ANAIS

3º Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Antonio Carlos Brolezzi
Ricardo Bianconi
(Org.)

São Paulo
IME-USP
2017

Organizadores

Antonio Carlos Brolezzi
Ricardo Bianconi
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Rua do Matão, 1010
05508-090 – São Paulo, SP

FICHA CATALOGRÁFICA

E56 Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (3.: 2016: São Paulo, Brasil).

Anais do 3º Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, São Paulo, SP, Brasil, 27 e 29 de setembro de 2016, [orgs.] Antonio Carlos Brolezzi e Ricardo Bianconi. São Paulo : IME-USP, 2017.

66 p.

ISBN: 978-85-88697-33-1

Disponível em: <http://www.ime.usp.br/posempmat/3encontro>

1. Matemática - Estudo e Ensino (Congressos). I. Brolezzi, Antonio Carlos, org. II. Bianconi, Ricardo, org. III. Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo.

CDD: 510.7

Elaborada pelo Serviço de Informação e Biblioteca “Carlos Benjamin de Lyra do IME-USP”

3º ENCONTRO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA - 2016

APRESENTAÇÃO

O programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (MPEM) do IME-USP iniciou suas atividades em agosto de 2012. Seu objetivo é contribuir para o ensino de matemática na educação básica, complementando a formação do professor.

O 3º Encontro do MPEM foi realizado nos dias 27 e 29 de setembro de 2016 e contou com a participação de estudantes e orientadores. O encontro proporcionou uma reflexão sobre as atividades e a produção acadêmica desenvolvidas no programa.

Os estudantes, em fase adiantada no trabalho de dissertação, se inscreveram para apresentar seus resultados. Para este encontro recebemos seis inscrições e organizamos as apresentações em comunicações orais de 30 minutos cada, incluindo o tempo de comentários e discussão. O ambiente participativo de todos os presentes contribuiu para que os apresentadores recebessem inúmeras sugestões para a continuidade de sua pesquisa. Também, para os estudantes presentes que não apresentaram trabalho, foi uma oportunidade para buscar temas e ideias para o desenvolvimento de suas dissertações.
O encontro foi encerrado com uma plenária, de estudantes e orientadores, discutindo diversos aspectos do programa. Entre os assuntos tratados tivemos: avaliação do programa, esclarecimentos sobre questões regimentais, relação de disciplinas oferecidas, oferta de disciplinas no verão, prazos e exames regimentais, criação de um seminário periódico do programa, formação de grupos de estudo, etc.

Nos anais trazemos os trabalhos dos 5 primeiros que se apresentaram, sendo que o primeiro em forma de texto e os demais 4 em forma de apresentações em slides, sendo as 3 últimas antecedidas de resumos. Tanto no texto quanto nas apresentações mantivemos o que foi entregue pelos alunos.

Agradecemos a contribuição de todos os participantes.

Antonio Carlos Brolezzi e Ricardo Bianconi
Organizadores – Agosto de 2017

CRONOGRAMA DE ATIVIDADES

Auditório Jacy Monteiro - Bloco B do IME-USP

Terça-feira (27/set/2016)

14h00 Abertura
14h10 Apresentações - parte I
Nilo Gonçalves Barbedo (*Oscar João Abdounur*)
Título: "Resolução Resolução de Problemas: estudo de alguns casos".
Ana Olivia Ramos Pires Justo (*Marcos N. Magalhães*)
Título: "Ensino de Estatística por meio de jogos".
Fabiana de Souza Bomfim (*Antonio Carlos Brolezzi*)
Título: "História da Matemática e cinema: o caso da criptografia".
15h30 Café e Lançamento de livro:

TREVIZAN, W. A., BROLEZZI, A. C. Como ensinar análise combinatória.

São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016

16h00 Reuniões paralelas:
a) Estudantes (Aud. Jacy Monteiro)
b) Orientadores (sala B1)

Quinta-feira (29/set/2016)

14h00 Apresentações - parte II
Rodrigo Ruiz Campos (*Antonio Carlos Brolezzi*)
Título: "Desenvolvendo a capacidade de argumentação e demonstração dos alunos do Ensino Médio".
Cynthia Militão Domingos (*Ana Paula Jahn*)
Título: "Ensino Ensino e aprendizagem de Geometria Analítica: uma experiência com coordenadas e distâncias no plano e no espaço".

Paola BurgattMeneghesso (*Bárbara Corominas Valério*)
Título: "Atividade de investigação nos currículos de Matemática do Ensino Fundamental 2".
15h30 Intervalo - Café
16h00 Reunião geral:
Informes gerais;
Avaliação do programa, sugestões e críticas.

Nilo Gonçalves Barbedo (*Oscar João Abdounur*)
Título: "Resolução Resolução de Problemas: estudo de alguns casos".

Resolução de problemas no fim da escolarização básica. Estudo de alguns casos.

Nilo Gonçalves Barbedo

Orientador: Prof. Dr. Oscar João Abdounur.

Resumo

Barbedo, N.G.**Resolução de problemas no fim da escolarização básica. Estudo de alguns casos.**

67 f. Dissertação (mestrado)- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Este trabalho trata do comportamento de jovens secundaristas de uma escola da rede estadual paulista no que concerne as estratégias e heurísticas observáveis que praticam diante de determinados problemas de matemática. Busca identificar algumas das heurísticas e estratégias clássicas que os educandos praticam e não praticam.

A investigação se dá por meio de apresentação de problemas contextualizados que prescindem de conhecimentos matemáticos elaborados à estudantes secundaristas e em seguida, de análise dos processos de resolução realizados pelos estudantes na tentativa de resolver os problemas. Também é apresentado subsidio teórico e problemas adequados à reprodução parcial dessa investigação quando interessar ao professor de matemática da educação básica ou pesquisador em resolução de problemas.

Palavras-chave: Heurística, resolução, problema, escola.

Abstract

This work deals with high school youth behavior of a public school of São Paulo state with regard to the strategies and heuristics they use in dealing with certain problems in mathematics. It tries to identify some of the classical heuristics and strategies that students make use of or not.

The research is carried out through the presentation of contextualized problems, in which high school students do not need elaborate mathematical knowledge. It is followed by the analysis of the processes used by students in the attempt to solve the problems.

It is also presented theoretical subsidies and problems appropriate to the partial reproduction of this investigation in case it is of interest of a mathematics teacher of basic education.

Key-words: Heuristics, solve problems, school cultire.

Introdução

Considerando que é finalidade inalienável da educação básica brasileira assegurar a formação necessária ao exercício da cidadania, progresso profissional e acadêmico (LDB, Título V[1], capítulo 2, seção I, art.22) e considerando que os problemas (eventualmente matematizáveis) que emergem destes elementos são em certa medida imprevisíveis, não é conveniente que a educação básica forneça subsídios intelectuais que permitam somente a resolução de problemas já visitados pelos educandos. É adequado que o sujeito termine a educação básica dispondo o quanto possível da competência de resolução de problemas inesperados, imprevistos. É consensual entre os educadores que é desejável que o estudante termine a educação básica com sua habilidade de resolução de problemas matemáticos desenvolvida.

Diversos estudiosos da matemática e do ensino da matemática defendem a importância da resolução de problemas e consequentemente do estudo dessa área. Em PEHKONEM, NAVERI E LAINE, p.11 2013, é considerada a importância da resolução de problemas não só como finalidade da escolarização, mas também como método de ensino de matemática, o ensino de matemática através da resolução de problemas. A importância do desenvolvimento da competência em resolução de problemas e a aplicação da resolução de problemas no ensino de matemática também é mencionada em LESTER, 1992, p. 246. Em Introdução ao estudo das situações didáticas, conteúdos e métodos(BROUSSEAU, 2007) as situações de aprendizado envolvem sempre a resolução de problemas (pre determinados ou a determinar). Em suma, não é

[1]

difícil encontrar autores que investigam ensino de matemática e que defendem a importância da competência da resolução de problemas.

As legislações (federal, municipal e estadual) incluem o desenvolvimento da competência em resolução de problemas entre as finalidades dos diferentes níveis de ensino.

Assumindo então a competência em resolução de problemas como uma importante finalidade da educação básica, e considerando que o ensino de matemática se beneficia com o aprofundamento ou diversificação do conhecimento sobre o tema, portanto é relevante a investigação dessa área do conhecimento.

Sendo assim, a finalidade do presente trabalho é verificar se um conjunto de educandos do final da educação básica usamheurísticas convencionais[2] e no caso de usarem, identifica-las, ou seja, observar o comportamento e eventualmente identificar as estratégias e heurísticas que um determinado conjunto de educandos do 3° colegial de uma escola estadual paulista se valem ao enfrentar certo conjunto de problemas que prescindem de conhecimento escolar elaborado. Também é desejado identificar quais heurísticas não compõem os repertórios desses educandos, quais heurísticas estes não estão familiarizados. Também é desejado oferecer ao professor dos estudantes secundaristas ou a quem interesse uma aproximação do panorama das habilidades de determinados alunos e alunas da rede de ensino paulista (estadual e particular) no que tange à resolução de problemas de matemática[3], apresentar problemas de matemática que possam ser usados no ensino ou na investigação a cerca da competência em resolução de problemase um método para que possam inferir as condições dos seus próprios alunos.

Para investigar a maneira de resolver dos alunos, os problemas apresentados são de fundamental importância e portanto a escolha destes deve ser criteriosa.

A escolha dos problemas:

A escolha dos problemas que são apresentados aos alunos deve ser cuidadosa já que uma escolha ruim pode acarretar a impossibilidade da investigação da maneira de resolver do

[2] Mais adiante são apresentadas as heurísticas chamadas clássicas.

[3] O termo *problema* será esclarecidoadiante e por enquanto deve-se entende-lo em seu sentido corrente.

estudante. Assim, foram adotados alguns critérios de escolha dos problemas. Critérios estes que confiram aos problemas selecionados características que favoreçam a compreensão do problema por parte do aluno e estimulem a exposição de suas habilidades de resolução.

