nossa pesquisa.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 3 nov. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. Les obstacles epistèmologiques et les problemes en mathèmatiques. **RDM**, Grenoble, vol. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

FISCHBEIN, Efraim; JEHIAM, Ruth; COHEN, Dorit. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. **Educational Studies in Mathematics**, n. 29, p. 29-44, 1995.

IGLIORI, S. A noção de “obstáculo epistemológico” e a educação matemática. *In*: PEREIRA, M. **Educação Matemática – uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p. 89-113.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias. São Paulo: Secretaria da Educação, 2011. 72 p. Disponível em: https://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo Paulista**. São Paulo, 2019. Disponível em: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2019/09/curriculo-paulista-26-07.pdf.

TALL, D; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151-169, 1981.

RACIOCÍNIO CORRELACIONAL
Uma proposta de desenvolvimento a partir do ensino-aprendizagem de modelos de regressão linear no Ensino Médio

CORRELATIONAL REASONING
A development proposal based on a teaching-learning sequence using linear regression models in High School

Thiago Dutra de Araújo [1], Viviana Giampaoli [2]

[1] Universidade de São Paulo (IME-USP); tdutra@ime.usp.br
[2] Universidade de São Paulo (IME-USP); vivig@ime.usp.br

Resumo: Identificar corretamente associações entre variáveis é imprescindível para que um indivíduo possa realizar uma interpretação correta e crítica de vários fenômenos presentes na natureza e na sociedade da qual ele faz parte. Para que isso ocorra, é necessário o desenvolvimento do raciocínio correlacional e das habilidades vinculadas a ele. Nesse trabalho, apresenta-se uma proposta de desenvolvimento do raciocínio correlacional para estudantes do Ensino Médio a partir de uma sequência de ensino-aprendizagem de modelos de regressão linear – tema de estudo demandado não somente pela BNCC no currículo brasileiro, mas também por currículos internacionais. Após a aplicação da sequência, serão descritos os resultados e as conclusões obtidas.

Palavras-chave: Raciocínio correlacional. Correlação. Regressão linear. Sequência de ensino-aprendizagem.

Abstract: Correctly identifying associations among variables is essential so that a human being can perform a correct and critical interpretation of various phenomena present in nature and in the society of which he is a part. For this to occur, it is necessary to develop correlational reasoning and skills related to it. In this work, we presented a proposal for the development of correlational reasoning for high school students from a teaching-learning sequence of linear regression models – a study topic demanded not only by the Brazilian curriculum, but also by international curricula. After applying the sequence, the results and conclusions obtained will be described.

Keywords: Correlational reasoning. Correlation. Linear regression. Teaching-learning sequence.

1 INTRODUÇÃO

Segundo Nunes e Bryant (2011), é relevante que os estudantes concluam a Educação Básica com um bom entendimento de ideias matemáticas sobre como lidar com a incerteza. Durante a vida, como cidadãos, eles tomarão importantes decisões com bases probabilísticas e avaliando os riscos de uma ampla gama de situações.

A incerteza pode aparecer em diversos contextos na Educação Básica como, por exemplo, quando ela é apresentada no cálculo de probabilidades; no entanto, é interessante notar que ela também está presente na busca por associações entre variáveis, sejam estas aleatórias ou não.

Ao longo de sua trajetória do Ensino Médio, os estudantes se deparam com exemplos de associações conhecidas como *dependências determinísticas*: relações em que, dado o valor de uma das variáveis, é possível determinar exatamente qual é o valor da outra. Entretanto, no Ensino Médio pouco se discute associações entre variáveis aleatórias: as *associações estatísticas*. Essas são as associações em que, dado o valor de uma das variáveis, não é possível determinar exatamente o valor da outra; no entanto, com base em um conjunto de dados referentes a essas variáveis – uma amostra –, é possível obter o valor esperado para uma das variáveis, a partir de um valor da outra. Este tipo de associação busca cumprir um papel preditivo, no sentido de ser possível estimar o quão provável é que alguma conclusão seja (ou não) verossímil.

Quando há alguma associação estatística entre duas variáveis, é comum dizer que há uma **correlação** entre elas. Segundo Triola (2013, p. 416), "existe uma correlação entre duas variáveis quando os valores de uma variável estão relacionados, de alguma forma, com os valores da outra variável." Batanero e Borovcnik (2016) caracterizaram a correlação como medida de dependência probabilística e concluíram que ela é uma componente relevante do pensamento probabilístico; de acordo com Borovcnik (2017), no mundo real, as conexões entre variáveis são menos claras e estreitas e, por isso, a correlação foi desenvolvida para se medir dependências não causais

Desde a segunda metade do século XX, diversos estudos começaram a analisar como os indivíduos pensam a respeito das correlações – o chamado **raciocínio correlacional**.
Adi *et al*. (1978) definem raciocínio correlacional como os processos de raciocínio que se usam para determinar a força da relação mútua ou recíproca entre as variáveis. De acordo com

Nunes e Bryant, identificar e quantificar a presença, a natureza e a força de correlação entre variáveis são habilidades vinculadas a este tipo de raciocínio, essencial para o letramento e o raciocínio científico.

Existem diversos artigos que analisaram o raciocínio correlacional dos estudantes para variáveis qualitativas; no entanto, o mesmo não ocorre para variáveis quantitativas. Assim, o foco desse trabalho será analisar o raciocínio correlacional para esse tipo de variável.

1.1 Correlação e regressão linear na Base Nacional Comum Curricular

Nos documentos brasileiros, o estudo da correlação entre variáveis se faz presente desde os Parâmetros Curriculares Nacionais+ (PCN+) de 2002 (BRASIL, 2002). No entanto, nesse documento, o estudo da correlação não estava relacionado à Matemática, mas sim a outras disciplinas, como Biologia e Química.

Com a promulgação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 2018 (BRASIL, 2018), o estudo da correlação e da obtenção da reta de regressão linear passou a se fazer presente como uma das habilidades da área de Matemática, descrita como

> (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. (BRASIL, 2018, p.541).

Assim, a BNCC evidencia a relevância em desenvolver o raciocínio correlacional dos estudantes a partir dos conceitos de correlação e regressão linear.

1.2 O problema de pesquisa

Com base nas justificativas anteriores, busca-se, como objetivo geral desse artigo, investigar em que medida o raciocínio correlacional dos estudantes do Ensino Médio pode ser desenvolvido a partir de uma sequência de atividades que introduz o tema *regressão linear*.

Além do objetivo geral, destacam-se os seguintes objetivos específicos: i) elaborar e usar uma proposta de introdução ao conceito de regressão linear para estudantes de Ensino Médio; ii) analisar como se desenvolve o raciocínio correlacional desses estudantes à medida em que são resolvidos problemas correlacionais, bem como fatores de desenvolvimento desse tipo de raciocínio (como, por exemplo, uso de tecnologia, conhecimentos prévios, entre

outros) e iii) avaliar os níveis dos estudantes sobre as diversas dimensões do raciocínio correlacional, antes e depois da resolução de problemas correlacionais.

Com isso, elaborou-se a seguinte questão de pesquisa:

Em que medida a aprendizagem de modelos de regressão linear por alunos do Ensino Médio possibilita o desenvolvimento do raciocínio correlacional desses estudantes?

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Os primeiros estudos sobre associação estatística datam do século XIX, com Adolphe Quételet (1796-1874), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Auguste Bravais (1811-1863), Sir Francis Galton (1822-1911) e Karl Pearson (1857-1936). Enquanto Quételet realizou as primeiras observações sobre como o peso de um indivíduo associava-se ao quadrado de sua altura, Legendre foi o primeiro a escrever como obter os parâmetros de uma reta de regressão – embora não tenha utilizado esse nome à época – usando o método dos mínimos quadrados. Já Bravais foi um dos primeiros a escrever sobre a ideia de correlação no contexto estatístico, obtendo uma definição para o coeficiente de correlação antes de Pearson (BORTOLOSSI; PINHO, 2014).

Contudo, foi Galton quem organizou e sistematizou as ideias sobre correlação e regressão – introduzindo, inclusive, o termo correlação – a partir de seus trabalhos sobre hereditariedade: em um de seus estudos, Galton relacionou o diâmetro das sementes das plantas ‘filhas’ com o diâmetro das sementes das plantas ‘pais’; em outro, relacionou a estatura média dos filhos com a estatura média dos pais. Com base nos estudos de Galton, Pearson publicou, entre o final do século XIX e o início do século XX, diversos artigos sobre análise de regressão, escrevendo sobre o coeficiente de correlação linear e o teste qui-quadrado (LAVALLE; MICHELI; RUBIO, 2006).

De acordo com Batanero *et al*. (1994), a ideia de associação estatística vai além da ideia de dependência funcional (a dependência determinística) e é fundamental em diversos métodos estatísticos que permitem modelar fenômenos em várias ciências.

Para variáveis quantitativas, o problema de identificação de correlação possui algumas dificuldades; a primeira delas está associada à “leitura” das formas gráficas de representação

dos dados; segundo Curcio[37] (1989 apud BATANERO, 1994), a habilidade de ler criticamente um conjunto de dados é uma componente da alfabetização quantitativa. Para analisar o nível de compreensão dos gráficos, Curcio descreve três níveis:

i) "ler os dados": este nível requerer uma leitura literal do gráfico, ou seja, não há nenhuma interpretação das informações;

ii) "ler nos dados": este nível inclui a interpretação e integração dos dados no gráfico; requer a capacidade de comparar quantidades e o uso de outros conceitos e habilidades matemáticas;

iii) "ler além dos dados": este nível exige do leitor a capacidade de se fazer previsões e inferências dos dados sobre informações que não estão explícitas no gráfico.

