

ENSINO DE LOGARITMOS POR MEIO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS FEITAS EM SALA DE AULA

Daniel Cergoli¹ (cergoli@ime.usp.br)
Martha Salerno Monteiro² (martha@ime.usp.br)

Resumo: Um dos objetivos deste trabalho é apresentar duas propostas de sequências didáticas para o ensino de logaritmos, sendo uma para professores e outra para alunos do ensino médio. A formulação dessas sequências foi feita tendo como base os trabalhos realizados pelo Prof. João Pedro da Ponte sobre investigação matemática³.

As propostas apresentadas têm como ponto de partida a exploração de propriedades encontradas em tabelas de progressões geométrica e aritmética. Essas tabelas serão posteriormente chamadas tabelas de logaritmos.

A definição usual de logaritmo como solução de uma equação exponencial, apresentada na maioria dos livros didáticos, é bastante abstrata, tornando-se, frequentemente, um obstáculo à aprendizagem. As sequências didáticas propostas, além de resgatarem a ideia original da criação dos logaritmos, evitam a abstração da definição usual.

Palavras-chave: Logaritmo, Investigação Matemática, Tabelas de Progressões Geométrica e Aritmética.

Abstract: One of this project's goals is to introduce two didactic sequences for teaching and learning logarithms. One of the sequences was designed for teachers and the other was meant to be used by high school students. These sequences were developed based on the research carried out by Professor João Pedro da Ponte on Mathematical Investigations.

Both sequences start with questions regarding properties to be found in numeric tables that contain a geometric progression in one column and an arithmetic progression in the other. These tables will later be named as "tables of logarithms".

Most textbooks in Brazil present the logarithm as the solution of an exponential equation. This definition is rather abstract and often becomes an obstacle to the learning process. The proposed didactic sequences avoid the use of the exponential equation in addition to reviewing the original idea in the history of logarithms.

Keywords: Logarithm. Mathematical Investigations. Numeric Tables of Geometric Progression and Arithmetic.

2. Introdução

Aprender Matemática sempre foi um grande desafio para a maioria dos alunos. Ensiná-la é um desafio para professores, tanto do ponto de vista do conteúdo matemático quanto do pedagógico. Grande parte dos alunos da educação básica apresenta dificuldade em interpretar enunciados simples, em observar padrões e até mesmo em efetuar as quatro operações. Os

¹ Mestrando do MPEM do IME-USP.

² Professora orientadora do Departamento de Matemática do IME-USP.

³ Referencial teórico utilizado neste trabalho.

métodos tradicionais de ensino, via explanação unilateral, têm se mostrado ineficientes no que tange o aprendizado dos objetos matemáticos, fazendo com que a maioria dos alunos perca o interesse pelo estudo de Matemática. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de ensino de logaritmos que foge do método tradicional, via atividades de investigação, que tentam aguçá-lo a curiosidade do aluno, ajudando-o a fazer pequenas descobertas que servirão como estímulo para o aprendizado, além de alimentar no aluno a confiança em sua capacidade de aprender, perceber padrões, levantar hipóteses e tentar comprová-las.

3. Objetivos

Foram desenvolvidas duas sequências didáticas com base na investigação matemática que também tentam resgatar as ideias originais da criação do conceito de logaritmo, por meio de tabelas de progressão aritmética e progressão geométrica. Uma das sequências é direcionada a professores de Matemática e a outra é destinada a alunos do ensino médio. Ambas têm como fio condutor a descoberta das propriedades dos logaritmos, via progressões aritméticas e geométricas, com o objetivo de um aprendizado de logaritmo de modo significativo. A sequência para os alunos é mais simples. A dos professores leva a questionamentos um pouco mais profundos, principalmente no que se refere à noção de base do logaritmo.

4. Motivação

Em geral, os logaritmos são apresentados aos alunos por meio da definição abstrata como sendo a solução de uma equação exponencial cuja incógnita é o expoente.

Nós acreditamos que essa introdução não seja eficiente e que esse assunto possa ser introduzido de outro modo, por meio de tabelas, mostrando a importância histórica da descoberta de suas propriedades. Este estudo está em consonância com algumas pesquisas em Educação Matemática que tratam da elaboração de investigações para desenvolver o conhecimento matemático.

5. Referencial Teórico e Metodológico

Para nortear este trabalho, tomamos por base o processo de Investigação Matemática, mais especificamente as pesquisas realizadas pelo professor João Pedro da Ponte, da Universidade de Lisboa, que tratam da importância da investigação para um aprendizado sólido e eficaz de Matemática.