Em Task variable in problem solvingsão atribuídos conjuntos de variáveis aos problemas (variáveis tarefa), variáveis estas que afetam o ato de resolução do problema de muitas formas (GODIN, MCCLINTOCK, 1979).

Na escolha dos problemas foram consideradas algumas destas variáveis para que seja possível selecionar ou adaptar problemas com as características desejadas. O desenvolvimento e apresentação de toda teoria foge do escopo deste texto, mas tais variáveis e a razão do controle das mesmas serão mencionadas ao longo do texto.

Segue algumas das variáveis consideradas para a escolha dos problemas todas obtidas a partir de Taskvariable in problemsolving (GODIN, MCCLINTOCK, 1979):

Variáveis de sintaxe: Estão ligadas à estrutura gramática da língua e são associadas ao nível de dificuldade de compreensão dos enunciados. Um exemplo desse conjunto de variáveis é o número de palavras não familiares ao individuo que pretende resolver o problema.

Conteúdo: Mesmo considerando um problema que surge ocasionalmente de alguma demanda concreta, este é eventualmente passível de alguma abordagem matemática e por vezes existem abordagens mais factíveis que outras quando consideramos que tal abordagem será feita por um aluno secundarista.

As variáveis de conteúdo referem-se ao conteúdo associado à abordagem do individuo sobre o problema.

Contexto: Sobre o contexto temos em Taskvariables in problemsolving: O Contexto remete ao significado não matemático ou situação que o enunciado refere e o contexto pode variar entre dimensões como concreto/ abstrato, aplicação/ teoria, factual/hipotético. (KULM, 1979).

As categorias de variáveis de contexto incluem aquelas que fazem do problema mais ou menos relevantes para o interesse do sujeito que pretende resolver o problema.

Variáveis de estrutura: As variáveis de estrutura são de definição mais complicadas que as variáveis de sintaxe, conteúdo e conteúdo. Em The classificationofproblemsolvingrecearchvariables temos [...]as variáveis de conteúdo e de sintaxe requerem pouco ou nenhum processamento do enunciado do problema, o contrário do que ocorre com as variáveis de estrutura[...] o termo estrutura refere-se ao arranjo e relações entre todos os elementos do problema[...] (KULM, 1979. p. 18).

Assim, a definição da estrutura de um problema depende também do individuo que vai defini-la, tendo assim um caráter um tanto subjetivo. Uma vez determinada as variáveis de estrutura do problema, estas compõem um mecanismo mais concreto, palpável, objetivo.

Em Variáveis de tarefa na resolução de problemas é citado Kulm[4]:

[...] é possível obter uma estrutura (que não é necessariamente única) bem definida de um problema atendendo que um problema converta-se num conjunto bem definido de regras de procedimentos operacionais, explícitas no próprio problema ou percebidas a partir do enquadramento matemático...”(KULM apud Leitão, Fernandes e Cabrita, 1982, p.111).

O espaço estado de um problema é um exemplo de um aspecto estrutural de um problema:

Considere o seguinte problema:

Estás junto a um rio com dois baldes. O primeiro leva exatamente três litros de água, o segundo, precisamente cinco litros e os baldes não estão marcados para medir de outra forma. Enchendo ou esvaziando os baldes, ou transferindo água de um para o outro, encontra forma de levar exatamente quatro litros de água do rio.[5]

Um estado pode ser representado por um par (não ordenado) de números designando o número de litros em cada um dos baldes. O par (0,0) traduzirá então o estado inicial. O estado objetivo é qualquer estado da forma (x,4) ou (4,x) sendo x um número natural.

O estado espaço do problema poderá ter a seguinte configuração:

---

[4]Kulm, 1979.
[5](LEITÃO, FERNANDES E CABRITA, 1994, p. 111).

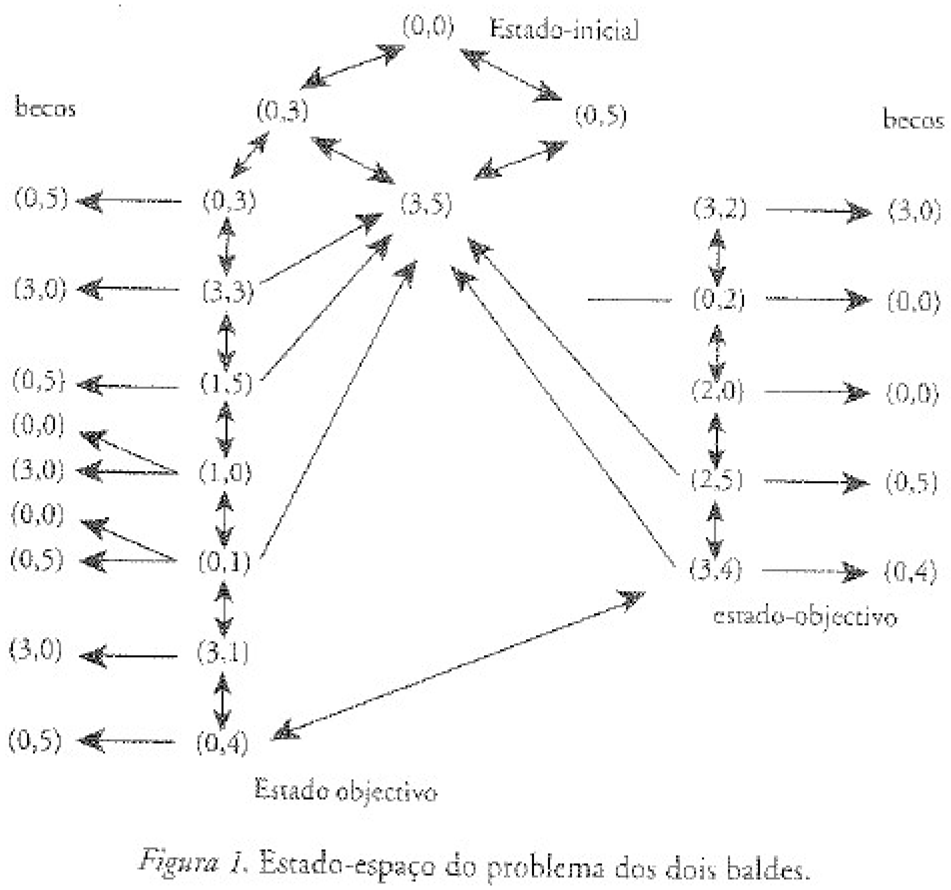


Figura 3 – Esquema das ações possíveis relacionadas ao *estado espaço* do problema dos baldes.

(LEITÃO, FERNANDES E CABRITA, 1994, p. 112)

Levando em consideração as variáveis acima (sintaxe, conteúdo, contexto e de estrutura) foram escolhidos os seguintes problemas (sempre no sentido de o problema ser compreendido e permitir os processos de resolução que deseja-se investigar) para que fossem apresentados aos educandos:

O problema abaixo foi inspirado em um problema que consta em Círculos matemáticos A experiência russa, da seção principio da casa dos pombos:

1) Um saco contém muitas conchas, de cinco cores diferentes: Branca, preta, verde, amarela e azul.

Qual o menor número de conchas que precisam ser retiradas do saco (sem olhar) de modo que possamos garantir que duas das conchas retiradas sejam da mesma cor?[6]

O seguinte problema foi extraído de um artigo de PEHKONEM, NAVERI E LAINE, 2013 chamadoOnteachingproblemsolving in schoolmathematics:

3)Divida um quadrado em duas peças idênticas. De quantas maneiras diferentes você pode fazer esta divisão? Faça uma anotação de sua solução.[7]

O próximo problema foi extraído de Elementsof a theoryofproblemsandproblemssolving de WICKELGREN.

5)Cada dia, Abe ou vai a pé ao trabalho e volta para casa em sua bicicleta ou vai de bicicleta para o trabalho e volta para casa a pé. De qualquer forma, a ida e volta toma 1 hora. Se ela fosse de bicicleta e voltasse, o caminho de ida e volta tomaria 30 minutos. Quanto tempo o percurso tomaria se Abe fosse e voltasse a pé?[8]

O próximo problema também consta em Elementsof a theoryofproblemsandproblemssolving de WICKELGREN).

6)Nove homens e dois meninos querem atravessar um rio, usando um bote inflável que é capaz de carregar um homem ou dois meninos, como eles devem fazer para transportar todos ao outro lado do rio?[9]

O próximo problema foi adaptado do banco de questões OBMEP 2014.

7) Quando dez pessoas se encontram e todas as pessoas cumprimentam-se com um aperto de mãos, quantos apertos de mãos ocorrem? (considerando que quando duas pessoas se cumprimentam, ocorre um aperto de mãos).[10]

O próximo problema foi extraído de Círculos matemáticos, a experiência russa(**DIMITRI**, F., **GENKIN**, S., **ITENBERG**).

[6]DmitriFomin, IliaItenberg e Sergey Genkin (2012, p.?).
[7](PEHKONEN, NAVERI, 2013, p. 16).
[8] WICKELGREN,1974, p. 104).
[9]WICKELGREN,1974, p. 98.
[10] Banco de questões OBMEP 2014, p. 57.

8) O elevador de um prédio de 20 andares tem dois botões. O elevador sobe 13 andares quando se aperta o primeiro botão e desce 8 andares quando se aperta o segundo (um botão não funciona se não existem andares suficientes para subir ou descer). Como podemos chegar ao oitavo andar partindo do décimo terceiro?[11]

O próximo problema é uma adaptação do problema 37 do Banco de questões OBMEP 2011.

9)Temos 25 moedas aparentemente iguais, mas sabemos que exatamente uma delas é falsa e tem o peso diferente do peso das outras. Não sabemos qual é a moeda falsa. Todas as outras 24 moedas possuem o mesmo peso.[12]

Figura 17 – Ilustração de uma balança de dois pratos.