No caso de um gráfico de dispersão, o primeiro nível de compreensão desse tipo de gráfico pode ser descrito como identificar corretamente as escalas utilizadas e o significado das variáveis, além de obter o valor aproximado de uma coordenada de um dos pontos, dado o valor da outra coordenada; já o segundo nível pode ser descrito como identificar corretamente a intensidade da covariação, se há associação direta ou inversa e se a relação poderia ser representada por uma função afim. Por fim, o terceiro nível pode ser descrito como prever corretamente o valor esperado para uma das variáveis a partir de um valor da outra.

Cobo, Castro e Batanero (2000) realizaram um estudo experimental sobre estimação da correlação por parte dos estudantes a partir de diferentes representações. Os autores alegam que indivíduos adultos, em geral, possuem uma capacidade limitada de estimar associação entre variáveis, sendo que essa capacidade melhora quando a correlação é forte e positiva. Além disso, eles justificam que, embora haja diversos estudos sobre isso, nesse trabalho os autores se concentraram na análise das concepções dos alunos e na análise de dificuldades de tarefas específicas; com isso, eles puderam analisar sistematicamente as tarefas de tradução do mapeamento de uma representação para outra, estudando seu efeito na estimativa da correlação e as estratégias utilizadas pelos alunos que estudaram o assunto correlação.

Para isso, os autores selecionaram estudantes da Universidade de Jaén (Espanha) e aplicaram um questionário, em que as questões procuraram apresentar formas diferentes de se representar a correlação entre duas variáveis quantitativas; o foco desse questionário era como os estudantes transformavam uma dessas representações em outra.

---

[37] CURCIO, F. R. **Developing graph comprehension**. Reston, VA: N.C.T.M, 1989.

Na análise dos resultados, os autores concluíram que as tarefas em que os estudantes tiveram os melhores desempenhos foram as que exigiram que eles estimassem o valor do coeficiente de correlação a partir de um gráfico de dispersão e construíssem o diagrama de dispersão a partir do valor do coeficiente de correlação; os autores justificaram que esse desempenho pode ser devido à familiaridade que os estudantes têm com a construção de gráficos, decorrente dos assuntos de Matemática estudados durante o Ensino Médio. Já as tarefas em que os estudantes tiveram os piores desempenhos foram as que exigiram deles a construção do diagrama de dispersão a partir de uma descrição verbal e a obtenção do coeficiente de correlação a partir de uma tabela de valores, pois essas não são tarefas familiares aos alunos.

Além disso, os autores também concluíram que, quanto maior a intensidade da correlação, mais precisa é a noção de correlação por parte dos estudantes; o mesmo ocorreu aos casos em que a associação possui uma relação causal.

2.1 O raciocínio correlacional

Conforme já mencionado, a partir da segunda metade do século XX começaram a ser publicados estudos sobre como as pessoas lidam com correlações e os processos cognitivos dos indivíduos em relação às associações entre variáveis. Os primeiros trabalhos relevantes nessa área foram escritos por Jean Piaget e Bärbel Inhelder, publicados a partir de 1951; nesses trabalhos, os autores partiram do pressuposto de que a compreensão da ideia de associação estava vinculada à compreensão das ideias de proporção e probabilidade e, por esse motivo, escolheram somente indivíduos que se encontravam nessa etapa de formalização operacional (faixa etária de 11 a 16 anos) para analisar como eles lidavam com associações e correlações (PIAGET; INHELDER, 1951).

No final da década de 1970, outros autores aprofundaram a análise de como os estudantes lidavam com associações entre variáveis incluindo, além dos casos em que as variáveis são qualitativas, também associações entre variáveis quantitativas. Essa análise evidenciou processos específicos do raciocínio que atuam diretamente na identificação e mensuração de associações; esses processos são parte integrante do chamado **raciocínio correlacional**, definido como *os processos de raciocínio que se usa para determinar a força da relação mútua ou recíproca entre as variáveis* (ADI *et al*., 1978).

De acordo com Nunes e Bryant (2011), existem diversas demandas cognitivas para a compreensão do raciocínio correlacional; em particular, três delas merecem destaque:

i) *aleatoriedade:* mesmo que não haja associação entre dois eventos, ainda é possível que eles ocorram juntos por fruto do acaso; nesse ponto, analisar a correlação entre dois eventos é estabelecer se eles ocorrem juntos com uma frequência maior do que o esperado se isso ocorresse por acaso. Assim, a compreensão da aleatoriedade faz parte da compreensão das correlações.

ii) *variabilidade:* para avaliar se dois eventos estão associados, é necessário identificar não apenas se eles ocorrem juntos, mas também quais são todos os casos possíveis. Por exemplo, se cada evento for caracterizado somente por sua ocorrência ou não, então o espaço amostral da ocorrência de dois eventos desse tipo é formado pelos pares (Sim, Sim), (Sim, Não), (Não, Sim) e (Não, Não). Nesse espaço amostral, a associação nem sempre é medida somente pelos casos do tipo (Sim, Sim); além disso, caso os eventos sejam caracterizados por mais do que essas duas possibilidades, analisar a associação entre elas já pode não ser uma tarefa simples.

iii) *probabilidade:* uma vez definido o espaço amostral, a frequência de casos que corroboram a existência de uma associação é maior que a frequência dos casos que não suportam essa associação, a ponto de ser possível supor que essa frequência seja diferente da esperada por acaso? Se a resposta for sim, conclui-se que existe uma associação entre os dois eventos.

Segundo Lawson, Adi e Karplus (1979), o raciocínio correlacional é fundamental para identificar associações entre variáveis e visa dois propósitos: previsão e exploração científica. Além disso, os autores afirmam que o raciocínio correlacional é avançado em termos de desenvolvimento, pois envolve a compreensão de relações decorrentes de outras mais simples.

Já no início da década de 1990, John Ross e Brad Cousins aprofundaram o estudo sobre o raciocínio correlacional, analisando associações entre variáveis quantitativas. As avaliações feitas pelos autores indicaram que o desempenho dos estudantes nessas habilidades era geralmente muito baixo e que, na Educação Básica, os estudantes não desenvolviam as habilidades necessárias para lidar com problemas correlacionais. Segundo eles, mesmo indivíduos capazes de reconhecer correlações positivas entre duas variáveis têm dificuldades

em lidar com correlações negativas; não obstante, eles apontam que o desempenho adulto no reconhecimento de não-correlações é baixo, mesmo para adultos com conhecimento especializado nos contextos específicos nos quais os problemas correlacionais estão inseridos (ROSS; COUSINS, 1993b).

Segundo Ross e Cousins (1993a), os problemas correlacionais são intuitivamente semelhantes aos experimentais e, por esta razão, os educadores de ciências atribuem os dois tipos à mesma categoria de objetivos, ou seja, a processos científicos integrados. No entanto, um ponto muito importante que distingue a investigação correlacional da experimental é o de que a primeira requer pensamento probabilístico. Assim, sob essa perspectiva, resolver problemas correlacionais requer o reconhecimento de que as associações entre as variáveis não são absolutas, mas existem em níveis – por exemplo, uma variável pode explicar somente parte da variação de outra, e não totalmente. Konold (1989) concluiu que alguns adultos não são capazes de raciocinar dessa maneira: independentemente das demandas, alguns indivíduos analisam somente variáveis que possam prever toda a variabilidade no resultado de interesse, presumindo assim uma relação determinística.

Sob essa análise, Ross e Cousins afirmaram que a solução de problemas correlacionais é composta por quatro dimensões (ou componentes da habilidade): **organização**, que inclui reorganizar as informações fornecidas no enunciado do problema de modo a facilitar sua solução; **seleção (ou localização)**, que consiste em selecionar uma amostra em que seja possível verificar se há alguma associação entre as variáveis em questão; **síntese**, que envolve resumir a associação (por exemplo, obtendo alguma medida sobre ela); e **conclusão**, que inclui obter conclusões qualitativas/quantitativas sobre a associação.

3 METODOLOGIA

Já algum tempo, é notório o aumento de investigações em Educação no Brasil. No entanto, também se notou como a maior parte delas, mesmo obtendo conclusões interessantes, não propuseram aplicações práticas em sala de aula e acabaram se tornando ineficazes em promover melhorias nos processos educacionais (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014).

Assim, nesse artigo optou-se por uma metodologia de pesquisa que, nas palavras de Kneubil e Pietrocola (2017, p. 2) possibilitasse “a compreensão de como, quando e porque inovações educacionais funcionam (ou não) na prática”. Uma metodologia que cumpre com

esse propósito é a **Pesquisa Baseada em Design**, um método que, embora possua semelhanças com a pesquisa-ação, difere especialmente ao desenvolver aplicações e/ou soluções nitidamente voltadas à inovação da prática pedagógica.

A Pesquisa Baseada em Design (DBR, do inglês *Design-Based Research*) surgiu no início dos anos 1990, concebida por Ann Brown e Allan Collins, e se popularizou a partir dos anos 2000 em pesquisas educacionais norte-americanas, por se tratar de uma metodologia aplicada. Uma das definições da DBR foi proposta por Barab e Squire (2004):

> A DBR é uma série de abordagens e procedimentos, com a intenção de produzir novas teorias, produtos e práticas pedagógicas que possam ser aplicados e que impactem potencialmente o processo de ensino-aprendizagem em sala de aula. (BARAB; SQUIRE, 2004, p. 2, tradução nossa)

Especificamente na área de Educação, a DBR pode ser utilizada em pesquisas que investigam estratégias eficazes no uso de recursos educacionais, inovações curriculares ou, ainda, a ação dos professores, pois essa metodologia pressupõe uma investigação tanto sobre o produto quanto o processo (KNEUBIL; PIETROCOLA, 2017).

