O ESTUDO DE UMA CONCEITUAÇÃO GEOMÉTRICA PARA OS LOGARITMOS

Fernando Pavan Guido[1] *(fpavan@ime.usp.br)*
Iole de Freitas Druck [2] *(iole@ime.usp.br)*

Resumo: Este artigo é parte de uma dissertação de mestrado que aborda a história e o desenvolvimento dos logaritmos ao longo dos anos. Entretanto, vai além, mais do que isso, apresenta alguns comentários a respeito da forma como o assunto é tratado na Educação Básica, em alguns livros didáticos aprovados no PNLD de 2015. Desvenda a estreita relação existente entre as Progressões Aritmética e Geométrica, Trigonometria e os próprios Logaritmos. Apresenta a construção da Função Logarítmica como realmente ocorreu no século XVII, ou seja, por meio de áreas de regiões abaixo da curva xy = 1, e define a função exponencial como a inversa da que foi anteriormente construída. Mostra a formalização do número irracional *e* pelo método tradicional usado em livros de Cálculo e Análise e posteriormente aquela decorrente da teoria apresentada. Por fim, tecemos alguns comentários sobre a importância do número irracional *e,* bem como algumas de suas aplicações.

Palavras-chave: Logaritmos, Número *e*, Logaritmo Natural, Hipérbole.

Abstract: This paper is part of a master thesis that discusses the history and development concerning of logarithms along the years. However, more than that, presents some commentaries about the shape of how the subject is treated in Basic Education, of some learning books approved on PNLD of 2015. Reveals the strict relationship between Arithmetic and Geometric Progressions, Trigonometry and mainly Logarithms. Also, it shows how the Logarithmic Function was developed in fact, at XVII century, so, through areas of regions under xy = 1 curvature, and sets the Exponential Function like the inverse of that which was previously built. It bring up the formalization of the irrational number and by traditional method used in Calculation and Analysis books and posteriorly that due to the theory shown. Lastly, we can weave some comments about the importance of irrational number *e*, as well as some of its aplication.

Keywords: Logarithms, Number *e*, Natural logarithms, Hyperbole.

Introdução e objetivos

O estudo dos logaritmos, assunto que desempenhou papel primordial em tempos passados, enfrenta hoje um grande desinteresse por parte dos alunos, principalmente os da Educação Básica que, não vendo a importância que o assunto desempenhou em gerações passadas, recebem esse ensino como algo sem utilidade e permeado de contextos e exemplos que em nada estimulam o aprender. Conforme Elon Lages Lima, os logaritmos tiveram três séculos de valorização, isso por facilitar operações complicadas, porém atualmente não se dá importância a esses estudos pela facilidade com que as calculadoras as fazem (LIMA, 2009, p.VII). Por que deveríamos gastar dispendioso tempo com manipulações algébricas, tediosos cálculos ou ainda complicadas tabelas, quando para isso dispomos de máquinas que rapidamente resolvem tais problemas?

Outro ponto que causa nos estudantes forte estranheza é o momento no qual é introduzido o logaritmo de base *e* ou, simplesmente, o logaritmo natural. Há motivos para aceitar que existe um número mais natural do que 10 (base da nossa numeração) para compor a base de um logaritmo? E

[1] Mestrando em MPEM do IME-USP.
[2] Professora orientadora do Departamento de Matemática do IME-USP.

mais ainda, se buscamos algo que seja *natural*, por que aceitar um número irracional como 2,71828... chamado de *e* que nem sequer conseguimos registrar em sua totalidade no sistema decimal?

Talvez apenas aqueles que optarem por um curso de exatas e cursarem pelo menos um semestre de Cálculo, recebam uma resposta convincente e só então percebam de forma plena a importância e beleza do famoso logaritmo em sua base natural.