Explique como determinar se a moeda falsa é mais leve ou pesada que as outras usando o mínimo de pesagens que conseguir.

O problema 11 foi extraído de *Círculos matemáticos, a experiência russa* (**DIMITRI**, F., **GENKIN**, S., **ITENBERG)**.

11)Durante um julgamento no País das Maravilhas, a Lebre de Março afirmou que os biscoitos foram roubados pelo Chapeleiro Maluco. Depois o Chapeleiro Maluco e o Rato Silvestre testemunharam, mas, por alguma razão, seus testemunhos não foram julgados. Descobriu-se mais tarde durante o julgamento que os biscoitos foram roubados só por um dos réus e que, além disso, só o culpado falou a verdade. Quem roubou os biscoitos?[13]

O seguinte enunciado foi adaptado de uma situação presente em Taskvariables in problemsolving *(***GODIN**, G. A., **MCCLINTOCK**, E.).

[11] FOMIN, ITENBERTG, GENKIN,2012, p. 73.
[12] Banco de questões OBMEP 2011, p. 24.
[13]DmitriFomin, IliaItenberg e Sergey Genkin (2012, p.72).

12)Duas garotas estão vendendo doces (que são muito baratos). Elas têm um real e sete centavos em troco para começar, tudo em moedas. O primeiro freguês diz que antes que ele possa comprar qualquer coisa, ele precisa trocar 50 centavos. Uma das garotas, olhando para a caixa de troco diz que não tem troco. O freguês pergunta se elas podem trocar 25 centavos. A resposta foi não. O freguês pergunta se elas têm troco para 10 centavos. A resposta é não de novo. As garotas dizem que têm sete moedas no total mas não podem trocar qualquer moeda. Quais são as moedas que as garotas têm?

Obs: Nosso sistema monetário tem moedas de 1, 5, 10, 25, 50 centavos e de 1 real.[14]

Seguem as heurísticas e comportamentos que estão entre os processos, ações e atitudes cuja ocorrência dentro do processo de resolução do educando desejamos verificar (retiradas de Taskvariables in problemsolving *(***GODIN**, G. A., **MCCLINTOCK**, E.) mas definidas anteriormente em **POLYA**, G. How Solve It:

1. Analogia
2. Elementos Auxiliares
3. Problemas Auxiliares
4. Decomposição e Recombinação
5. Generalização
6. Indução e Indução Matemática
7. Redução ao Absurdo, Prova Indireta.
8. Especialização
9. Variação do Problema
10. Trabalhando para Traz.
11. Desenho de figuras, esquemas ou tabelas.
12. Identificar o que é desejado e o que é dado.

[14] GODIN e McCLINTOCK, 1979, p. 364.

13. Verificação da solução.

Obtenção dos dados

Existem obstáculos técnicos relevantes quando é desejado descobrir como o educando pensou para formular a solução:

> [...] emergem quatro fenômenos potencialmente diferentes que importa considerar:
> 1. Aquilo que o aluno diz ou escreve.
> 2. Aquilo que o aluno quer significar ou está a pensar.
> 3. A forma como o investigador interpreta o que apreende ou percebe.
> 4. A forma como o investigador faz corresponder uma categoria (codificando ou atribuindo um símbolo) à interpretação que faz.
>
> (FERNANDES, BORRALHO E AMARO, 1994, p. 42 apud Lucas[15]).

A intenção da escolha do método de obtenção dos dados é mitigar as diferenças entre os fenômenos numerados acima.

Alguns métodos são recomendados para obter as informações sobre a maneira de pensar dos educandos:

Introspecção: Em resumo, essa técnica consiste em solicitar que o aluno relate seus processos mentais ao longo da resolução do problema. Essa técnica tem uma série de pontos delicados. Um deles é saber a natureza e extensão da interferência do fato do aluno relatar o que está pensando sobre a resolução.

Retrospecção: É solicitado que o aluno relato como pensou após resolver o problema. Uma das maiores dificuldades desse método é a dificuldade do aluno relatar com precisão os processos de que se utilizou.

Pensar alto: É desejado que o aluno fale em voz alta o que está pensando. Tem a vantagem de não exigir que o aluno faça uma análise do seus processos mentais mas a fala pode inibir o pensamento e vice versa, também, o pensamento pode se dar de maneira mais rápida que a capacidade de relata-lo e é possível que o estudante fique em silêncio exatamente nos momentos de maior atividade intelectual. (Fernandes, Borralho e Amaro, 1994, p. 44).

[15] Lucas, 1980.

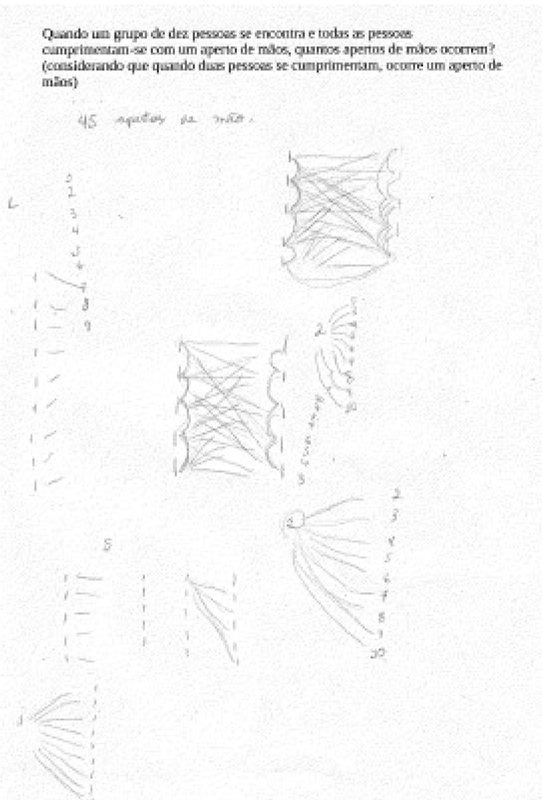
Na presente pesquisa foram adotados dois métodos simultaneamente: Retrospecção (foram gravadas as falas dos alunos sobre cada problema quando os registros escritos eram considerados insuficientes) e uma variação da introspecção: Foi solicitado ao aluno que registre com papel e caneta, com maior riqueza de detalhes possível sua resolução, durante a própria resolução. Espera-se que a combinação destes métodos possibilite a apreensão da maneira de pensar do educando, com alguma fidelidade. Além desses métodos, o pesquisador acompanhou todas as resoluções e registrava qualquer fato que julgasse relevante durante as resoluções.

Foi solicitado aos alunos que tentassem resolver os problemas e que registrassem com o máximo de detalhes o que estavam pensando ao resolverem.

Segue algumas resoluções e suas análises.

Registros dos educandos e análises

Resolução do problema 7.



Material digitalizado 6 – Registro escrito da resolução de Lucas do problema 7.

O educando apresenta indícios de que compreendeu o que o problema solicita já que apresenta respostas desde o inicio (que são incorretas, mas que são compatíveis com a resposta esperada, da mesma natureza e da mesma ordem de grandeza). Também lida com todas as informações relevantes do enunciado, dando pistas que entendeu o problema (o que é solicitado e o que é dado).

No inicio, responde que ocorrem 50 cumprimentos sem mais registros escritos. Argumenta (gravação em áudio[16]) que cada pessoa faz 10 cumprimentos o que resultaria em 100 cumprimentos mas que quando duas pessoas se cumprimentam, deve se considerar que houve apenas um cumprimento e então divide 100 por 2, obtendo 50.

Ao explicar verbalmente como pensou, percebe que cada pessoa realiza somente 9 cumprimentos (com ajuda de problematização que o autor introduziu em diálogo). O estudante fica confuso e pede mais tempo para pensar.

Em seguida o aluno diz que houve 9X9 cumprimentos. O resultado é questionado e o aluno reconsidera dizendo que o número gerado pela situação observada é 90.

Em seguida, após ter solicitado auxilio do pesquisador, conversando com a colega que também resolvia os problemas propostos (embora tenha sido solicitado que não se comunicassem), consideram a situação em que precisam contar os cumprimentos que haveriam entre os três presentes na sala (variação do problema[17]), mas tal atitude foi influenciada pelo auxilio de pesquisador e portanto não ocorreu espontaneamente.. Não considera todas as consequências dessa abordagem e volta a pensar sozinho sobre o problema.

Nota-se que o registro não é bem explicado ou organizado mas é possível observar que o estudante divide o grupo de dez pessoas em dois grupos de 5 pessoas. Tenta descobrir o número de cumprimentos que ocorrem entre esses dois grupos e depois o número de cumprimentos que ocorrem no interior de cada um dos grupos de 5 pessoas (ou seja, organiza-se para exaurir os casos).

Caracteriza-se a heurística chamada problema auxiliarjá que o educando substitui o problema original por outros três problemas, cada um mais simples que o original e que suas soluções dão informações relevantes pra resolver o original.

Em uma das contagens obtém 44 cumprimentos. Refaz a contagem e obtém 46 cumprimentos. Ou seja, chega muito perto da solução correta (45 cumprimentos) e o erro provavelmente está relacionado ao esboço, a figura confusa desenhada pelo estudante.

