Exame de Qualificação – Mestrado em Matemática Aplicada

O objetivo do Exame de Qualificação de Mestrado e do Exame Básico de Doutorado Direto é avaliar a maturidade do aluno na área.

Consiste de um exame oral, de aproximadamente 90 minutos, baseado no conteúdo de três disciplinas escolhidas pelo estudante, com anuência do seu orientador, dentro do seguinte elenco:

GRUPO 1

MAP-5711 – Equações Diferenciais Ordinárias;

MAP-5712 – Equações Diferenciais Parciais;

MAP-5729 – Introdução à Análise Numérica;

MAP-5747 – Otimização não Linear;

MAP-5925 – Introdução aos Sistemas Dinâmicos;

MAP-5856 – Uma Introdução à Teoria Ergódica;

GRUPO 2

MAP-5879 – Cálculo em Variedades;

MAT-5711 – Cálculo Avançado;

MAT-5714 – Funções Analíticas;

MAT-5721 – Introdução à Análise Funcional;

MAT-5730 – Álgebra Linear;

MAT-5751 – Geometria Diferencial.

Dentre as três disciplinas que definem o exame é obrigatória a escolha de pelo menos duas disciplinas do GRUPO 1, não sendo permitida a escolha de Introdução aos Sistemas Dinâmicos em conjunto com Uma Introdução à Teoria Ergódica. A cada uma destas disciplinas corresponde uma lista de tópicos, especificados a seguir:

MAP-5711 – Equações Diferenciais Ordinárias

1. Teoremas de existência e unicidade, teoremas de continuidade e diferenciabilidade em relação às condições iniciais e parâmetros.
2. Equações diferenciais lineares; Teorema de Liouville; Sistemas lineares hiperbólicos no plano e no Rn; Atratores e Repulsores.

Pós-Graduação - CCP-MAP
Rua do Matão, 1010 | Cidade Universitária | São Paulo-SP | CEP 05508-090
Tel: (11) 3091.6122 | www.ime.usp.br

3. Equações autônomas; retrato de fase; conjuntos invariantes, singularidades (selas, nós, focos).
4. Estabilidade de Liapunov; Teoremas de Estabilidade e de Estabilidade Assintótica de Liapunov; Teorema de Instabilidade de Cetaev, Estabilidade por primeira aproximação.
5. Órbitas periódicas, transformação de Poincaré; ciclos estáveis no plano e fórmula de Poincaré.
6. Teorema de Poincaré-Bendixon e aplicações, equação de Lienard.

MAP-5712 – Equações Diferenciais Parciais

1. Equações de primeira ordem: curvas características, equações quasilineares, equações não lineares.
2. Classificação das equações de segunda ordem semilineares, forma normal, características, Propagação de singularidades, equação da corda vibrante.
3. O problema de Cauchy para equações de ordem mais alta, superfícies características, teorema de Cauchy-Kowalewski (enunciado), o exemplo de H. Lewy (enunciado).
4. Equações elípticas: problemas de Dirichlet e de Neumann, solução fundamental, função de Green, funções harmônicas, fórmula de Poisson, resolução do problema de Dirichlet para a bola e para o semi-espaço, teorema da media e sua recíproca, teorema de Liouville, princípio do máximo, princípio da reflexão, desigualdade de Harnack.
5. Equações hiperbólicas: equação da onda na reta e num intervalo; equação da onda em dimensão mais alta: método de Fourier e das ondas esféricas; fórmula de Kirchoff, princípio de Huygens: domínios de influência e de dependência, abaixamento de ordem; princípio de Duhamel.
6. Equações parabólicas: solução fundamental e regularidade; principio de Duhamel; solução da equação do calor na reta e numa semi-reta; equação do calor em regiões limitadas: princípio do máximo, irreversibilidade, unicidade para trás (Evans).

MAP-5729 – Introdução à Análise Numérica

1. Resolução de equações não-lineares: métodos de ponto fixo, Newton.

2. Resolução de sistemas lineares: métodos diretos e iterativos.

3. Teoria de aproximação pelo método dos mínimos quadrados: discreto, contínuo e polinômios ortogonais.

4. Interpolação polinomial (métodos de Lagrange e de Hermite), splines polinomiais, estimativas de erro.

5. Integração numérica: métodos baseados em polinômios e splines, quadratura Gaussiana, métodos baseados em extrapolação (método Romberg).

6. Resolução numérica de equações diferenciais ordinárias: problemas a valores iniciais e de contorno; métodos de passo simples e de diferenças finitas.

MAP-5747 – Otimização não Linear

1. Otimização em um conjunto abstrato, em conjuntos convexos e otimização sem restrições.
2. Otimização com restrições de igualdade e desigualdade. Condições de otimalidade.
3. Métodos numéricos para otimização irrestrita. Métodos de descida e busca linear.
4. Métodos numéricos para otimização irrestrita. Métodos do tipo Newton.
5. Métodos numéricos para otimização com restrições. Método de restrições ativas.
6. Métodos numéricos para otimização com restrições. Métodos de penalidades.