Matta, Silva e Boaventura destacam as principais características da DBR:

- *Teoricamente orientada:* segundo os autores, as teorias são o ponto de partida, de investigação e de chegada; a DBR utiliza propostas teóricas como alicerce para a construção do design educacional que será proposto;
- *Intervencionista:* estabelece-se um diálogo entre o arcabouço teórico escolhido e o contexto de aplicação para que a pesquisa possa desenvolver uma aplicação que intervirá na prática pedagógica, criando algum produto educacional ou processo pedagógico;
- *Colaborativa:* de acordo com os autores, a colaboração de todos os envolvidos na pesquisa decorre naturalmente do desenvolvimento de uma solução concreta para o problema proposto. Na DBR, considera-se todos como parte da equipe de pesquisa: para isso, recomenda-se que o problema seja estabelecido de forma compartilhada com os que sofrem as consequências daquela dificuldade pois, desse modo, a pesquisa será validada por todos;
- *Fundamentalmente responsiva:* a DBR é pautada pelo diálogo entre o conhecimento dos participantes, o conhecimento teórico (suas interpretações e os

advindos da literatura) e a gama de validações realizadas. O conhecimento é desenvolvido concomitantemente com a prática, em ciclos (iterações);

- *Iterativa:* os autores evidenciam que a DBR é uma metodologia de pesquisa focada na construção de soluções práticas e, portanto, não é feita para terminar, uma vez que cada desenvolvimento é o resultado de um ciclo, o qual será o início do momento seguinte de aperfeiçoamento. Por isso, é necessária uma abordagem baseada em ciclos de estudo, análise e de refinamento da solução prática obtida. A iteração talvez seja a característica predominante da DBR, fornecendo-lhe o papel formativo com o qual ela é vinculada.

Especificamente sobre o ensino de Ciências Exatas, a metodologia DBR gerou uma sublinha de pesquisa – chamada de "Sequências de Ensino-Aprendizagem" (TLS, do inglês *Teaching-Learning Sequences*) – que analisa a implementação de inovações curriculares sobre conteúdos específicos (KNEUBIL; PIETROCOLA, 2017).

Para caracterizar a TLS aponta-se que, antigamente, os professores ensinavam usando livros didáticos escritos por desenvolvedores de currículos os quais inspiravam-se em pesquisadores em Educação que buscavam entender e explicar a aprendizagem formulando teorias de aprendizagem com implicações para o ensino. No entanto, esse caminho possuía diversas limitações pois se buscava entender e explicar a aprendizagem de disciplinas específicas (como a Matemática ou a Física) a partir de teorias generalistas (como, por exemplo, o construtivismo ou a semiótica das ciências cognitivas).

Assim, a TLS preenche a lacuna formada pela "muita teoria e pouca prática" por permitir a produção de conhecimento didático, relacionado a um conteúdo específico. Portanto, pode-se entender uma TLS tanto quanto uma atividade de pesquisa intervencional como um produto que inclui atividades desenvolvidas para o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes sobre um objeto de conhecimento específico, aplicado a um contexto real de sala de aula.

Sobre os resultados da aplicação da DBR, McKenney e Reeves (2012) classificaram os resultados em três tipos: i) os que possam contribuir com a teoria (consonância entre a teoria e a prática de aplicação); ii) os sociais e comunitários (solução de uma prática concreta para um problema comunitário contextualizado) e iii) os que permitem o desenvolvimento de

habilidades (por parte dos sujeitos envolvidos, que estarão capacitados a resolver problemas daquele tipo).

4 A SEQUÊNCIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM

A partir do conceito de TLS da seção anterior será apresentado um conjunto de atividades desenvolvidas para o processo de ensino-aprendizagem do conceito de regressão linear, aplicado a contextos reais. Assim, com base nas características da DBL apresentadas anteriormente, será construída uma sequência formada por uma atividade diagnóstica e 7 atividades, as quais serão aplicadas em um tempo previsto de 9 aulas.

O objetivo da atividade diagnóstica é analisar as demandas cognitivas dos estudantes para reconhecimento de correlações antes da aplicação das atividades. Para isso, serão apresentados 3 problemas correlacionais, cujo propósito é de identificar e mensurar a correlação existente entre duas variáveis: no primeiro, o estudante deverá identificar uma correlação a partir de uma notícia de jornal (por exemplo, “economistas concluíram que 1 ano a mais de formação do brasileiro reflete em um aumento de 2,3% em sua renda”); já no segundo problema, o estudante deverá identificar a correlação existente entre variáveis dado um gráfico de dispersão e elaborar alguma estratégia para realizar previsões (por exemplo, um gráfico de dispersão que relacione o IMC com a porcentagem de gordura corporal de um indivíduo, para que o estudante determine o valor esperado de percentual de gordura dado um valor do IMC); por fim, o terceiro problema segue os moldes do anterior, porém com dados apresentados em uma tabela, em vez de um gráfico.

Desde a atividade diagnóstica, é relevante notar o caráter teoricamente orientado e a faceta intervencionista da DBR, uma vez que a construção dessas atividades está fundamentada tanto pelas demandas cognitivas discutidas por Nunes e Bryant (2011) quanto pelas dimensões do raciocínio correlacional apresentadas por Ross e Cousins (1993a). Tal fundamentação será detalhada e discutida na próxima seção.

Em relação às atividades – nomeadas de A a G – serão apresentados problemas correlacionais cujos objetivos de aprendizagem estão descritos na Tabela 1:

Tabela 1 – Objetivos de aprendizagem para as atividades propostas

Atividade	Objetivos de aprendizagem
A	- Identificar uma associação linear entre duas variáveis quantitativas a partir de um gráfico de dispersão; - Traçar a reta que mais se ajusta aos pontos dados; - Definir um critério que meça a proximidade dos pontos à reta para decidir, dentre algumas possibilidades, qual é a mais adequada para modelar o problema.
B	- Obter uma relação funcional linear para associação entre variáveis; - Apresentar o método dos mínimos quadrados (MMQ).
C	- Identificar uma associação e obter uma relação funcional para ela, a partir de um experimento (por exemplo, relacionar o comprimento de um elástico ao número de bolas de gude presas a ele); - Conjecturar fatores que justifiquem a variabilidade dos parâmetros obtidos.
D	- Mostrar como os parâmetros da reta de regressão são obtidos no Google Sheets; - Interpretar os coeficientes do modelo de regressão; - Utilizar os modelos de regressão para realizar estimativas.
E	- Utilizar o modelo de regressão linear para realizar previsões; - Verificar a adequação do modelo a partir do coeficiente R^2 da regressão.
F	- Utilizar logaritmos para linearização; - Obter a equação da reta de regressão linear a partir de dados empíricos; - Analisar prováveis causas que gerem variabilidade nos parâmetros.
G	- Revisar os conceitos vistos nas atividades anteriores; - Mostrar a importância da análise gráfica para identificação de associações.

Nos moldes das características fundamentalmente responsiva e iterativa da DBR, cada uma dessas atividades representa uma iteração em que é analisado, avaliado e validado o desenvolvimento do processo a partir dos objetivos de aprendizagem presentes em cada ciclo. A avaliação e validação se darão por meio de algumas reflexões/questionamentos ao final de cada uma das atividades propostas, a fim de analisar se foram cumpridos os objetivos de aprendizagem estabelecidos para aquela atividade.

Ainda que em cada ciclo haja uma análise, avaliação e validação do processo, após a aplicação dessa sequência de atividades será realizada uma avaliação para verificar os resultados obtidos segundo os critérios propostos por McKenney e Reeves (2012): os que verificam a consonância entre a teoria e a prática do ensino-aprendizagem de modelos de regressão linear para estudantes do Ensino Médio – ou seja, se os alunos compreenderam os conceitos apresentados durante a sequência de atividades – e os que permitem o desenvolvimento de habilidades por parte dos estudantes – o desenvolvimento do raciocínio correlacional baseado nas definições de Adi *et al*. e características de Ross e Cousins.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Conforme já mencionado, a DBR é uma metodologia que pode ser utilizada em pesquisas que propõem soluções voltadas à inovação da prática pedagógica – o que é o caso deste trabalho, uma vez que o tema regressão linear ainda não está presente na maior parte das práticas pedagógicas das escolas do Ensino Médio no Brasil. Nesse sentido, a sequência de atividades propostas configura um produto que pode impactar a relação ensino-aprendizagem sobre esse tema em sala de aula.

Desde a atividade diagnóstica, nota-se as características da DBR propostas por Matta, Silva e Boaventura:

- *Teoricamente orientada:* para as demandas cognitivas do raciocínio correlacional, usam-se as ideias de Nunes e Bryant (aleatoriedade e variabilidade) e as dimensões do raciocínio correlacional propostas por Ross e Cousins (organização, seleção, síntese e conclusão), além da definição de raciocínio correlacional de Adi *et al.*;
- *Intervencionista:* as atividades trarão contextos reais para que se possa identificar cada uma das quatro dimensões do raciocínio correlacional (organização e seleção dos dados reais, obtidos empiricamente ou por meio de alguma fonte confiável; síntese e conclusão da associação entre fenômenos, a fim de se realizar previsões), criando assim um processo pedagógico para desenvolver esse tipo de raciocínio;
- *Colaborativa:* será privilegiada uma abordagem investigativa nas atividades, de modo que seja possível que os estudantes contribuam para a solução dos problemas correlacionais, permitindo uma aprendizagem mais ativa, em que o estudante ocupa papel central e o professor media as discussões;

- *Fundamentalmente responsiva:* uma vez que a abordagem investigativa permite que os estudantes levantem hipóteses de como identificar e mensurar correlações, caberá ao professor estabelecer o diálogo entre essas hipóteses e o conhecimento teórico necessário para que tais hipóteses possam ser validadas/refutadas. Isso está intimamente ligado aos objetivos de aprendizagem propostos em cada atividade, para que se possa realizar esse processo em ciclos (iterações);
- *Iterativa:* cada atividade configurará um ciclo de iteração, em que se avaliará e validará os objetivos propostos, a fim de se construir um processo em espiral que permite, em cada ciclo, o estabelecimento de novas relações, bem como a validação/modificação das já existentes.