A maneira como o logaritmo é definido, pela inversa da potenciação, requer que sejam estudadas anteriormente todas as suas propriedades, e que se dê sentido para expressões do tipo a^x sendo *a* positivo quando x é um número irracional, fato que, apesar de extremamente comum, é normalmente omitido aos alunos com a finalidade de "facilitar o ensino". É possível notar que, em geral, nos exemplos iniciais é apresentado apenas a = 2, 3, 5 ou 10. Entretanto, ao passar-se para o estudo dos logaritmos, descobrimos que essas bases não são tão importantes em comparação ao chamado *logaritmo de base natural,* ou seja, o logaritmo cuja base é o número irracional *e.* Tal abordagem acaba por reforçar ainda mais a repulsa pelo número *e* nos alunos, devido ao modo artificial como esse número é introduzido em substituição aos corriqueiros 2, 3, 5 e 10. É possível ainda notar que existe certa "preferência" dos alunos para exercícios em que predominam o uso de técnicas de manipulação e uso de *regras* em detrimento daqueles que necessitam uma maior compreensão conceitual ou da competência para aplicá-los em situações contextualizadas.

Enfim, são muitos os entraves que devem ser tratados com a utilização dessa definição na escola, e, como aponta Lima:

> Tais preliminares envolvem dificuldades técnicas que conduzem ao seguinte dilema: ou passar por cima dessas dificuldades, fazendo de conta que elas não existem – o que deixa a desejar do ponto de vista de honestidade científica – ou esgotar a paciência do aluno (ou leitor) com longos detalhes rebarbativos (LIMA, 2009, p.VIII).

Entretanto, devemos dizer que o autor foi um tanto "pessimista" ao apontar apenas essas duas possibilidades, pois esperamos com nosso trabalho, dar ao professor de Matemática ferramentas para que ele possa analisar com um olhar crítico o que é conveniente utilizar do seu material didático, o que julga interessante complementar, e ainda, ter um preparo para extrapolar o "básico" e, por vezes apresentar fatos matemáticos, curiosidades históricas, contextos interessante ou o que mais julgar necessário para possíveis intervenções em aulas ou nos momentos em que surgirem dúvidas dos alunos. Partindo dessas observações vamos apresentar uma abordagem para os logaritmos que não é muito difundida no ensino básico ou até em cursos de Licenciatura em Matemática. Ela de fato, foi a primeira registrada na história do tema e se apóia fortemente em conceitos geométricos, o que é mais elementar e visualizável para nós, enquanto a abordagem mais utilizada nos livros possui caráter quase que exclusivamente algébrico.

Embasamento teórico

De forma enfática, Ball, Thames & Phelps (2008), definem que um conjunto de *conhecimentos especializados* necessários a um professor consiste em dominar um repertorio suficientemente amplo de conhecimentos sobre os objetos de ensino de modo que consiga autonomia para, em sua prática em sala de aula, encontrar caminhos que, na discussão de conceitos e procedimentos, possa incluir questionamentos e estratégias pedagógicas diferenciadas, que respeitem tanto a natureza dos conceitos como o grau de maturidade dos estudantes, por exemplo. Desse modo, é esperado que o docente consiga aperfeiçoar-se partindo da análise de suas próprias experiências. Seria um entrelace entre conhecimento específico e os conhecimentos pedagógicos. Esse conhecimento específico se relaciona prioritariamente com o tema a ser ensinado, nesse caso em particular, com os logaritmos. Os conhecimentos pedagógicos fazem parte dos saberes referentes a como ensinar e a como o aluno aprende. A formação inicial deve abarcar um aprendizado para a prática, ou seja, para o trabalho de ensino que exercerá, e não somente ficar no plano teórico. O trabalho docente, porém, vai muito além disso. Perpassa os conhecimentos específicos e pedagógicos, exigindo experimentação, analise e reflexão da própria prática para que haja desse modo uma constante evolução.

Desenvolvimento

É muito comum, no tratamento dado aos logaritmos, defini-los de modo a dependerem do estudo anterior da exponencial. Essa definição, inclusive, é a mais encontrada nos livros didáticos. Tal definição, entretanto, traz consigo algumas dificuldades que posteriormente deixarão lacunas quase que intransponíveis no aprendizado dos alunos.

O primeiro inconveniente nessa abordagem é o fato dela depender do estudo anterior da teoria da exponenciação. Porém muito mais do que isso, é primordial *[...] que se saiba o significado de a^y quando y é irracional, e que se provem regras como $a^y \cdot a^z = a^{y+z}$ para y, z $\in \mathbb{R}^+$ quaisquer.* (LIMA, 2009, p.VIII).

Outro inconveniente nessa definição é que tratamos todas as bases de forma igual, não permitindo apresentar de modo natural o número *e* como uma base especial. *Na definição de logaritmo como expoente, o número e aparece artificialmente.* (LIMA, 2009, p.IX).