As técnicas usuais de ensino, muitas vezes limitadas a uma exposição verbal do professor sobre um certo tópico seguida pela resolução de exercícios de fixação, são eficientes somente a uma minoria dos alunos, deixando as aulas sem sentido àqueles que não possuem aptidão e estímulo pela Matemática. Há também, muito frequentemente, aulas sobre procedimentos para obtenção de resultados, sem o cuidado com compreensão dos significados dos conceitos envolvidos ou dos problemas a serem resolvidos. Aulas podem ser complementadas com discussões entre alunos, estudos sobre a História da Matemática, resolução de problemas que envolvam raciocínio não linear e repetitivo. Acreditamos que o processo investigativo ajuda o aluno a compreender de modo mais profundo e aprender aquele conceito que se deseja ensinar.

O termo “investigar” em Matemática tem por sinônimos “averiguar”, “buscar”, “indagar” e “pesquisar”, cabendo ao aluno utilizar seus próprios processos de investigação.

Quando o aluno se depara com um problema que requer investigação, é desafiado a observar padrões num conjunto de dados e, por intermédio de perguntas pertinentes colocadas pelo professor, organizá-los de forma coerente para que a situação possa ser trabalhada. Desta forma, o aluno é desafiado a formular conjecturas, correndo o risco de estarem corretas ou não.

Novamente o professor, que figura como orientador de estudos, aguça no aluno a necessidade de validar ou refutar essas conjecturas. Caso sejam refutadas, outras hipóteses podem ser formuladas e, sendo validadas, abre-se um leque para que novas questões sejam investigadas.

Confrontado com problemas que envolvem a investigação de um objeto matemático, o aluno tem desafiada sua capacidade de planejamento e de autoaprendizagem, sendo provocado a reconhecer padrões, transitar entre as diferentes formas de representação do objeto a ser estudado e, por intermédio de um processo lento e progressivo, muitas vezes feito em paralelo com outras atividades, tende a se tornar confiante e elaborar seu próprio roteiro de resolução para determinadas situações. Essa provocação pode fazer com que o aluno e o professor mudem sua concepção do processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

“Na minha perspectiva, “investigar” não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos e que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos.” (Ponte, 2003, p.2)

“Numa investigação não há resultados conhecidos para os alunos e não se espera que estes alcancem a resposta correta, ou que todos encontrem a mesma resposta, mas procura-se que explorem as possibilidades, formulem conjecturas e se convençam a si próprios e aos outros das suas descobertas” (Pirie, 1987)

6. Desenvolvimento da pesquisa

Neste trabalho são propostos muitos exemplos numéricos e atividades que despertam a curiosidade dos estudantes. As sequências didáticas apresentadas trabalham a observação de propriedades existentes em várias tabelas (como a Tabela 1), com números q e r variados.

| PG | PA |
|----------|------|
| 1 | 0 |
| q | r |
| q^2 | $2r$ |
| q^3 | $3r$ |
| q^4 | $4r$ |
| • | • |
| • | • |
| • | • |
| q^n | Nr |
| Tabela 1 | |

Pelo processo de investigação matemática, os estudantes devem notar que o produto dos elementos situados nas linhas i e j na coluna da PG corresponde à soma dos respectivos elementos na coluna da PA. Analogamente, observa-se que a divisão de dois elementos na

coluna da PG corresponde à subtração na coluna da PA, ainda a k -ésima potência de um elemento na linha i da PG corresponde a k vezes o elemento da mesma linha da PA e a raiz de índice k de um elemento na coluna da PG corresponde à divisão por k do elemento correspondente na coluna da PA. É primordial que as tabelas contêmam o número 1 na coluna da PG em correspondência com o número 0 na coluna da PA.

Definição de logaritmo e de sua base

As observações nas tabelas levam a conjecturas que devem ser validadas por meio de atividades específicas. Após essa validação é ensinada a importância histórica da descoberta dessas propriedades no século XVII e as tabelas apresentadas passam a receber o nome de “tabelas de logaritmos”. Nessa tabela, a cada número à esquerda corresponde o seu logaritmo à direita. Assim, na tabela 1 por exemplo, $\log(q^k) = kr$.