Outra vantagem da DBR para ser usada nesse trabalho é a de que o professor pesquisador também faz parte do processo, podendo ser, inclusive, o aplicador das atividades. Como esse professor já conhece a turma à qual as atividades serão aplicadas, esse vínculo pode ser benéfico por firmar o papel colaborativo e responsivo dos estudantes.

Nessa pesquisa, a sequência de atividades proposta está prevista para ser aplicada a estudantes da 1ª série do Ensino Médio de duas escolas do interior paulista: uma na cidade de Atibaia e a outra, em Bragança Paulista. O professor pesquisador será o aplicador das atividades e, uma vez que essas atividades forem aplicadas, os resultados obtidos serão analisados para concluir de que forma se desenvolve o raciocínio correlacional dos estudantes a partir desta sequência.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o Ensino Médio, são apresentados aos estudantes diversos exemplos de associações chamadas *dependências determinísticas,* mas quase não se discute exemplos de *associações estatísticas*, mesmo que o estudo desse tipo de associação tenha sido explicitado em diversos documentos norteadores de currículos, tais como a BNCC.

Ao analisar como os estudantes lidam com associações entre variáveis, observou-se alguns processos específicos do raciocínio que atuam diretamente na identificação e mensuração de correlações. Os problemas em que se analisa a identificação e a mensuração de

correlações são denominados problemas correlacionais e o conjunto de processos do raciocínio necessários para resolver esses problemas é chamado raciocínio correlacional.

O raciocínio correlacional é composto por 4 dimensões: organização, seleção, síntese e conclusão (ROSS; COUSINS, 1993a); a sequência de atividades proposta baseia-se nestas dimensões para analisar o raciocínio correlacional dos estudantes. Além disso, esse trabalho também segue as características da DBR como metodologia de pesquisa: é teoricamente orientada, intervencionista, colaborativa, fundamentalmente responsiva e iterativa, dividida em ciclos em que, a cada iteração, é planejada, executada e analisada uma atividade que valida objetivos de aprendizagem específicos relacionados ao conceito de regressão linear.

Como limitações a esse trabalho, destaca-se que a sequência pressupõe alguns conhecimentos pré-existentes (por exemplo, conceitos de função, função afim, taxa de variação, logaritmos) bem como a disponibilidade e acessibilidade de tecnologia (para obtenção de parâmetros de reta de regressão em estudos empíricos) para execução das atividades.

Além disso, todas as atividades propõem identificação e mensuração de associações lineares simples, o que poderia ser ampliado, futuramente, a associações múltiplas e modelos de regressão não-lineares. Outra forma de ampliar esse trabalho é discutir as hipóteses sobre as variáveis de estudo para que seja possível obter os parâmetros dos modelos de regressão. Ainda, sugere-se analisar o raciocínio correlacional usando-se critérios diferentes dos utilizados por Ross e Cousins, ou a criação de outra sequência de atividades para esse tipo de desenvolvimento.

REFERÊNCIAS

ADI, H. *et al*. Intellectual development beyond elementary school VI: Correlational reasoning. **School Science and Mathematics**, v. 78, n. 8, p. 675–683, 1978.

BARAB, S.; SQUIRE, K. Design-Based Research: putting a stake in the ground. **Journal of the Learning Sciences**, v. 13, n. 1, p. 1–14, 2004.

BATANERO, C. *et al*. Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. **Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 25, n. 4, p. 527–547, 1994.

BATANERO, C.; BOROVCNIK, M. **Statistics and probability in high school**. [s.l.] Sense Publishers, 2016.

BOROVCNIK, M. Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. **Educação Matemática Pesquisa:** Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 18, n. 3, p. 1491–1516, 2017.

BORTOLOSSI, H. J.; PINHO, D. da C. Amostragem, regressão linear e o método dos mínimos quadrados em Estatística: uma introdução para professores do Ensino Básico. *In*: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 7., 2014, Maceió. **Anais** [...]. Maceió: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**: Ciências da Natureza. Brasília, DF: MEC, 2002, p. 1–141.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica**. Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC, 2018, p. 1–600.

COBO, F. T. S.; CASTRO, A. E.; BATANERO, C. Un estudio experimental de la estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones. **Enseñanza de las Ciencias:** revista de investigación y experiencias didácticas, v. 18, n. 2, p. 297–310, 2000.

KNEUBIL, F. B.; PIETROCOLA, M. A Pesquisa Baseada em Design: visão geral e contribuições para o ensino de Ciências. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 22, n. 2, p. 01, 2017.

KONOLD, C. Informal Conceptions of Probability. **Cognition and Instruction**, v. 6, n. 1, p. 59–98, 1989.

LAVALLE, A. L.; MICHELI, E. B.; RUBIO, N. Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 9, n. 3, p. 383–406, 2006.

LAWSON, A. E.; ADI, H.; KARPLUS, R. Development of correlational reasoning in secondary schools: do Biology courses make a difference? **The American Biology Teacher**, v. 41, n. 7, p. 420–430, 1979.

MATTA, A. E. R.; SILVA, F. de P. S. da; BOAVENTURA, E. M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **Revista da FAEEBA - Educação e Contemporaneidade**, v. 23, n. 42, p. 23–36, 2014.

MCKENNEY, S.; REEVES, T. **Conducting educational design research**. 1. ed. London: Routledge, 2012.

NUNES, T.; BRYANT, P. Understanding risk and uncertainty: the importance of correlations. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 2, n. 2, p. 1–24, 2011.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **La génese de l´idée de hasard chez l´enfant**. Paris: Presses Universitaires de France, 1951.

ROSS, J. A.; COUSINS, J. B. Patterns of student growth in reasoning about correlational problems. **Journal of Educational Psychology**, v. 85, n. 1, p. 49–65, 1993a.

ROSS, J. A.; COUSINS, J. B. Enhancing secondary school students' acquisition of correlational reasoning skills. **Research in Science & Technological Education**, v. 11, n. 2, p. 191–205, 1993b.

TRIOLA, M. F. **Introdução à Estatística: Atualização da Tecnologia**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

PENSAMENTO E LINGUAGEM ALGÉBRICOS
Um olhar sobre a produção de significados matemáticos e didáticos nos anos finais do Ensino Fundamental I

ALGEBRAIC THOUGHT AND LANGUAGE
A look at the production of mathematical and didactic meanings in the final years of Elementary School I

Vinicius Henrique Sbaiz [1], Iole de Freitas Druck [2]

[1] Mestrando do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP; vinicius.sbaiz@usp.br
[2] Docente do Departamento de Matemática do IME-USP e orientadora; iole@ime.usp.br

Resumo: Neste trabalho é exposto o desenvolvimento atual da dissertação (com o título deste artigo) do programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática (MPEM) do IME/USP. Inspirados na metodologia da pesquisa-ação, até aqui o desenvolvimento da pesquisa se deu por meio de seminários no interior de um grupo participativo formado por professoras atuantes no EFI, o mestrando e sua orientadora. Trazemos ao leitor algumas concepções dos autores Rômulo Campos Lins, James Kaput e Luis Radford, sobre o que seja pensar algebricamente, bem como elementos da teoria Histórico Cultural de Vygotsky sobre a importância da criação de um ambiente democrático para o fortalecimento da comunicação nas práticas escolares. As reflexões no interior do grupo se apoiam no Modelo Teórico dos Campos Semânticos - MTCS (LINS, 2012), como ferramenta para a identificação dos significados desenvolvidos pelas professoras sobre pensamento e linguagem algébricos e para explorações de atividades de ensino e aprendizagem de álgebra em suas salas de aula.

Palavras-chave: Pensamento e linguagem algébricos. Modelo Teórico dos Campos Semânticos. Formação continuada de professores de Ensino Fundamental I. Produção de significados matemáticos.

Abstract: This work presents the current development of the dissertation (with the title of this article) of the Professional Master's Degree Program in Mathematics Education (MPEM) at IME/USP. Inspired by the action research methodology, the development of the research so far has taken place through seminars within a participatory group formed by teachers working at EFI, the master's student and his supervisor. We bring to the reader some conceptions of the authors Rômulo Campos Lins, James Kaput and Luis Radford, about what it means to think algebraically, as well as elements of Vygotsky's Cultural Historical theory about the importance of creating a democratic environment for the strengthening of communication in school practices. Reflections within the group are based on the Theoretical Model of Semantic Fields - MTCS (LINS, 2012), as a tool for identifying the meanings developed by teachers about algebraic thinking and language and for exploring algebra teaching and learning activities in their classrooms.

Keywords: Algebraic thought and language. Theoretical Model of Semantic Fields. Continuing education of elementary school teachers I. Production of mathematical meanings.

1 INTRODUÇÃO

A pesquisa em desenvolvimento para a elaboração de dissertação no MPEM, tem como um de seus objetivos gerais identificar e problematizar os significados matemáticos e didáticos atribuídos por professores dos anos finais do Ensino Fundamental I (EFI) a pensamento e a linguagem algébricos. Outro objetivo geral é o de contribuir para a formação continuada de professores, no que diz respeito ao ensino e aprendizagem de Álgebra nesta fase de escolaridade.