Em nossa dissertação, apresentamos como o assunto surgiu e se desenvolveu ao longo dos anos. A definição apresentada se apóia em conceitos geométricos e apresenta uma série de potencialidades que eliminam os entraves apresentados acima. Mostramos a estreita relação existente entre as Progressões Aritmética, Geométrica e os Logaritmos, bem como a ligação com os juros compostos, o que acaba trazendo em seu bojo um curioso número, o *irracional e*.

Existe uma relação entre a área de uma determinada região abaixo da hipérbole e o valor de um logaritmo. Na verdade, é possível ir além – mostramos em nosso trabalho que existe uma relação biunívoca entre as áreas da região abaixo de um ramo da hipérbole e os valores de uma função logarítmica. Vemos então como definir tais valores utilizando áreas abaixo do gráfico da hipérbole de equação xy = 1, sendo frequente inclusive encontrar esta definição em livros de cálculo integral: *Essa abordagem possibilita um tratamento rigoroso para o logaritmo baseado no conceito de área que é mais elementar ou intuitivo, do que o de função exponencial* (DRUCK, 1995, p.18).

Defendemos que, para o professor, é importante saber operar com os logaritmos e saber ensiná-los, mas também é fundamental que ele conheça o processo histórico do desenvolvimento do conceito ao longo dos tempos. Apresentamos, desse modo, um levantamento histórico e epistemológico não apenas do Logaritmo, mas também de assuntos que acabaram por se tornar coadjuvantes em seu desenvolvimento.

Com o passar do tempo e a evolução de alguns conceitos matemáticos entre eles o famoso Cálculo Diferencial e Integral o número *e* juntamente com a^x passaram a figurar entre as constantes mais importantes não apenas da matemática como de inúmeras ciências, exatas ou não. Como aponta Simmons, a constante *e* se tornou o número mais importante encontrado na matemática depois do famoso π (SIMMONS, 1987, p.351). Baseado nisso, apresentamos toda a teoria concernente ao número *e*, seus principais teoremas, e a prova de sua irracionalidade, entre outros fatos que ajudarão a compreender melhor esse importante número.

Considerações finais

Se por um lado a tecnologia tomou dos logaritmos o tipo de papel de destaque que teve na Matemática até o século XIX, por outro a função logarítmica mostrou representar outro tipo de papel relevante, dado sua importância na modelagem de fenômenos em quase todos os ramos da

Matemática Pura e Aplicada. É possível encontrar aplicação para ela na Física, Química, Biologia, Música, Artes e em diversas outras áreas.

> "A função logaritmo, porém, nunca morrerá, pela simples razão de que as variações exponenciais e logarítmicas são partes vitais da natureza e da análise. Consequentemente, um estudo das propriedades da função logaritmo e de sua inversa, a função exponencial, permanecerá sempre uma parte importante do ensino da matemática" (EVES, 2011, p.347).

Certamente dominar conhecimento *matemático especializado* (no sentido apresentado por Ball et al) poderá ajudar muito o professor a conseguir desenvolver suas aulas e utilizar ferramentas, já que o conhecimento pedagógico, que deveria ser uma constante nos cursos de Licenciatura, é parte indissociável da formação. Saber operar os diversos conhecimentos matemáticos não garante saber ensinar, ou mesmo, conhecer ferramentas de ensino não anula a necessidade de saber como tais ferramentas atuam no processo de ensino aprendizagem e qual deve ser sua participação nos diferentes grupos de alunos. Esse trabalho tem o intuito de propor ao professor que repense sua docência de modo crítico e aperfeiçoe sua prática, não apenas no âmbito profissional, mas também pessoal.

Referências Bibliográficas

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Journal of Teacher Education. Volume 59. Number 5., 2008. 389-407.

DRUCK, I. de F. Um pouco da história de potências, exponenciais e logaritmos Relatório Técnico 24 do Departamento de Matemática, IME/USP, São Paulo, 1995.

EVES, H. Introdução à história da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

LIMA, E. L. Logaritmos. 4. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

SIMMONS, G. F. Cálculo com geometria analítica, volume 1. Tradução: Seiji Hariki.São Paulo: McGraw-Hill, 1987.