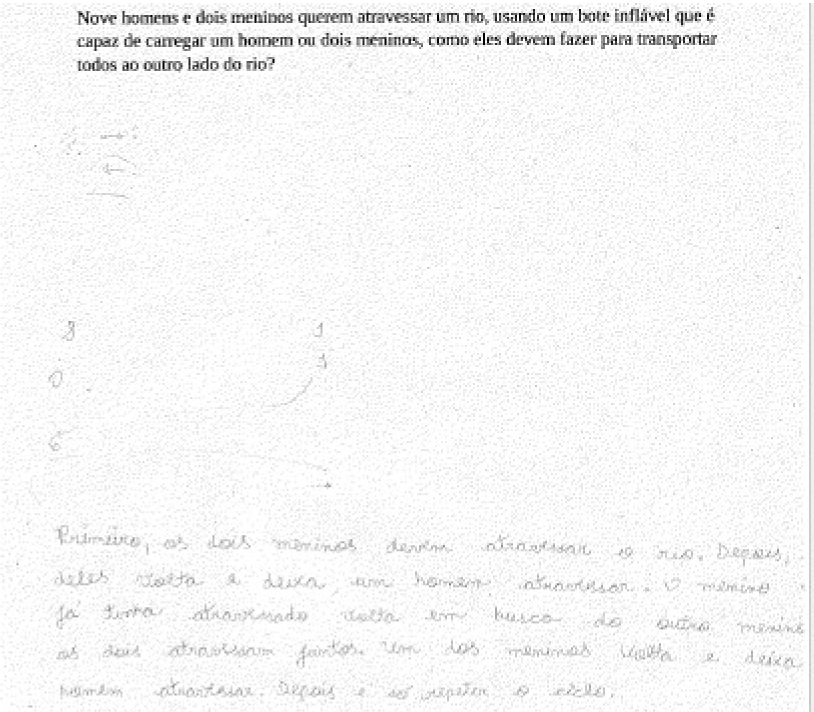
---

[16] Áudio Lucas p.7.
[17] A definição desta heurística está na página 26.

Observa-se que o estudante segue uma estratégia: Dividir o problema em outros mais simples e tenta resolve-los e articular os resultados (problemas auxiliares). Nota-se também que o estudante recorre à representações esquemáticas da situação.

Ao fim, conclui que foram realizados 45 cumprimentos considerando que cada aluno cumprimenta 9 vezes, o que resultaria 90 cumprimentos mas divide o resultado por 2, resultando em 45 cumprimentos mas a essa altura, o estudante já tinha tomado conhecimento que a colega que também resolvia o mesmo problema chegou no número 45.

Resolução do problema 6:



Nove homens e dois meninos querem atravessar um rio, usando um bote inflável que é capaz de carregar um homem ou dois meninos, como eles devem fazer para transportar todos ao outro lado do rio?

Primeiro, os dois meninos devem atravessar o rio. Depois, deles volta e deixa um homem atravessar. O menino já tinha atravessado volta em busca do outro menino os dois atravessam juntos. Um dos meninos volta e deixa homem atravessar. Depois é só repetir o ciclo.

Material digitalizado 7 – Registro escrito da resolução de Lucas do problema 6.

O educando dá sinais de que compreendeu o enunciado (já que as ações que realiza são todas no sentido de obter a resposta esperada).

Lucas diz no inicio da resolução que já havia resolvido problema semelhante.

Apresenta solução organizada e correta mas verbalmente. É solicitado que registre sua solução na folha do enunciado. Assim, entende-se que Lucas não se utilizou de esquemas de representação ou qualquer registro para elaborar sua solução.

Considerando que o aluno enfatiza que já havia resolvido problema semelhante, é possível admitir que usou a heurística problemas correlatos[18]. É difícil imaginar uma resolução que não remeta de alguma forma à outra resolução. A heurística problemas correlatos ocorre muitas vezes de maneira não observável.

Depois de observada a resolução do estudante, foi questionada a razão pela qual sua primeira ação foi atravessar os dois meninos. Foi perguntado: por que não atravessar primeiro um homem?

Lucas dá pistas de que seria totalmente improdutivo atravessar um homem dando a entender que fez uso do raciocínio por absurdo,pois considerou a travessia de um homem para em seguida concluir que o resultado disso seria insatisfatório.

Na resolução e fala de Lucas é possível inferir que fez uso de redução ao absurdo, uso de problema correlato e também indução[19] já que em vez de fazer todas as ações necessárias para a travessia de todo o grupo, percebe que consegue criar as condições para atravessar um homem e em seguida ter o bote do lado oposto à este homem e então sugere que este processo deve ser repetido até atravessar todos os homens para o lado desejado.

Resolução do problema 5.

5)Cada dia, Abe ou vai a pé ao trabalho e volta para casa em sua bicicleta ou vai de bicicleta para o trabalho e volta para casa a pé. De qualquer forma, a ida e volta toma 1 hora. Se ela fosse de bicicleta e voltasse, o caminho de ida e volta tomaria 30 minutos. Quanto tempo o percurso tomaria se Abe fosse e voltasse a pé?

Dividindo a ida e volta de bicicleta
é igual 15 min na ida e 15 min na volta

Por isso da para saber que a pé ela
gasta 45 min

É somando 45 min na ida e na volta
é igual a 90 min

Material digitalizado 28 – Resolução de Nadyne do problema 1.

[18] Trata-se do uso do método de resolução ou de algum resultado de algum problema já resolvido pelo individuo.

[19] A definição está na página 39.

Nadyne dá sinais de que entendeu o que o problema solicita e também compreendeu os dados do problema.

O registro da educanda é bastante organizado e sucinto (o que sugere o registro de uma resolução já idealizada). É possível inferir que tenha usado a heurística problemas auxiliaresjá que chega à solução por meio de problemas que embora não explícitos no enunciado, constituem informações suficientes para chegar na solução do problema proposto.

Considerações finais

Pretende-se com a análise de outros registros de soluções desses e de outros problemas, destes e de outros estudantes, com base em literatura pertinente, inferir as principais lacunas nas competências em resolução de problemas de matemática assim como identificar os aspectos positivos das performances dos educandos.

Referências bibliográficas:

BRUSSEAU, Guy. Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo. Ática, 2008.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. e **GASCÓN**, J. Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

DIMITRI, F., **GENKIN**, S., **ITENBERG**, I. Círculos Matemáticos, a experiência russa. Tradução: IMPA, Rio de Janeiro. IMPA, 2014.

FERNANDES, D., **BORRALHO**, A., **AMARO**, Processos de resolução de problemas: Revisão e análise crítica de investigação que utilizou esquemas de codificação in **FERNANDES**, D., **BORRALHO**, A., **AMARO**, Resolução de problemas, processos cognitivos, concepção de professores e desenvolvimento curricular. Lisboa:IIE/SEM-SPCE, 1994.

GODIN, G. A., **MCCLINTOCK**, E. Task variable in problem solving. Georgia,

Georgia Center for the study of learning and teaching mathematics, 1979.

PEHKONEN, E., **NAVERI**, L., **LAINE**, A. On teaching problem solving in: school mathematics, CEPS Journal, Vol. 3, n°4, 2013.

POLYA, G. How Solve It, Tradutor: Heitor Lisboa de Araujo, Rio de Janeiro, Interciencias LTDA, 1975.

WICKELGREN, W.A. How to solve problems, elements of a theory of problem solving.New York, W.H. FREEMAN AND COMPANY, 1974.

Título: "Resolução Resolução de Problemas: estudo de alguns casos".
Ana Olivia Ramos Pires Justo (*Marcos N. Magalhães*)

Ensino de Estatística por meio de jogos

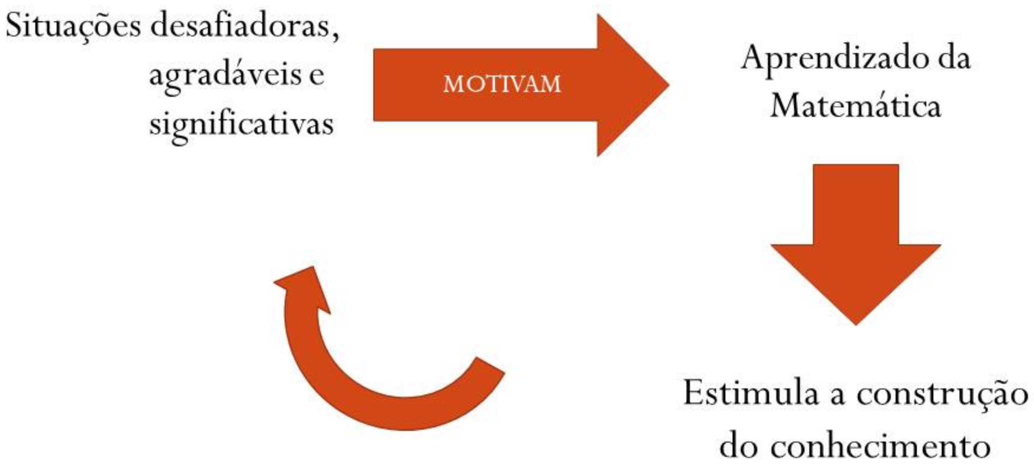
Projeto de Mestrado

Ana Olívia Ramos Pires Justo

Matemática escolar

- Desenvolvimento de competências;
- Busca de alternativas;
  - Conhecimento significativo;
  - Benefícios para o aprendiz.

Matemática escolar



Matemática escolar

Em relação a Estatística, o PCN (BRASIL, 2002) destaca que nas aulas de matemática o tema proposto deve ir além da simples descrição e representação de dados, atingindo a **investigação** sobre esses dados e a **tomada de decisões**.

Objetivo

- Descrever e analisar as contribuições do uso de jogos, desenvolvidos para o ensino de Estatística, presentes na literatura.
- Desenvolver uma proposta didática por meio da criação e do uso de um jogo que contribua para a aprendizagem de Estatística, em particular, na abordagem dos conceitos de medidas de posição e de dispersão.
- Aplicar e analisar as contribuições que o jogo proporcionou a aprendizagem e/ou fixação dos conceitos estatísticos envolvidos.

Justificativa

- PCN (BRASIL, 1998): os jogos propiciam a simulação de situações-problemas o que estimula o planejamento das ações.
- PCN (BRASIL, 2000): os jogos desenvolvem habilidades específicas para a resolução de problemas, além do pensamento matemático.
- Borin (2007): os jogos desenvolvem o raciocínio lógico, podem diminuir os bloqueios que alguns alunos apresentam em relação ao Ensino de Matemática.

Justificativa

Borba e Penteado (2001); Kleine (2014); Prensky (2010)

- Jogos podem motivar a atitude dos alunos em relação a aprendizagem.
- O enredo e os personagens do jogo podem ser construídos usando conceitos e problemas de uma disciplina.
- A utilização de jogos para o ensino favorece a criação de ambientes motivadores.