Como objetivos específicos do trabalho elencamos: o aprofundamento de estudos sobre a natureza do pensamento e da linguagem algébricos trabalhados na Educação Básica bem como os desafios e dificuldades encontradas no ensino desse tema. Para isso iremos recorrer à literatura em Educação Matemática, buscando identificar as dificuldades recorrentes de aprendizagem de alunos do EFI e também abordagens de ensino adequadas a promover a superação das mesmas. Inspirados na metodologia da Pesquisa-ação, formamos um grupo participativo de estudos envolvendo duas professoras atuantes nos anos finais do EFI, este mestrando e sua orientadora. De maneira colaborativa, nos seminários do grupo promovemos discussões teóricas sobre os temas desta pesquisa e sobre o desenvolvimento de práticas que possam favorecer o desenvolvimento de concepção mais abrangente de pensamento e linguagem algébricos.

No que segue faremos uma descrição dos resultados parciais obtidos na pesquisa até o momento.

2 JUSTIFICATIVAS

O interesse no tema de pesquisa surgiu a partir de questões por mim formuladas durante a graduação em Licenciatura em Matemática no Instituto de Matemática e Estatística (IME-USP), ao cursar a disciplina de Projetos de Ensino de Matemática. Nela desenvolvi uma monografia com a proposta de incluir alunos do Ensino Fundamental I (EFI) em situações onde o pensamento algébrico pudesse aparecer. O ponto de maior destaque daquela pesquisa foi a alta capacidade dos estudantes, ainda na primeira fase do EFI, em encontrar justificativas e argumentos sobre situações onde a álgebra já estivesse sendo posta. Ao concluir o mencionado trabalho, novos questionamentos ficaram em aberto, sendo eles os pontos iniciais

desta minha nova jornada. As perguntas que surgiram foram sendo reformuladas, repensadas e serão expostas aqui posteriormente.

Sabemos que não é novidade destacar que a proposta de ensinar esse tema já vem sendo discutida e faz parte da prática atual de diversas salas de aula. Desde o final dos anos 90, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), já se indicava a importância de se iniciar o estudo da álgebra no Ensino Fundamental I, mas o que ainda se vê é a priorização da aritmética em detrimento dela nesta fase de escolaridade. Alguns autores têm estudado o motivo dessa dinâmica e justificam essa escolha didática por parte dos educadores por acharem mais acessível aos alunos nessa fase. Outros como no caso de (CARRAHER et al., 2006), respondem a esse fato amparando-se na construção histórica sobre esses temas e pelo fato da aritmética ter surgido antes, o que naturalmente sugeriria um desenvolvimento prioritário.

Este trabalho tem como finalidade discutir a importância de explorar o desenvolvimento do pensamento algébrico ao mesmo passo que a aritmética vem sendo ensinada, como destaca Lins e Gimenez (1997, p. 10) ao dizerem que *é preciso começar mais cedo o trabalho com a Álgebra, e de modo que esta e a Aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra*.

As discussões em sala com participação ativa dos alunos favorecem o processo de aprendizagem, contribuindo para um melhor aproveitamento na compreensão dos alunos onde os mesmos possam produzir seus próprios conhecimentos. Quando isso acontece podemos dizer que os estudantes tiveram uma experiência significativa, ou que o produziram significado para aquilo que estava sendo proposto.

Desde 1998 é destacada, nos documentos oficiais norteadores dos currículos básicos, a importância da criação de uma grande rede de conexão relacionando a compreensão e os significados desenvolvidos. Nos PCN há um trecho que explicita a relevância de interconectar os objetos matemáticos no ensino, ou seja, de relacionar entre si os elementos que compõem a matemática em diferentes situações.

> [...] para que a aprendizagem possa ser significativa é preciso que os conteúdos sejam analisados e abordados de modo a formarem uma rede de significados. Se a premissa de que compreender é apreender o significado, e de que para apreender o significado de algum objeto ou acontecimento é preciso vê-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos, é possível dizer que a idéia de conhecer assemelha-se a idéia de tecer uma teia (BRASIL, 1998, p. 75).

Cabe destacar que o conhecimento do aluno é aquilo que ele acredita ser correto. Compreender o entendimento do aluno sobre uma situação dada é fundamental, pois somente a partir desta compreensão é que o professor pode saber o que é necessário aprofundar e discutir lacunas na aprendizagem, correções de conceito ou esclarecimento de fatos que podem estar causando bloqueios nos estudantes.

Entendemos que se pode favorecer o desenvolvimento da habilidade de pensar algebricamente pelos estudantes incluindo-os, desde os anos iniciais, em situações que os levem a: observar de forma crítica; reconhecer padrões; e argumentar sobre os objetos matemáticos em estudo.

> Os alunos no 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas e padrões geométricos. No 2.º ciclo, ampliam e aprofundam esse trabalho, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação pelo estudo da relação entre os termos. Os alunos desenvolvem igualmente a capacidade de identificar relações e de usar a linguagem simbólica para as descrever, e começam a expressar relações matemáticas através de igualdades e desigualdades. (PONTE et al., 2007 p. 40).

Como destacado por (PONTE et al., 2007 p. 40), não se espera o mesmo desenvolvimento e formalidade dos alunos do EFI comparado aos alunos de Ensino Fundamental II (EFII). No EFI é desejável que sejam proporcionadas situações onde o pensamento e uma introdução à linguagem algébrica sejam mobilizados, preparando-os para uma experiência mais significativa ao chegarem no EFII.

O ensino de álgebra é uma prática atual, estando contemplado na Base Nacional Comum Curricular do EF (BNCC/EF) (BRASIL,2018), onde o desenvolvimento de pensamento algébrico é considerado essencial para a Matemática e são apresentados possíveis caminhos para que a construção desse pensamento seja desenvolvida, veja o detalhamento completo na citação a seguir.

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa

> unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. **Nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais**, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se 2 + 3 = 5 e 5 = 4 + 1, então 2 + 3 = 4 + 1. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita. A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três), como: "Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?" (BRASIL, 2018, p. 270, grifo nosso).

A álgebra é importante na formação matemática dos estudantes, tanto por desenvolver um tipo especial de pensamento, como pela construção de uma linguagem simbólica. Essa composição de linguagem contribui para a matemática e para as áreas do conhecimento que se amparam nessa mesma maneira de se comunicar.

O domínio e o entendimento dos símbolos utilizados na álgebra fazem parte da matemática como ciência. Esta linguagem possibilita o estabelecimento de uma comunicação universal desse conhecimento, mas para que isso aconteça, é necessário compreendê-la, como destacou Danyluk em meados da década de 90.

> Se a Ciência Matemática tem a peculiaridade de ser expressa em uma linguagem simbólica, pode-se afirmar que, ao ler um texto de Matemática, o homem envolve-se com simbolismos; o leitor deve familiarizar-se com os símbolos mostrados no discurso. Por outro lado, é preciso considerar, também, que o leitor deve encontrar significado nesses registros [...] (DANYLUK, 1993, p. 39).

O papel do professor se torna fundamental e insubstituível em todo o processo de formação e desenvolvimento do pensamento algébrico. Cabe a ele proporcionar um ambiente propício para que ideias sejam discutidas, argumentos formulados, os símbolos introduzidos e o pensamento algébrico desenvolvido.

A interação entre os alunos, o professor e quando feita de forma conectada e dialógica pode proporcionar o conhecimento mais significativo, como sugere SCHWANTES (2004, p.500):

> Pelo diálogo argumentativo e a produção de significados ocorre a sintonia permanentemente entre aluno, professor e objeto de estudo. Por esta sintonia estabelece-se uma confiança mútua, que motiva os alunos a confiarem em suas potencialidades, em seus saberes prévios e na capacidade de seus pares. Isso favorece a liberdade de argumentação para a construção conceitual, a elaboração de conjecturas, suas validações, refutações, e, por conseguinte, sua representação por meio de linguagem simbólico-formal (SCHWANTES, 2004, p. 500).

É importante que faça parte da vida profissional dos professores tanto a formação continuada como a atualização da própria prática pedagógica. A maioria dos professores atuantes no EFI possui uma formação inicial generalista, não apenas ligada à matemática. Assim, muito da sua atuação em sala de aula é baseada nos livros didáticos, nos materiais de apoio fornecidos pela sua instituição de ensino, ou até mesmo pela experiência própria vivenciada enquanto estudantes. Entender os significados desenvolvidos por professores, no que diz respeito ao ensino de álgebra, pode nos levar a descobrir possíveis entraves e ajudá-los na formulação de concepções mais abrangentes, possibilitando novas perspectivas de práticas de ensino.

Resumidamente, o trabalho neste projeto se direciona para o entendimento mais aprofundado dos conhecimentos desenvolvidos por professores do EFI, para a compreensão dos significados que produzem sobre o pensamento algébrico, sobre o papel da linguagem algébrica no aprendizado inicial de álgebra e sobre abordagens adequadas à atribuição de significados a esses conteúdos por estudantes do EFI. Esse será o caminho para construção de reflexões sobre teorias e práticas pedagógicas visando o favorecimento de concepções mais abrangentes e uma ampliação de repertório propício à atuação em sala de aula no ensino de álgebra.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Existe um consenso sobre a importância de se ensinar álgebra no EFI. Inúmeros são os trabalhos dedicados a relatar e estabelecer as vantagens desse tema ser tratado desde essa fase do ensino. A álgebra ocupa um amplo espaço de objetos de estudo, como por exemplo equações, inequações ou funções. Além de tratar de muitos conceitos matemáticos, faz parte desse estudo a inclusão de processos algébricos como o reconhecimento de padrões, inversão, simplificação, determinação de fórmulas e a utilização de uma linguagem simbólica própria. Muitos desses conceitos não são explorados na formação dos professores atuantes dessa fase de escolarização, o que pode causar inseguranças na sua prática em sala de aula.