Note-se que a expressão *base do logaritmo* não foi mencionada até o momento. Na sequência didática apresentada aos professores, foi discutida a questão da existência de vários logaritmos para um mesmo número. Por exemplo, na tabela 2, tem-se $\log 3 = 2$ e, na tabela 3, $\log 3 = 1$. Para esclarecer essa aparente inconsistência, foi ensinado que, de fato, existem vários logaritmos, que são distinguidos por sua *base*. A base do logaritmo foi definida como sendo o número na coluna da PG que corresponde ao número 1 na coluna da PA. Já na sequência didática apresentada aos alunos, escolheu-se mostrar a vantagem de se trabalhar com tabelas nas quais a razão r da PA é $r = 1$. Neste caso, o logaritmo de q elevado a k é k , ou seja, o logaritmo é o expoente e o número q é convenientemente chamado *base do logaritmo* (ver tabela 4).

| PG | PA | PG | PA | PG | PA |
|----------|----|----------|----|----------|-----|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | q | 1 |
| 9 | 4 | 9 | 2 | q^2 | 2 |
| 27 | 6 | 27 | 3 | q^3 | 3 |
| 81 | 8 | 81 | 4 | ... | ... |
| 243 | 10 | 243 | 5 | q^n | N |
| Tabela 2 | | Tabela 3 | | Tabela 4 | |

Observe como essa definição é poderosa: na tabela 3, por exemplo, sabe-se que $\log_3 9 = 2$ e $\log_3 27 = 3$. Para se calcular $\log_3(9 \cdot 81)$, pode-se fazer $\log_3 9 + \log_3 81 = 2 + 3 = 5$.

As sequências didáticas também mostraram o problema de tornar as tabelas mais completas. Com isso foram propostas atividades de interpolação de meios aritméticos e geométricos nas tabelas, isto é, à média geométrica dos elementos situados nas linhas i e j da coluna da PA corresponde a média geométrica dos respectivos termos na coluna da PA. Este processo é muito trabalhoso e enaltece o grande trabalho feito por John Napier e Henry Briggs para completar suas tabelas.

7. Resultados já obtidos

Nesta pesquisa já foram obtidos os seguintes resultados:

- Aplicação de uma oficina sobre logaritmos, de doze horas, ministrada no CAEM (Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do IME – USP) no segundo semestre de 2014, com público-alvo formado por professores de Matemática. Nesta oficina foi aplicada uma primeira versão da sequência didática para professores, sobre o ensino de logaritmos;
- Análise das dificuldades encontradas pelos participantes;
- Reelaboração da sequência didática para professores, levando em conta a análise anterior e algumas sugestões dos participantes;
- Elaboração de outra sequência didática, voltada para alunos do ensino médio;
- Aplicação da segunda sequência didática a alunos da rede pública de ensino no município de São Paulo.

8. Próximos passos

Para a finalização de nosso trabalho ainda se faz necessário analisar os resultados da aplicação da sequência didática para alunos do ensino médio.

9. Considerações finais

O professor que ministra aulas de Matemática mediante fórmulas e procedimentos pode desfavorecer a construção intelectual do aluno por não proporcionar a oportunidade desse aluno observar e descobrir propriedades, ampliando seu nível de percepção, raciocínio e crítica. Acreditamos ser papel do professor despertar a curiosidade de seus alunos, promovendo atividades de investigação nas quais as dúvidas e erros serão inerentes. Tais erros devem ser respeitados, compreendidos e sanados com a ajuda do professor. Afinal, o papel do professor é, entre outros, o de auxiliar na formação integral do aluno como ser humano capaz de resolver situações desafiadoras e conflituosas.

Destaca-se que, para que as práticas inovadoras estejam em contínuo desenvolvimento e para que os professores tenham condições de organizar suas aulas de acordo com os objetivos de ensino e as necessidades de seus alunos, é necessário que as políticas públicas invistam na formação continuada dos professores e garantam condições organizacionais e estruturais para que a escola seja um local privilegiado de formação e desenvolvimento profissional.

10. Referências

PONTE, J. P.; FERREIRA, C.; BRUNHEIRA, L.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J.

Investigando as Aulas de Investigações Matemáticas. Publicado originalmente em inglês com o título **Investigating mathematical investigations**, incluído no livro de ABRANTES, P, PORFÍRIO, J. & BAÍA, M (Orgs.), 1998.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. **Actas do ProfMat**, Lisboa: APM, 2003.

PIRIE, Susan. *Mathematical Investigations in your Classroom*. Basingstoke, Macmillan, 1987.