Vygotsky (1994)

- Os jogos potencializam a zona de desenvolvimento proximal.

Educação Estatística

- *Letramento estatístico*

  Relativo à informação estatística, que o estudante possa:

  - interpretar e avaliar criticamente;

  - discutir e falar suas opiniões a respeito.

Educação Estatística

- *Letramento estatístico*

  Relativo à informação estatística, que o estudante possa:

  - interpretar e avaliar criticamente;

  - discutir e falar suas opiniões a respeito.

  - Gal (2002)
  - Rumsey (2002)
  - Garfield (2008)
  - Campos, C.(2011)

O uso de tecnologia no processo de ensino-aprendizagem

Kleine (2014), Prensky (2010)

- Desenvolvimento de habilidades ao cidadão atual
  - ter iniciativa;
  - tomar decisões;
  - saber aprender e compartilhar informações.
- Cálculo rápido
- Visualização dinâmica
- Interatividade

O uso de tecnologia no processo de ensino-aprendizagem

Coutinho, Vieira e Freitas (2013):

- Fundamental para enfatizar as interpretações e os conceitos;
- Auxilia em construções significativas.

Jogos no ensino de Estatística

- *Panorama*
  - *Jogo do Alvo* (TORREJON e SCHLÜNZEN JR, 2002)
  - *Statistics Poker* (LEECH, 2008)
  - *A História fictícia de monstros* (KRAUS, 2010)
  - *Canhão estatístico* (BUENO, 2010)
  - *Banco Imobiliário para o Aprendizado do Programa R e de Estatística Computacional* (MONTEIRO; LIRA; ARRUDA; SILVA Jr.; AMARAL e BAYER, 2010)
  - *Jogo dos 3Ms* (LOPES, J.; CORRAL e RESENDE, 2012)
  - *Jogo OR – Estatística* (PIMENTA, 2012)
  - *Brincando com a estatística e probabilidade* (OLIVEIRA Jr., 2013)
  - *Jogo Max_Min* (LOPES, J. 2013)
  - *Blue & Red* (SOUZA, F. 2013)
  - *Medvar* (LOPES, 2014)
  - *Radical Estatística* (SOUZA e GOMES, 2014)

Proposta (em construção)

- Jogo digital
- Narrativa
  - situação-problema
  - medidas resumo
  - postos de atendimento
  - folha de registro
  - sistema de recompensas
  - sistema de interatividade

Aplicação e Avaliação

Todo o processo de Aplicação será registrado por meio de instrumentos de gravação.

1. Atividades iniciais com o colaborador (professor/escola):

- Encontros e discussão
- Finalizar jogo e folha de registro

2. Aplicação da proposta:

- Entrevistar alguns alunos (pré)
- Aplicar o jogo/Preenchimento folha de registro
- Entrevistar alguns alunos (pós)
- Autoavaliação dos alunos (todos)

3. Análise e avaliação(pesquisadora):

- Entrevista com colaborador
- Analisar a aplicação e os resultados do jogo
- Analisar a proposta didática

Próximos passos

- Leituras complementares
- Desenvolvimento da situação-problema em que o jogo estará inserido
- Produção do jogo
- Aplicação e avaliação do produto de pesquisa

Referências bibliográficas mencionadas na apresentação

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais+:** Ensino Médio. Brasília: MEC, 2002. 144p.

CAMPOS, C. R.; WODEWOTZKI, M. L. L.; JACOBINI, O. R. **Educação estatística:** teoria e prática em ambientes de modelagem matemática. Coleção tendências em educação matemática. Belo Horizonte: editora autêntica, 2011.

GAL, I. Adult´s statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. **International Statistical Review**, 70(1), 1-25. Disponível em: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/cblumberg/gal.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2015.

KRAUS, S. Monstrous methods for teaching central tendency concepts. **Teaching Statistics**, v. 32, n. 1, p. 21-23, 2010.

LEECH, L. N. **Statistics poker:** reinforcing basic statistical concepts. Teaching Statistics, v. 30, n. 1, 2008. Disponível em: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/ 10.1111/j.1467-9639.2007.00309.x/pdf>. Acesso em:05 abr. 2016.

LOPES, C. E. **O ensino de probabilidade e estatística na escola básica nas dimensões do currículo e da prática pedagógica**. Disponível em: <www.iberomat.uji.es/carpeta/posters/148_celi_espasandin_lopes.doc>. Acesso em: 11 jan. 2016.

Título: "Ensino de Estatística por meio de jogos".
Fabiana de Souza Bomfim (*Antonio Carlos Brolezzi*)

História da Matemática e Cinema:
o caso da Criptografia

Fabiana de Souza Bomfim

RESUMO

O presente trabalho descreve uma proposta de aprendizagem significativa e contextualizada social e culturalmente na introdução do ensino de Álgebra por meio da utilização do filme Jogo da Imitação (2014), que traz elementos da História da Matemática, em especial da História da Criptografia. A proposta descrita apresenta o cinema como organizador prévio para as aulas de Matemática, em particular de Álgebra, com a finalidade de promover aprendizagem significativa, no sentido de Ausubel, Novak e Hanesian (1980). O trabalho também traz a descrição de atividades nas quais há um uso intencional da História da Matemática na construção do conhecimento para a formação do cidadão criativo, crítico, responsável e participativo, envolvendo professores de matemática e alunos do Ensino Fundamental II de uma escola particular da cidade de São Paulo. O trabalho também descreve a concepção de ensino dessa escola, em que as atividades foram realizadas, a fim de dar a elas o devido contexto.

Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E CINEMA: O CASO DA CRIPTOGRAFIA

Fabiana de Souza Bomfim

SÃO PAULO – SP

2016

Prof. Ricardo Bianconi

Coordenador Acadêmico

ANTONIO CARLOS BROLEZZI

Professor Orientador

MOTIVAÇÃO

- Descontentamento com a situação atual: muitos alunos com dificuldades em utilizar os conhecimentos básicos e, consequentemente, os péssimos resultados obtidos.
- Contradição entre: "A Matemática está em tudo" e a disciplina nitidamente vista como isolada das demais disciplinas
- Desejo de pensar no ensino da matemática onde os conhecimentos tenham significados; que possa ajudar de fato na formação do cidadão crítico capaz de agir e atuar no mundo moderno e suas demandas

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

- A teoria de Ausubel tem como ponto de partida o conjunto de conhecimento que o aluno traz consigo (estrutura cognitiva) – conhecimentos prévios
- A aprendizagem significativa só acontece através da relação e do diálogo entre a nova informação e algum aspecto relevante da estrutura cognitiva do sujeito

APRENDIZAGEM

- Aprendizagem

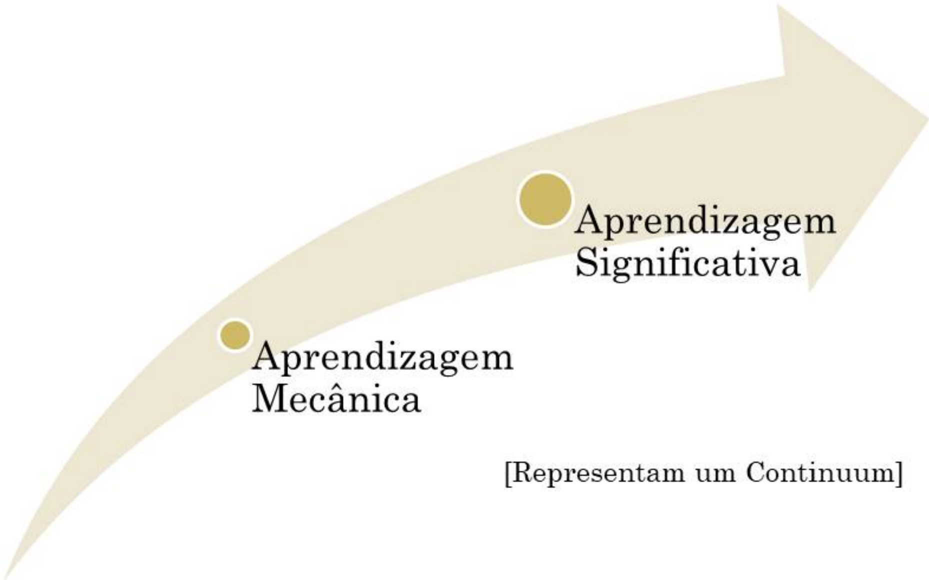
Mecânica

Quando não há "fios" na rede cognitiva onde ela possa ser conectada

Significativa

Quando se relacionam e se incorporam à estrutura cognitiva de forma não arbitrária

SEGUNDO AUSUBEL, NOVAK E HANESIAN (1980)



[Representam um Continuum]

ORGANIZADOR PRÉVIO

- "Acelerador do "Continuum";
- Consiste em utilizar, durante atividade prévias, conceitos e princípios que tenham maior poder de extensão e que possam ser utilizados como subsunçores para a nova aprendizagem
- É preciso que esses conceitos sejam apresentados de forma programática, utilizando métodos que apresentem e ordenem a sequência dos conteúdos de forma a aumentar a clareza da estrutura cognitiva
- Ajuda dar consistência ao saber aprendido
- Pode ser um texto, filme, poema, música, um programa, jogo, etc

VANTAGENS DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA, SEGUNDO AUSUBEL, NOVAK E HANESIAN

1. Os conhecimentos que são aprendidos ficam retidos por maior tempo
2. Aumenta a capacidade de uma maior facilidade em aprender novos conceitos
3. Mesmo que as informações sejam esquecidas após a assimilação, elas deixam resíduos em todo o quadro de conceitos relacionados
4. As informações aprendidas significativamente podem ser aplicadas em diferentes e novos contextos e situações problemas

A APRENDIZAGEM AINDA PODE SE DAR POR...