Com a finalidade de contextualizar o leitor, utilizaremos algumas das concepções de pesquisadores sobre o tema, buscando encontrar pontos de convergência que nos possibilitem formular uma definição para pensamento algébrico. Além disso, faremos a discussão sobre a influência Histórico-Cultural no processo de educação e discutiremos sobre possibilidades de exploração do pensamento algébrico em sala de aula.

3.1 Concepções sobre o Pensamento Algébrico

Para Rômulo Lins (1992), pensar algebricamente na Educação Básica é uma maneira de produzir sentidos para a Álgebra, ou seja, é a capacidade mental de atribuição de significados, por parte de um indivíduo para o objeto algébrico que esteja no centro de uma discussão. Essa ideia foi defendida pelo autor em sua tese de doutorado *"A framework for understanding: what algebraic thinking is"*. Lins e Gimenez (1997), apresentam três vertentes para o pensamento algébrico, classificando em: *aritmeticismo*, *internalismo* e *analiticidade*.

> Já mostramos também que há distintos modos de produzir significado para a álgebra; o pensamento algébrico é um desses modos e tem três características fundamentais:
> 1) produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (chamamos a isso aritmeticismo);
> 2) considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não "modelando" números em outros objetos, por exemplo, objetos ' 1 físicos" ou geométricos (chamamos a isso internalismo); e,
> 3) operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (chamamos a isso analiticidade).
> Pensar algebricamente é pensar dessa forma; é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas operando sempre de acordo com (1), (2) e (3). (LINS; GIMENEZ, 1997, p.152).

O aritmeticismo como 'pensamento algébrico' é o modo de pensar que diante de situações envolvendo números, operações e a relação de igualdade, leva o indivíduo a produzir associações entre os elementos participantes e não apenas a obter um mero resultado numérico. Ou seja, nesta forma de pensar o aluno expande sua compreensão da aritmética aproximando-a da álgebra. Cabe destacar que nesta abordagem não se utiliza a linguagem algébrica simbólica usualmente encontrada ao se estudar a álgebra, mas, segundo Lins e Gimenez, não é somente o uso da linguagem simbólica que determina o pensamento existente em uma situação de sala de aula. Vejamos nas palavras de Lins e Gimenez:

> [...] Por outro lado, o que caracteriza a "verdadeira" operação aritmética é a "sensação" de se estar "fazendo uma conta": dois elementos são associados para "produzir" um terceiro. É essa característica – forte – das operações aritméticas "verdadeiras" que persiste nas leis de composição da álgebra abstrata, de modo que não vemos inconveniente em utilizar a nomenclatura que adotamos, de modo a preservar o *insight* que ela oferece (LINS; GIMENEZ, 1997, p.152).

Em outras palavras, para os autores o que determina a existência de um pensamento algébrico é a possibilidade de perceber as operações aritméticas como uma 'funções' que associam dois elementos a um terceiro, o que pode ser caracterizado como uma forma intuitiva de se pensar algebricamente.

Na segunda vertente, chamada de Internalism os números e as operações são tratados com foco em suas propriedades matemáticas, sendo utilizados não somente para a modelagem de problemas, mas também como objetos de estudo. Vale destacar que o autor separa os números e operações da finalidade usual inserida ao se trabalhar com a aritmética. Diferente da abordagem anterior, onde se produzem significados para as operações, nessa vertente o foco é a análise das regularidades de suas propriedades. Já na analiticidade os números desconhecidos (variáveis, incógnitas, constantes, parâmetros ou indeterminadas), são tratados como sendo objetos "conhecidos" que podem ser manipulados diretamente, respeitando as propriedades gerais das operações que os envolvem, nas palavras dos autores:

> [...] O leitor não deveria se espantar ao concluir que essa nossa caracterização de pensamento algébrico corresponde bastante de perto ao que poderíamos chamar de "manipulação formal"; é evidente que uma caracterização que deixasse de fora esse aspecto não seria de interesse. Por outro lado, é preciso ver que nossa caracterização não se esgota como "cálculo formal". [...] Com isso, queremos dizer que não estamos interessados em reduzir "pensamento algébrico" a uma noção abstrata e extremamente genérica, como seria o caso se disséssemos que pensar algebricamente é "operar sintaticamente", como alguns autores parecem sugerir; [...] é preciso que conheçamos as propriedades dos "números" e das "operações aritméticas", termos genéricos, é verdade, mas que só ganham vida "concreta" na medida em que são especificados em sua particularidade, no interior da atividade em questão. (LINS; GIMENEZ, 1997, p.153).

James Kaput é outro autor estudado também concorda que o conhecimento está no indivíduo e não no objeto matemático estudado, ou seja, para ele o fato de se trabalhar com objetos algébricos não caracteriza a presença de pensamento algébrico. A conclusão de que tal pensamento foi mobilizado só pode ocorrer após a certeza de que houve atribuição de sentido para os elementos envolvidos.

Em Kaput (2008), fica estabelecido que o pensamento algébrico é uma atividade unicamente humana, pois se manifesta pela capacidade de estabelecer relações, e de encontrar generalizações com o uso de uma linguagem formalizada para o fornecimento de argumentos cada vez mais consistentes. O autor também classifica em três vertentes o pensamento algébrico, no caso denominadas por: *aritmética generalizada ou pensamento quantitativo; pensamento funcional; modelação*.

Encontrar generalizações para os processos aritméticos potencializa o desenvolvimento do pensamento algébrico. Na vertente da aritmética generalizada são explorados: o reconhecimento de padrões; as relações entre os números; a exploração da igualdade dentro de expressões; a observação do caráter algébrico dos números; e a capacidade de se trabalhar com números desconhecidos. Vejamos que essa definição engloba as duas primeiras vertentes definidas por Lins e Gimenez. Diferentemente desses, Kaput centraliza em um mesmo aspecto os significados das operações e suas propriedades.

No pensamento funcional definido pelo autor, os padrões numéricos estudados incluem descrever relações que possibilitem variações dentro de um mesmo conjunto, nesse caso o conceito de variável passa ser explorado incluindo também suas representações gráficas.

Por fim, a última vertente desse autor, nasce das explorações de situações cotidianas e evolui para situações mais abstratas envolvendo a álgebra. Assim a modelação é o caminho para a busca de significados. Essa vertente se junta às duas anteriores para a definição de pensamento algébrico segundo James Kaput (2008).

Ao comparar os dois autores, encontramos diversos pontos em comum. O que Kaput (2008) traz de novo ao que foi descrito por Lins e Gimenez (1997), é a exploração do pensamento funcional como sendo parte importante para caracterizar o pensamento algébrico. Outro elo de consenso entre os autores é a linguagem própria que se pretende desenvolver na exploração do pensamento algébrico.

Para explorar um pouco mais da relação entre pensamento e linguagem e a sua importância no pensamento algébrico, vamos recorrer aos escritos de Luis Radford, que se aprofundou nessa discussão.

Radford (2006), acredita que pensar algebricamente é uma forma particular de refletir sobre a matemática. O autor utiliza como fundamentação a Teoria da Objetivação do Conhecimento, por ele desenvolvida, na qual relaciona a linguagem com o pensamento,

destacando que o conhecimento não pode estar restrito à linguagem e ao discurso, mas também às práticas sociais nas quais os indivíduos estão inseridos.

Para Radford (2009) o pensamento algébrico pode ser observado de três formas diferentes: *pensamento algébrico factual; pensamento algébrico contextual, pensamento algébrico padrão.*

No pensamento algébrico factual, Radford (2009) entende que o indivíduo consegue construir situações particulares nas atividades propostas, como por exemplo em situações de reconhecimento de padrões, nesse caso o indivíduo consegue identificar o padrão da próxima figura ou próximo número da sequência, consegue entender a lei de formação , mas ainda não é suficiente para identificar termos distantes ou encontrar uma generalização para qualquer termo arbitrário da sequência.

Já no pensamento algébrico contextual, o indivíduo consegue explorar generalizações para as situações, sendo desafiado. Nessa etapa é possível perceber que nível de abstração não se ampara mais somente em estímulos visuais, mas sim em leis de formações dentro do espaço matemático de representações. Cabe destacar que essas representações também podem ser feitas por meio da linguagem escrita ou de outras que sejam acessíveis a ele na fase de exploração.

No pensamento algébrico padrão, o indivíduo utiliza da linguagem algébrica simbólica, ou seja, nas generalizações identificadas já pode fazer uso de fórmulas alfanuméricas com grau de complexidade superior ao identificado na fase anterior, podendo construir novos registros e possíveis simplificações.

Observemos que os autores apresentados até aqui, utilizam de pilares semelhantes para definirem a habilidade de pensar algebricamente. Mas também é possível notar que cada um inclui situações diversificadas ou chama a atenção para pontos particulares que entende como sendo mais relevantes. Entretanto, percebemos que o reconhecimento de padrões e a linguagem simbólica estão no centro do pensamento algébrico para todos.

3.2 A influência Histórico Cultural na sala de aula e a importância da linguagem

Vygotsky foi um grande pensador do século XX e foi o pioneiro a discutir que o desenvolvimento intelectual das crianças ocorre por conta de suas interações sociais e condições de vida. Em seus escritos ele defendeu a ideia de popularizar o conhecimento

dando destaque para o papel do professor, fazendo uso da linguagem como ponte de mediação do processo educacional e melhor qualificação de recursos humanos.

O que é proposto por Vygotsky é um ambiente escolar democrático, onde alunos e professores sejam vistos como sujeitos que se relacionam e constituem conexões baseadas na reciprocidade, onde todos possuem o mesmo espaço para o debate e para troca de opiniões. Por sua vez, o aluno não aprende passivamente seus comportamentos, linguagem e costumes, ele aprende através da experiência, participando da forma ativa da construção cultural de sua história.