MAP-5925 – Introdução aos Sistemas Dinâmicos

1. Conceitos básicos: Dinâmica em espaços métricos compactos. Recorrência, pontos não-errantes, transitividade, minimalidade, conjugação topológica.
2. Exemplos de sistemas dinâmicos e suas propriedades básicas: rotações do círculo; duplicação de ângulo no círculo; shift em 2 símbolos; exemplo de Denjoy (e conjuntos de Cantor); ferradura de Smale e transformação do padeiro; Anosovs lineares no toro.
3. Entropia topológica. Definição por conjuntos (n,epsilon)-separados, definições equivalentes e cálculo de exemplos.
4. Introdução à dinâmica em dimensão 1. Número de rotação e classificação de Poincaré; Teorema de Denjoy; família quadrática e cascata de duplicação de período.

5. Introdução a aspectos métricos: Transformações que preservam medida e exemplos; recorrência de Poincaré; ergodicidade e Teorema Ergódico de Birkhoff (enunciado).
6. Introdução à dinâmica diferenciável. Hiperbolicidade de pontos periódicos; estabilidade de pontos periódicos hiperbólicos; Teorema de Grobman-Hartman, estabilidade estrutural, conjuntos hiperbólicos e Axioma A (enunciado).

MAP-5856 – Uma Introdução à Teoria Ergódica

1. Medidas Invariantes: definição e exemplos. Teorema de recorrência de Poincaré: versão mensurável e topológica. Existência: Teorema Krylov-Bogolyubov.
2. Medidas Ergódicas. Caracterização: definições equivalentes. Existência e exemplos. Medidas mixing e weak mixing.
3. Teoremas Ergódicos. Teorema Ergódico de von Neumann: demonstração e aplicações. Teorema ergódico de Birkhoff: demonstração e aplicações.
4. Medidas unicamente ergódicas. Caracterização e exemplos. Rotações irracionais.
5. Teorema da Decomposição Ergódica. Enunciado, exemplos e aplicações.
6. Entropias. Entropia topológica: definição via coberturas abertas, conjuntos geradores e conjuntos separados. Cálculo da entropia, propriedades e exemplos. Entropia Métrica: Entropia de uma partição, propriedades e partições geradoras. Teorema de Kolmogorov-Sinai. Princípio Variacional.

MAP-5879 – Cálculo em Variedades

1. Variedades Diferenciáveis e Fibrados Vetoriais: Conceitos Básicos. 2. Fibrado Tangente e seus descendentes.
3. Campos Vetoriais e Teorema do Fluxo.
4. Campos Tensoriais e Formas Diferenciais; Derivada de Lie e Derivadas Exterior. 5. Integração de Formas Diferenciais e Teorema de Stokes.
6. Conexões Lineares: Derivada Covariante e Tensor Curvatura.

MAT-5711 – Cálculo Avançado

1. Teorema da função inversa e implícita. Formas locais das imersões e submersões. Teorema do posto.
2. Superfícies no espaço euclidiano (Teorema da imagem inversa de valor regular). Espaço tangente.
3. Integração no Rn: Teorema de Fubini e Teorema de mudança de variáveis para integrais.
4. Produto exterior. Formas diferenciais no Rn. Diferencial exterior.
5. Integração de formas diferenciais em superfícies.
6. Teorema de Stokes em variedades com bordo.

MAT-5714 – Funções Analíticas

1. Séries de potências, funções analíticas.
2. Equações de Cauchy-Riemann, funções holomorfas, equação de Laplace, funções harmônicas.
3. Teorema de Cauchy.
4. Singularidades isoladas, séries de Laurent, teorema de resíduos, aplicações.
5. Princípio dos zeros isolados, teorema de Liouville, teorema de Rouchet.
6. Transformações conformes, teorema da aplicação de Riemann.

MAT-5721 – Introdução à Análise Funcional

1. Espaços de Hilbert, bases ortonormais, exemplos.
2. Espaços de Banach, desigualdades de Hölder e de Minkowski, exemplos.
3. Funcionais lineares contínuos e transformações lineares contínuas sobre espaços de Banach e de Hilbert, espaço dual e espaço bidual, espaços reflexivos, teorema da representação de Riesz.
4. Operadores lineares, operadores compactos, operadores de Fredholm, exemplos.
5. Teorema de Hahn-Banach e teorema de Banach-Steinhaus. Princípio da Limitação Uniforme.
6. Teoremas da aplicação aberta e do gráfico fechado, teorema de Stone-Weierstrass.

MAT-5730 – Álgebra Linear

1. Sistemas lineares, matrizes e eliminação gaussiana, decomposição LU, espaços vetoriais, bases, dimensão.
2. Produto interno, ortogonalidade, quadrados mínimos, processo de Gram-Schmidt, decomposição QR, transformação de Householder.
3. Funções multilineares, produto tensorial, determinantes, propriedades e fórmulas para cálculo de determinantes.
4. Autovalores e autovetores, similaridade, aplicações a equações diferenciais lineares, operadores normais, diagonalização, Teorema Espectral.
5. Formas bilineares e quadráticas. Matrizes definidas positivas, decomposição em valores singulares (SVD).
6. Formas canônicas: teorema da decomposição primária, forma racional e forma de Jordan.

MAT-5751 – Geometria Diferencial

1. Estudo local das curvas no R3. Teorema Fundamental de Existência e Unicidade.
2. Estudo local das superfícies no R3, curvaturas principais.
3. Formas quadráticas fundamentais: Teorema Egregium de Gauss.
4. Paralelismo, derivação covariante, coordenadas geodésicas.
5. Superfícies de curvatura constante.
6. Teorema de Gauss-Bonnet.