RECEPÇÃO	*o conteúdo a ser aprendido é apresentado ao aluno sob a forma final, não envolve descoberta. Ao aluno exige-se apenas internalizar o material*
DESCOBERTA	*Sua principal características é a descoberta resultante da ação do aluno, ele próprio construindo seu conhecimento*

Ambas podem ser mecânicas ou significativas

OUTROS ELEMENTOS QUE DEVEMOS LEVAR EM CONSIDERAÇÃO PARA QUE OCORRA A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

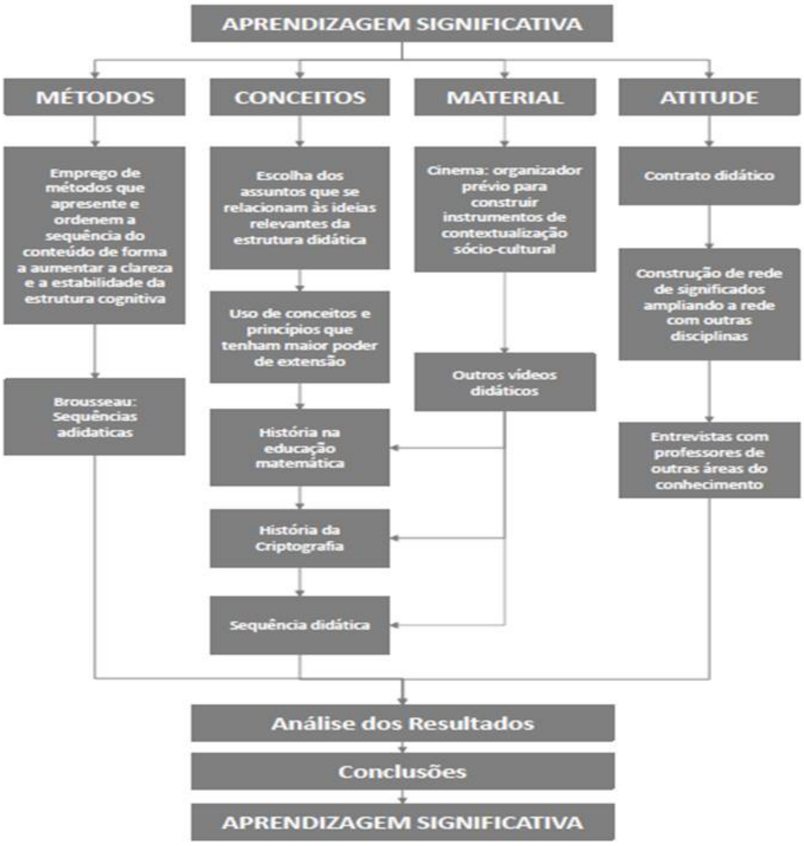
- Predisposição
  - Aluno
  - Professor
- Currículo
- Meio social
- Avaliação

ATITUDE

- Possibilidade de ser algo que influencie o comportamento

MATERIAIS QUE POSSUAM UMA ORGANIZAÇÃO CONCEITUAL ⇨ CONEXÃO LÓGICA COM AS IDEIAS ÂNCORAS

- Organizador Prévio: capaz de fazer uma diferenciação progressiva e reconciliação integradora. Ponte entre o que o aluno já sabe e o que ele irá saber



CONCLUSÃO

- Esse trabalho visa buscar elementos da História da Matemática, em especial na História da Criptografia, que possam ser utilizados como organizadores prévios para as aulas de Matemática, em especial nas aulas de Álgebra, com a finalidade de contribuir para uma aprendizagem significativa e contextualizada social e culturalmente.

Rodrigo Ruiz Campos (*Antonio Carlos Brolezzi*)
Título: "Desenvolvendo a capacidade de argumentação e demonstração dos alunos do Ensino Médio".

Desenvolvendo a Capacidade de Argumentação e Demonstração nos Alunos do Ensino Médio.

Rodrigo Ruiz Campos

Resumo

Para uma grande parte dos estudantes que ingressam em universidades, nos cursos da área de exatas, a transição entre o ensino secundário e o superior apresenta grandes dificuldades. Uma das principais é o tipo de matemática apresentada em cada etapa escolar. Enquanto a escola básica baseia-se em procedimentos aritméticos e algébricos, do ponto de vista prático, o ensino superior exige um alto grau de abstração, baseado na argumentação, no raciocínio lógico e nas demonstrações. O presente trabalho tem como objetivo fazer uma reflexão sobre o papel da argumentação e da demonstração no ensino médio. Para tanto, entender as finalidades propostas pelas LDBEN e como a matemática contribui nesta etapa de formação, são fatores essenciais para responder como devemos apresentar a matemática, comparar com a realidade escolar, e concluir se a argumentação e a demonstração podem contribuir para a formação integral, aproximar os dois níveis e minimizar os efeitos desta transição.

Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Desenvolvendo a Capacidade de Argumentação e Demonstração pelos Alunos do Ensino Médio

Rodrigo Ruiz Campos
Orientador: Antônio Carlos Brolezzi
Setembro 2016

Motivação

No ambiente profissional – Em particular, no Ensino Médio

- ✓ Tendências de educação matemática com ênfase em problemas do cotidiano. Dar significado para a matemática.
- ✓ Dificuldade em transmitir o conhecimento matemático.
- ✓ Preocupação - Onde uso isto? ou Pra que serve isto?
  - De onde veio isto? ou Por que isto é verdade?

No curso de mestrado – Em estudos sobre o ensino de matemática no Nível Superior

- ✓ As dificuldades nos anos iniciais da graduação nos curso de ciências exatas
- ✓ Alto índice de reprovação
- ✓ Evasão por parte dos alunos dos cursos.

Como ensinamos e aprendemos matemática?

Aspectos Históricos

Revolução Industrial
Séc. XVIII

Educação Básica

Matemática Significativa
Prática
Social - Realidade

Ensino Superior

Evolução como ciência
Abstração
Axiomas
Teoremas

Desenvolvendo a Capacidade de Argumentação
e Demonstração dos Alunos do Ensino Médio

Fatos

Em debates sobre a transição entre a escola básica e o ensino superior, uma das ***principais dificuldades*** apontadas, tanto por parte dos professores universitários, quanto por parte dos alunos ingressantes em cursos de graduação na área de exatas, é o ***tipo de matemática apresentada em cada etapa escolar***.

Escola Básica

- procedimentos aritméticos e algébricos do ponto de vista prático tais como contas, medições, equações, análise de dados

Ponte

Ensino Superior

- Demonstrações e o raciocínio lógico dedutivo. Matemática Abstrata.

Desenvolvendo a Capacidade de Argumentação
e Demonstração dos Alunos do Ensino Médio

Fatos

- "Atualmente, verificamos, sem grande dificuldade, que no ensino fundamental e médio **não se dá ênfase ao ensino de demonstrações em matemática**". (SADDO, FUSCO, MIGUEL, SILVA, 2008).

- Knuth (2002), existe uma tendência de professores de matemática em considerar a **prova como um procedimento pedagógico limitado** e não como uma forma de fazer matemática ou um meio de se comunicar matematicamente na escola secundária

Desenvolvendo a Capacidade de Argumentação
e Demonstração dos Alunos do Ensino Médio

Perguntas Norteadoras

- A matemática que propomos aos alunos do ensino médio está sendo realmente significativa para o aluno?

- Será que a matemática dedutiva, quando proposta através de uma abordagem investigativa, onde o aluno é produtor do conhecimento, pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem de matemática.

- Será que é possível aproximar o ensino da matemática do ensino médio ao ensino de matemática do ensino superior? É pertinente tratar de demonstração nesta faixa etária?

Desenvolvimento

i) Apoiar em dados de pesquisas que tratam da transição do ensino secundário – ensino superior. Referência teórica em relatórios do ICM'98 e ICME-12.

- Levantamento dos principais dos problemas apontados por professores e alunos.

$$\boldsymbol{dificuldade \rightarrow incapacidade \rightarrow desmotivação \rightarrow evasão}$$

ii) Fazer um estudo sobre as finalidades do Ensino Médio com base na LDB e PNEM.

- Quais são os objetivos a serem alcançados na formação do aluno.
- Qual é o papel da matemática para a formação do aluno.
- Argumentação e o raciocínio dedutivo contribuem na formação integral do aluno.

Desenvolvimento

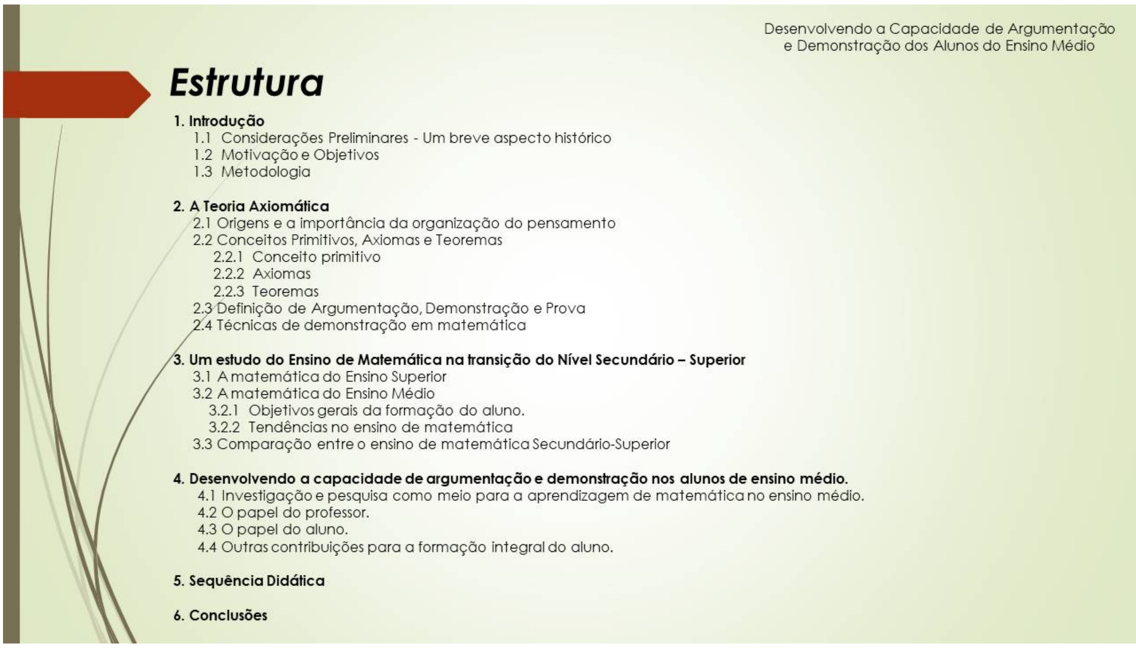
iii) Propor atividades que desenvolvam a capacidade de argumentação e demonstração. Referências teóricas – Ponte e Freire

- Foco Aluno Produtor do conhecimento
  Ensino através da pesquisa/investigação.