> [...] uma educação centrada na cultura presente no cotidiano imediato dos alunos que se constitui, na maioria dos casos, em resultado da alienante cultura de massas, devemos lutar por uma educação que amplie os horizontes culturais desses alunos; contra uma educação voltada para satisfação das necessidades imediatas e pragmáticas impostas pelo cotidiano alienado dos alunos, devemos lutar por uma educação que produza nesses alunos necessidades de nível superior, necessidades que apontem para um efetivo desenvolvimento da individualidade como um todo; contra uma educação apoiada em concepções do conhecimento humano como algo particularizado, fragmentado, subjetivo, relativo e parcial que, no limite, negam a possibilidade de um conhecimento objetivo e eliminam de seu vocabulário a palavra verdade (…) (DUARTE, 2011, p. 11-12).

Direcionando a nossa discussão para o âmbito da Educação Matemática, na perspectiva de Vygotsky a matemática escolar não pode ser apresentada de forma fragmentada e desconectada da vivência do aluno. A matemática, por se tratar de uma ciência construída pela humanidade, precisa estar inserida dentro do contexto cultural dos alunos e ser vista como um conhecimento que vai se adquirindo através de práticas sociais.

> [...] o aprendizado das crianças começa muito antes delas frequentarem a escola. Qualquer situação de aprendizado com a qual a criança se defronta na escola tem sempre uma história prévia. Por exemplo, as crianças começam a estudar aritmética na escola, mas muito antes elas tiveram alguma experiência com quantidades – elas tiveram que lidar com operações de divisão, adição, subtração e determinação de tamanho. Consequentemente, as crianças têm a sua própria aritmética pré-escolar, que somente psicólogos míopes podem ignorar.(VYGOTSKY, 1989, p. 94-95).

O caminho para essa abordagem é o estabelecimento de conexões entre a linguagem cotidiana e as situações problemas que a matemática trata. Produzir e identificar significados nas relações de sala de aula é importante para se constituir o pensamento matemático. Nessa linha de atuação o professor deixa de ser um mero expositor de situações e passa a ser um mediador de discussões proporcionando debates entre os alunos, fornecendo direcionamentos que facilitem as compreensões e produções de significados.

3.3 Desenvolvimento de uma aprendizagem significativa

A partir das concepções de pensamento algébrico, e relacionando com a Perspectiva Histórico cultural de Vygotsky, nos deparamos com a importância de promover uma aprendizagem significativa no ensino de álgebra. Para tanto vamos nos apoiar no referencial teórico/pedagógico do Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS), que foi desenvolvido por Rômulo Campos Lins em sua tese de doutorado (1992).

O modelo desenvolvido tem como finalidade estudar de forma estruturada as maneiras que os significados são produzidos (em uma relação de ensino aprendizagem em sala de aula?). O autor define elementos fundamentais para o estabelecimento de um ambiente propício onde seja possível efetuar análises e identificar parâmetros que indiquem ao professor se houve a produção de conhecimento pelos estudantes.

Dentro da abordagem do MTCS, o **conhecimento** de alguém é uma **crença-afirmação** acompanhada de uma **justificação**, entendida como sendo aquilo que ele acredita que o autoriza a dizer o que diz. Para Lins, para se produzir um conhecimento é necessário um objetivo a ser buscado. Assim esta noção prescinde da necessidade de 'verificação': nesta teoria, o conhecimento pode ser produzido independentemente de julgamento sobre sua verdade ou falsidade. Essa específica definição de conhecimento tem o objetivo de colocar em pé de igualdade todas as particulares produções de argumentos e ideias no interior de atividades escolares.

A argumentação é parte fundamental da produção de significados, mas só existem argumentos quando se acredita no que se está dizendo. Esse elemento só é comprovado se vier acompanhado do princípio da coerência, ou seja, só é possível dizer que exista uma crença sobre o que é dito se houver consistência entre o que se diz e o que se pratica.

Por exemplo, eu digo "Não é possível uma pessoa ver através de paredes". Tendo perdido minhas chaves, não seria coerente ficar olhando para a parede, tentando saber se minhas chaves estão na sala ao lado." (LINS, 2012 p.13).

Lins utiliza em seu trabalho o constructo de **enunciação**, parte fundamental de sua teoria, com a definição de ser o ato individual de produzir argumentação em um contexto comunicativo no interior de uma atividade. Nesse processo de geração de enunciações novas ideias ou intuições poderão surgir e, eventualmente contribuir para enriquecimento para

discussões de novos caminhos. Tais ideias são definidas como **resíduos de enunciação** no MTCS**.**

A produção de significados é centralizada na relação **autor-texto-leitor** no interior de uma atividade de sala de aula. **O autor** é o sujeito que produz a enunciação; para este autor existe um leitor idealizado a quem direciona a sua argumentação (o seu leitor alvo). Por sua vez, **o leitor** é aquele que recebe a enunciação. Assim como acontece no processo anterior, o leitor também faz uma idealização do autor. Por fim, **o texto** é definido como a enunciação transportada entre o leitor e o autor, sofrendo adaptações e interpretações de cada um dos dois sujeitos envolvidos.

> Quem produz uma enunciação é o autor. O autor fala sempre na direção de um leitor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo o autor. Quem produz significado para um resíduo de enunciação é o leitor. O leitor sempre fala na direção de um autor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo o leitor. (LINS, 2012, p.14)

No MTCS, o constructo **Campo Semântico** designa o processo de construção de conhecimento e de produção de significados no interior de uma atividade e na interlocução entre autor-texto-leitor, por meio das crenças-afirmações, justificação, enunciação, descritos nas definições anteriores. Para Lins, os campos semânticos são espaços onde regras podem ou não existir, mas que delimitam fronteiras até onde se pode chegar sem que se crie um novo campo semântico. Essas fronteiras são definidas por aquilo que é possível se fazer e explorar no interior de uma atividade, de forma garantir que todos estejam falando do mesmo assunto e produzindo argumentos dentro do mesmo espaço de leitura.

> Do ponto de vista da teorização, "campo semântico" serve para articular "produção de conhecimento", "significado", "produção de significado" e "objeto". A referência a "no interior de uma atividade" serve para evitar o caso em que se esteja falando de futebol e de equações "ao mesmo tempo" e terminemos fazendo referência a um campo semântico no qual pareça que se está produzindo significado para gol em relação a uma balança de dois pratos. Não que isto não possa acontecer, mas é melhor ter a possibilidade da leitura mais fina. É isto que o MCS oferece: um quadro de referência para que se possa produzir leituras suficientemente finas de processos de produção de significados. (LINS, 2012,p.180).

Após a delimitação e reconhecimento desse espaço para que se produza significado, localizamos em sua origem o **núcleo**. Esse elemento está centralizado no interior do campo semântico, onde se localizam verdades incontestáveis (como por exemplo os dados iniciais de um problema). Para que se alcance esse núcleo será necessária a produção de enunciações,

que serão responsáveis pela criação dos **significados de um objeto**, que é tudo aquilo possível de ser argumentado sobre um objeto no interior de uma atividade.

A escolha do MTCS como fundamentação teórico-pedagógica deste projeto, favorece o olhar crítico e aprofundado sobre os elementos que constituem o pensamento algébrico. Encontrar os significados nessas situações possibilitará uma melhor compreensão sobre os desafios do pensamento algébrico, além de incluir o docente em situações de autoconhecimento sobre o seu processo de aprendizagem.

4 METODOLOGIA

Em busca de identificar e problematizar os significados matemáticos e didáticos sobre o pensamento e linguagem algébricos atribuídos por professores dos anos finais do EFI, formamos um grupo participativo de estudos, composto por professores atuantes nos anos finais do EFI e pelos pesquisadores envolvidos neste projeto. A proposta foi da realização de 20 encontros quinzenais ao longo de 2021, tendo sido já realizados 15 deles até o momento da redação deste artigo.

As discussões dos encontros têm como foco: mapear os problemas de ensino e aprendizagem de álgebra; discutir e estudá-los em profundidade - tanto relativamente a conteúdos de álgebra como a metodologias de ensino que tornem a aprendizagem mais significativa; elaborar, com base nas discussões anteriores, propostas de abordagens para sala de aula de tópicos selecionados em conjunto visando que sejam aplicadas nas classes dos professores do grupo; e analisar os resultados obtidos nas práticas desenvolvidas em sala de aula.

Como metodologia de pesquisa nos inspiramos na **Pesquisa-ação**, para a construção dos seminários coletivos, que incluem a leitura e discussão de textos teóricos e de exemplos de práticas coerentes com as teorias estudadas, assim como o incentivo a que as professoras desenvolvam atividades para seus alunos, as apliquem e que façamos uma avaliação conjunta dos resultados obtidos.

Não se sabe com clareza quem foi o criador da Pesquisa-ação, mas sabemos que o primeiro nome a publicar um trabalho sobre esta metodologia de pesquisa foi Lewin (1946). Essa abordagem vem ganhando destaque nos últimos anos principalmente em pesquisas relacionadas à educação. Para Thiollent (2011), esta metodologia pode desempenhar um

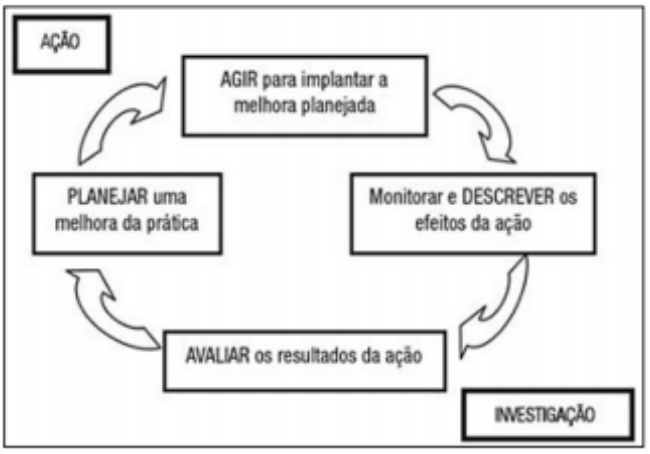
papel importante nos estudos e nas aprendizagens dos pesquisadores em situações de problemas coletivos. A finalidade é fazer com que os envolvidos tenham uma melhora na prática de atuação, que pode ocasionar em uma melhora também em seu ambiente de trabalho.