- Papel do professor

iv) Fazer a aplicação em turmas do ensino médio e fazer análise das atividades.

- Conclusões x perguntas norteadoras.


Desenvolvendo a Capacidade de Argumentação
e Demonstração dos Alunos do Ensino Médio
Estrutura
1. Introdução
1.1 Considerações Preliminares - Um breve aspecto histórico
1.2 Motivação e Objetivos
1.3 Metodologia
2. A Teoria Axiomática
2.1 Origens e a importância da organização do pensamento
2.2 Conceitos Primitivos, Axiomas e Teoremas
2.2.1 Conceito primitivo
2.2.2 Axiomas
2.2.3 Teoremas
2.3 Definição de Argumentação, Demonstração e Prova
2.4 Técnicas de demonstração em matemática
3. Um estudo do Ensino de Matemática na transição do Nível Secundário – Superior
3.1 A matemática do Ensino Superior
3.2 A matemática do Ensino Médio
3.2.1 Objetivos gerais da formação do aluno.
3.2.2 Tendências no ensino de matemática
3.3 Comparação entre o ensino de matemática Secundário-Superior
4. Desenvolvendo a capacidade de argumentação e demonstração nos alunos de ensino médio.
4.1 Investigação e pesquisa como meio para a aprendizagem de matemática no ensino médio.
4.2 O papel do professor.
4.3 O papel do aluno.
4.4 Outras contribuições para a formação integral do aluno.
5. Sequência Didática
6. Conclusões

Cynthia Militão Domingos (*Ana Paula Jahn*)
Título: "Ensino Ensino e aprendizagem de Geometria Analítica: uma experiência com coordenadas e distâncias no plano e no espaço".

Ensino e aprendizagem de Geometria Analítica: uma experiência com o cálculo de distâncias no plano e no espaço

Cynthia Militão Domingos

Orientação: Profa. Ana Paula Jahn

Resumo

Esse trabalho aborda questões relativas ao ensino e à aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio. Tem por objetivo principal apresentar uma proposta de atividades didáticas para introdução dos tópicos coordenadas e distâncias no plano e no espaço, com ênfase na compreensão e não na memorização de fórmulas. A pesquisa fundamenta-se na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval e busca integrar o *softwareGeogebra* como ferramenta auxiliar no trabalho com os registros gráfico, algébrico e numérico. Essa escolha considera que o uso da *Janela 3D* do *Geogebra*, articulada à *Janela 2D*, pode apoiar um trabalho sobre coordenadas e distâncias no plano e no espaço, permitindo ampliar o estudo da Geometria Analítica no Ensino Médio e colaborar com o desenvolvimento de habilidades de visualização espacial dos alunos. Visando uma pesquisa de caráter qualitativo, optou-se pelo *Design Experiment*, uma metodologia com foco na análise dos processos de aprendizagem de domínios matemáticos específicos, de forma a articular as componentes teórica e pragmática. Até o momento, foi realizada uma análise de livros didáticos aprovados pelo PNLD 2015 e concluído o *design* das tarefas para o tópico coordenadas no plano e no espaço. Para esse encontro, serão apresentados os principais resultados dessas etapas que serão seguidas da experimentação das atividades junto a um grupo de aluno do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de São Paulo.

Ensino e aprendizagem de Geometria Analítica: uma experiência com o cálculo de distâncias no plano e no espaço

Cynthia Militão Domingos

Orientadora: Profa. Dra. Ana Paula Jahn

Motivação

- 2 experiências, algumas constatações

- Primeiros contatos com o ensino da **Geometria Analítica** deram-se em uma escola particular e em uma escola pública, ambas localizadas na Zona Leste de São Paulo

Experiência 1: Escola particular

✓ **8º Ano do EF**

Distâncias entre dois pontos eram apresentadas a partir de fórmulas e os alunos não apresentavam dificuldades em manipulá-las

$A = (a, b)$ e $B = (c, d)$

$d(A, B) = |a - c|$ (segmento $\overline{AB}$ paralelo ao eixo OX)

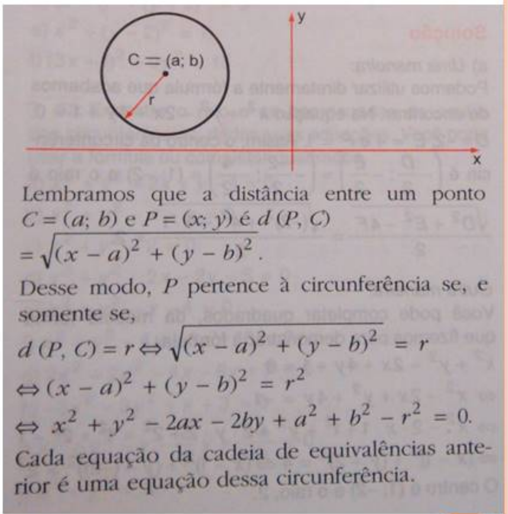
$d(A, B) = |b - d|$ (segmento $\overline{AB}$ paralelo ao eixo OY)

$d(A, B) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ (segmento $\overline{AB}$ inclinado)

Experiência 1: Escola particular

✓ **9º Ano do EF**

No estudo de circunferências, os alunos encontravam dificuldades para deduzir sua equação, não relacionando espontaneamente ao cálculo de distância entre dois pontos



Lembramos que a distância entre um ponto $C = (a; b)$ e $P = (x; y)$ é $d(P, C) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

Desse modo, P pertence à circunferência se, e somente se,

$d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$

$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$

Cada equação da cadeia de equivalências anterior é uma equação dessa circunferência.

Experiência 2: Escola Pública

- ✓ **3ª Série do Ensino Médio**

Valorização dos conhecimentos que os alunos já possuíam e utilização do mínimo de fórmulas "prontas"

Nos conteúdos de G.A. onde as fórmulas não foram apresentadas diretamente, os alunos tiveram um melhor desempenho nas avaliações.

Constatações

A "mecanização" do ensino de Geometria Analítica não vai ao encontro do que é esperado nos documentos oficiais, nem das recomendações das pesquisas na área.

Muitas vezes, os alunos até sabem trabalhar com fórmulas e aplicá-las, mas não compreendem os conceitos por trás delas e as características dos objetos geométricos em jogo.

PNLD 2015 - Matemática: Ensino Médio (BRASIL, 2015)

Em **6** coleções aprovadas

- ***Coleção 1***

"O campo é trabalhado exclusivamente no terceiro livro da coleção, com predominância do uso de fórmulas e de procedimentos algébricos." (p. 26)

- ***Coleção 3***
- "Há demasiada atenção a regras e fórmulas em detrimento das atividades de investigação, exploração e descoberta." (p. 44)

PNLD 2015 - Matemática: Ensino Médio (BRASIL, 2015)

- ***Coleção 5***

"Na abordagem adotada, há uma grande quantidade de fórmulas e excesso de nomenclatura, o que pode prejudicar a aprendizagem dos conceitos centrais." (p. 62)

Alguns trabalhos sobre o tema

Borsoi (2015) e Halberstadt e Fiorezi (2015)

✓Questionam o fato do ensino da Geometria Analítica privilegiar a representação algébrica dos objetos geométricos;

✓ Sugerem trabalhar com as representações algébrica, gráfica e geométrica de retas e circunferências simultaneamente;

✓ Utilizam o software *GrafEq* para explorar tais representações

Mais uma constatação

- Levantamento por meio de um questionário, aplicado 75 alunos ingressantes dos cursos de Licenciatura (do IME e do IF), no 1º/2016
- Principais dificuldades apresentadas pelos alunos:
- Interpretação de representações de objetos geométricos em sua forma algébrica;
- Confusão no cálculo de distância entre dois pontos na reta real com distância entre dois pontos em um plano.
- Pouca familiaridade com objetos no espaço e grande maioria desconhece distância entre dois pontos no espaço

MOTIVAÇÃO

- Diversas pesquisas em Geometria Analítica no Plano

- **Mas, e no espaço?**

Coordenadas e Distâncias no Espaço

- ✓ Desenvolver habilidade de visualização espacial (HVE)
  - ✓ Poucas atividades para o desenvolvimento HVE dos alunos na Educação Básica, mas requerida em provas oficiais;
  - ✓ Presente em diversas áreas do conhecimento: Arquitetura, Artes, Engenharia, Física, Medicina...

- ✓ Revisitar conceitos, articulando plano e espaço

Pergunta norteadora

- No Ensino Médio, qual a viabilidade e potencial de um trabalho com coordenadas e distâncias no plano e no espaço?

Objetivos

- Trabalhar com Geometria Analítica no plano e no espaço, abordando coordenadas e cálculo de distâncias

- Propor atividades onde os alunos são levados a explorar, fazer conjecturas e desenvolver ferramentas para validá-las (ou não)
  - Sem enfatizar fórmulas prontas
  - Diversificando as representações
  - Utilizando diversos recursos: jogos, materiais concretos e *software Geogebra* (Janela 3D)

Fundamentação Teórica

- ✓ Teoria dos Registros de representação semiótica de R. Duval (2005)
- ✓ Pesquisas sobre o ensino de Geometria Analítica no plano e no espaço (buscando mais referências)

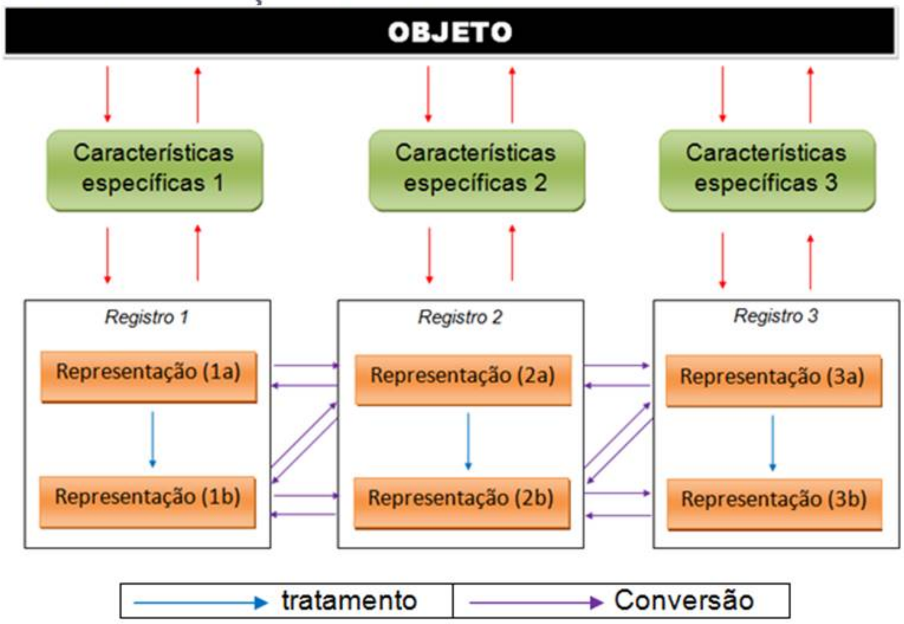
Fundamentação Teórica

"Não há ***noesis*** sem ***semiosis***." (DUVAL, 2009, p.13)

Noesis = apreensão conceitual

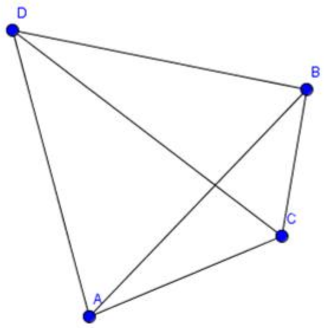
Semiosis = produção e uso de diferentes representações em diversos registros

Fundamentação Teórica

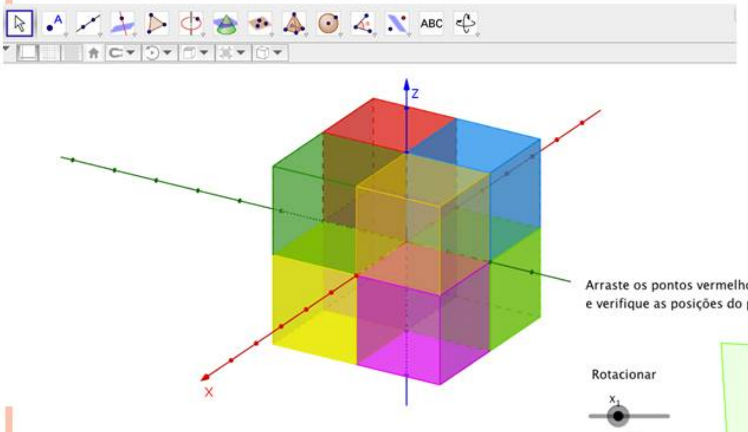


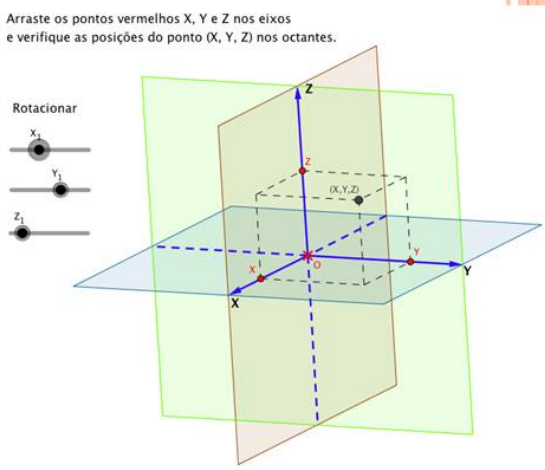
Uso do *Geogebra* (Janela 3D)

- ✓ Acreditamos que o uso do Geogebra 3D facilita na visualização de objetos espaciais, além de possibilitar a manipulação destes objetos.



Uso do Geogebra (Janela 3D)





Metodologia

- Estudo experimental baseado na metodologia do *Design Experiment* (Cobb, 2003)

  - A quantidade de participantes pode variar de acordo com os objetivos do trabalho: no nosso caso, as atividades serão aplicadas a um grupo de 6 alunos de uma escola pública de São Paulo/SP.

  - O *Design* objetiva a criação de situações "inovadoras" (ricas em tarefas e recursos) que permitem analisar as trajetórias de aprendizagem.

Metodologia

- As atividades propostas podem sofrer alterações durante o processo de aplicação para que atinjam seus objetivos.
- Os erros apresentados pelos estudantes servem como ponto de partida para alterações realizadas nas atividades seguintes.

Design Experiment

As atividades estão divididas em duas etapas:

✓1ª ETAPA: Trabalhar com sistemas de coordenadas cartesianas no espaço.

✓2ª ETAPA: Trabalhar com o cálculo de distâncias no plano e no espaço.

Design Experiment – 1ª ETAPA

- Revisão de coordenadas no plano
  - ✓ Jogo Batalha Naval
  - ✓ Representações de coordenadas no plano (gráfica e algébrica) e conversões entre elas
  - ✓ Simetrias em relação aos eixos *OX* e *OY*.

Design Experiment – 1ª ETAPA

Introdução ao sistema de coordenadas no espaço

- ✓ Utilização da "Janela 3D" do *Geogebra*
- ✓"Jogo dos Octantes"
- ✓ Construção de modelo com material concreto
- ✓ Jogo da Velha 3D

Design Experiment – 2ª ETAPA

Cálculo de distâncias entre 2 pontos no plano e no espaço

- Via Teorema de Pitágoras
- Via coordenadas

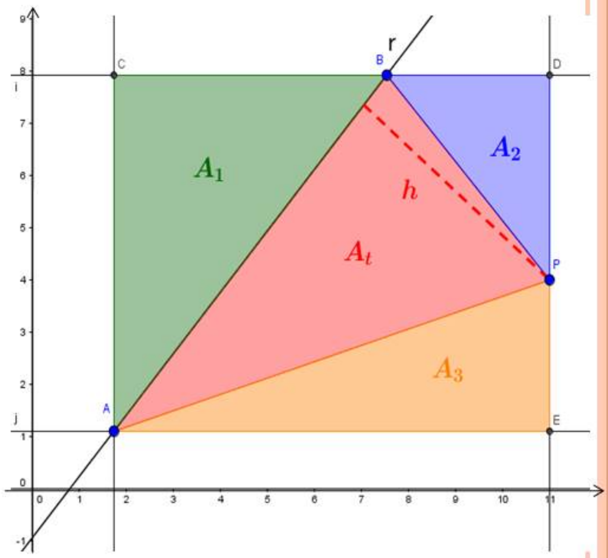
Cálculo da distância entre ponto e reta

- Utilizar diferentes estratégias para o cálculo sem o uso de fórmulas "prontas", como por exemplo, utilizando áreas de figuras planas (composição/decomposição).

Design Experiment – 2ª ETAPA

Cálculo da distância entre ponto e reta

- Diferentes estratégias para o cálculo sem o uso de fórmulas "prontas"
- Por exemplo, utilizando áreas de figuras planas (composição/decomposição).



Cronograma das Etapas Seguintes:

Aplicação das atividades do *Desing*;

Análise das atividades aplicadas e eventuais modificações;

Atividades complementares;

Redação das conclusões e revisão do texto.

Referências

BORSOI, C., *Geometria Analítica e GrafEq: Compreensão de conceitos a partir do diálogo entre representações*, EGEM, Porto Alegre, 2015.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura (MEC). *Guia de Livros Didáticos PNLD/Ensino Médio*, Brasília: SEF/MEC, 2015.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura (MEC). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*, Brasília: SEF/MEC, 2000.

D'AMORE,B. *Epistemologia e didática da Matemática*. Tradução de: Maria Cristina Bonomi Barufi. 1ª ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DANTE, L. R., *Matemática: Contexto e Aplicações*, Editora Ática: São Paulo, 2014.

DUVAL, R., *Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I)*, Tradução de: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira, 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FIOREZE, L. A., HALBERSTADT,F. F., *O ensino e aprendizagem de Geometria Analítica: A questão do pensamento generalizador com o software GrafEq*, EGEM, Porto Alegre, 2015.

KARRER, Mônica. *Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: um estudo sobre as Transformações Lineares na perspectiva dos Registros de Representações Semiótica*. Tese de Doutorado (Educação Matemática). São Paulo, PUC/SP, 2006.

LEONARDO, F. M. de, *Conexões com a Matemática*, São Paulo: Editora Moderna, 2013.

PAIVA, M., *Matemática Paiva*, São Paulo: Editora Moderna, 2013.

SOUZA, J., *Novo Olhar – Matemática*, São Paulo: Editora FTD, 2013.

Obrigada pela atenção!

Comentários, críticas e sugestões são muito bem vindos!

Paola BurgattMeneghesso (*Bárbara Corominas Valério*)
Título: "Atividade de investigação nos currículos de Matemática do Ensino Fundamental 2".