Essa abordagem de caráter intervencionista, tem seu foco na resolução de questões coletivas, promovendo uma profunda interação entre pesquisadores e sujeitos relacionados à pesquisa. As decisões e caminhos percorridos precisam ser traçados a partir de consenso do grupo que faz parte do estudo.

> [...]um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo (THIOLLENT, 2011, p. 20).

Dentro da Pesquisa-ação não se espera a execução de técnicas ou regras pré determinadas, mas sim um movimento que permita a criação constante de novas ideias para reformulações de soluções anteriormente dadas dentro de situações investigativas. Esse ciclo foi representado em (TRIPP, 2005), no esquema abaixo (Figura 1), reforçando a ideia de que esse processo deve ocorrer recorrentemente durante toda a exploração.

Figura 1 – Pesquisa-ação.



Fonte: TRIPP, 2005, p. 466.

O desenvolvimento deste projeto tem utilizado elementos de Pesquisa-ação, já que os pesquisadores propõem discussões às professoras do grupo formado. Até o momento

mapeamos suas principais dificuldades quanto ao ensino de álgebra nos anos finais do EFI; a partir disso escolhemos textos adequados ao estudo conjunto no grupo, elaboramos propostas de atividades embasadas nos aportes teóricos para serem aplicadas nas salas de aula das professoras. Durante todo o processo as discussões têm partido dos significados atribuídos por essas professoras aos temas propostos, o que já vem proporcionando a elas visões mais abrangentes sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico em suas salas de aula. Dentro dessa abordagem todos os participantes possuem total liberdade de inserir novos elementos e defender suas perspectivas sobre os temas tratados.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como já referido, o ponto inicial dos estudos no grupo se deu pelo mapeamento das ideias fundamentais para o entendimento das dificuldades e desafios encontrados no ensino de álgebra por meio das seguintes perguntas: 1. Para você, o que é pensamento algébrico? 2. Quais suas maiores dificuldades no ensino de álgebra? 3. Como você avalia a importância de se ensinar álgebra nos EFI?

Entendemos como sendo fundamental registrar os conhecimentos desenvolvidos no que se refere ao pensamento algébrico antes do início das discussões. Por meio dessas respostas, estamos acompanhando ao longo dos encontros se houve a aderência de concepções mais abrangentes ou até mesmo alterações nas respostas dadas antes das discussões no grupo. Como era de se esperar, para essa questão tivemos um repertório vasto de definições dadas para o pensamento algébrico, vejamos algumas: “lugar na matemática que desenvolve o pensar, observar e investigar, vem antes das operações”; “é o pensamento das relações estabelecidas por símbolos e números para cálculos segundo regras matemáticas”; ”é um pensamento que generaliza propriedades das operações e a relação de ordem para contextos numéricos ou não”; “compreensão para se chegar em um resultado que não está explícito, seria sobre as diversas letras que possuímos no alfabeto, dentre especificamente x e y”.

Para alguns professores o pensamento algébrico pode ser reduzido como a simples utilização de letras. Essa crença-afirmação identificada logo no início do grupo, nos permitiu perceber a importância de discutir o papel da linguagem algébrica no ensino da álgebra, tendo se tornado esse um dos pilares de destaque nas discussões participativas.

Com relação à segunda questão, sobre os principais desafios no ensino da álgebra, registramos as seguintes contribuições: “dificuldade em fazer o aluno argumentar, fazer relações, desenvolver um raciocínio lógico”; “desenvolver a capacidade de exploração nos alunos; desenvolver um ensino mais significativo para o aluno”; “escutar mais o aluno e dar menos respostas”; “atrair o interesse dos alunos”; “o uso da aritmética na compreensão da álgebra”; “propor o raciocínio abstrato de cálculos e relacioná-los a prática cotidiana”; “os estudantes fazem uma confusão por não saber o significado das incógnitas, abordo a parte geométrica”.

A terceira pergunta estava destinada a coletar as ideias do grupo sobre a importância de ensinar álgebra nos anos iniciais, foram dadas as seguintes respostas: “muito importante. É necessário que os alunos obtenham a compreensão da importância da matemática no dia-a-dia”; “é importante que as crianças pensem sobre o que está por trás das operações matemáticas do que apenas memorizar como os algoritmos devem ser utilizados”; “eu acho super importante, por que você desenvolve nos estudantes um pensamento crítico e investigativo, onde eles desenvolvem suas hipóteses algébricas, construindo o saber, antes mesmo de chegar nas operações”; “é a base. Um pensamento bem estruturado desde o início da vida escolar contribui não somente com a matemática, mas também com outras formas de encontrar soluções e agir em diversas situações”; “para mim ensinar álgebra no fundamental I é a base para que os alunos se apropriem das regularidades matemáticas saibam argumentar, generalizar; necessário, para desconstruir o pensamento de que a matemática é muito difícil”.

O interessante é perceber que diante das concepções iniciais do grupo formado, a importância do ensino de álgebra era uma convicção mais forte das professoras do que a compreensão sobre a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico na formação dos estudantes. Análises mais aprofundadas serão feitas após a finalização da pesquisa com o grupo participativo. Até o presente momento realizamos quinze encontros com esse grupo, e os resultados finais serão divulgados na conclusão da dissertação do Mestrado Profissional em Ensino da Matemática que está em curso.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, DF: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 de janeiro de 2021.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

CARRAHER, D. W. et al. Arithmetic and algebra in early mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education**, n. 37, p. 87-115, 2006.

DANYLUK, O. S. **Alfabetização matemática:** o cotidiano da vida escolar. 1. ed. [S.l.]: 1993.

DUARTE, N. **Vigotski e o "aprender a aprender":** crítica às apropriações neoliberais e pósmodernas da teoria vigotskiana. Campinas, SP: Autores Associados, 2011.

KAPUT, J. BLANTON, M. L.; MORENO, Algebra from a symbolization point of view. *In*: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.). **Algebra in the Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

LEWIN, K. Action research and minority problems. **Journal of Social Issues**, n. 2, p. 34-36, 1946.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. 1992. 330 f. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK: 1992.

LINS, R. C. O modelo dos campos semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. *In*: ANGELO, C. L. et al. (Orgs). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática:** 20 anos de história. 1. ed. São Paulo: Midiograf, 2012, v. 1, p. 10-20.

LINS, R. C; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o Século XXI**. 4. ed. Campinas: Papirus Editora, 1997.

PONTE, J. P., et. al. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação: DGIDC, 2007.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. *In*: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION - PME, 28., Mérida México, 2006. **Proceedings** [...]. Bergen University College. v. 1, 2006.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *In*: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN

MATHEMATICS EDUCATION, 6., 2009, Lyon. **Proceedings** [...]. Lyon, França: Institut Français de l'Éducation, 2009. Disponível em: www.inrp.fr/editions/cerme. Acesso em 18 set. 2021.

SCHWANTES, Vilson. Uma reflexão sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico discente no Ensino Fundamental. *In*: SANTIAGO, Anna Rosa Fontella (org.). **Educação nas ciências**: pesquisas discentes 2003. Ijuí, RS: Editora Ijuí, 2004. p.497-518.

THIOLLENT, Michel. **Metodologia da pesquisa-ação**. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

TRIPP, David. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. **Educação e Pesquisa**, v. 31, n. 3, p. 443-466, 2005.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

Área e perímetro: Concepções de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.. **6**
Fernando Siqueira Vieira Lima, Vera Helena Giusti de Souza

Conceitos básicos de probabilidade e estatística no ensino fundamental apresentados usando um jogo de búzios..... **24**
Regina Mariko Nakano, Viviana Giampaoli

As práticas pedagógicas em Geometria: reflexões de futuros professores de Matemática..... **35**
Francisco Lucas Nascimento de Souza, Bárbara Corominas Valério

Um estudo comparativo sobre as atuais propostas curriculares nacionais de Matemática do Ensino Médio brasileiro e da Educación Secundaria argentina **52**
Ricardo Angelo Monteiro Canale, Viviana Giampaoli

Investigações Matemáticas: Convite para o Ensino de Geometria **86**
Beatriz Lopes Roldão, Claudia Cueva Candido

Ensino de sequências e séries geométricas no Ensino Médio - uma abordagem com várias representações semióticas..... **109**
Rodrigo Martins Lopes, Vera Helena Giusti de Souza

Uma abordagem de ensino de matemática por meio de resolução de problemas de engenharia mecânica **131**
Valter Firmino da Silva Junior, Bárbara Corominas Valério

Números Reais: uma proposta de abordagem para o Ensino Fundamental..... **140**
Érika Dudr Pereira, Vera Helena Giusti de Souza

O raciocínio correlacional: uma proposta de desenvolvimento a partir do ensino-aprendizagem de modelos de regressão linear no Ensino Médio..... **161**
Thiago Dutra de Araújo, Viviana Giampaoli

Pensamento e Linguagem Algébricos: um olhar sobre a produção de significados matemáticos e didáticos nos anos finais do Ensino Fundamental I..... **178**
Vinicius Henrique Sbaiz, Iole de Freitas Druck

ISBN 978-659942521-9