Exame de Admissão. Mestrado em Estatística. IME-USP - Novembro 2018.

NOME COMPLETO: ______________________________________

Observações:
1. A prova é INDIVIDUAL e SEM CONSULTA com duração de 3 horas.
2. SEMPRE JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS.
3. Todas as questões têm o mesmo valor. O candidato deve escolher 4 questões entre as 6 para serem corrigidas.
Indique aqui as questões escolhidas (IMPORTANTE!): _________________________.

1. Seja X_n uma variável aleatória distribuída segundo o modelo exponencial de parâmetro $n, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ (isto é, a função densidade de probabilidade de X_n é dada por $f_n(x) = ne^{-nx}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$, em que $\mathbb{I}_A(x)$ é uma função-indicadora: $\mathbb{I}_A(x) = 1$ se $x \in A$, e $\mathbb{I}_A(x) = 0$ se $x \notin A$). Seja

$$Y_n = \frac{e^{X_n}}{1 + e^{X_n}},\ n \in \mathbb{N}.$$

   (a) (1,25 pontos) Obtenha a função de distribuição acumulada de Y_n, $F_n(t) = \mathbb{P}(Y_n \leq t)$, e a função densidade de probabilidade dela.

   (b) (1,25 pontos) Para cada $t \in \mathbb{R}$, obtenha $\lim_{n\to\infty} F_n(t)$.

2. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = 2(1-x)\mathbb{I}_{(0,1)}(x), \text{ isto é } X \sim Beta(1,2).$$

Seja $Y = [(n+1)X]$: o maior inteiro menor ou igual a $(n+1)X, n \in \mathbb{N}$. Determine

(a) (2,5 pontos) $\mathbb{P}(Y = y), y \in \{0, \ldots, n\}$.

3. Sejam n variáveis aleatórias $Y_1, \ldots, Y_n$ independentes tais que Y_i tem distribuição normal com média βx_i, em que $\beta \in (-\infty, \infty)$ e x_i, $i = 1, \ldots, n$, são valores conhecidos e não-aleatórios, e variância conhecida $\sigma^2 = 1$ para $i = 1, \ldots, n$.

   (a) (1,25 pontos) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança para β. Calcule o seu viés e erro quadrático médio.

   (b) (1,25 pontos) Apresente condições para as quais o estimador seja consistente. Construa o intervalo de confiança de 95% para o parâmetro β.

4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $X_1 \sim Pois(\theta)$, $\theta > 0$. Defina $S = \mathbb{I}_{\{0\}}(X_1)$ e $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   (a) (0,5 pontos) Verifique se T é uma estatística suficiente para o modelo estatístico em questão (utilize a definição de estatísticas suficientes).

   (b) (1,0 pontos) Encontre $T_1 = \mathbb{E}_\theta(S|T)$ e verifique se T_1 é um estimador eficiente.

   (c) (1,0 pontos) Mostre que $\mathbb{V}ar_\theta(T_1) \leq \mathbb{V}ar_\theta(S)$ e calcule $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{V}ar_\theta(T_1)$.

5. Seja (X, Y) um vetor aleatório com função de densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x, y) = 6x\mathbb{I}_S(x, y), \text{ onde } S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2_+ : a + b \leq 1\}.$$

Sejam $U = X$ e $V = X + Y$.

(a) (1,25 pontos) Obtenha a função densidade conjunta do vetor (U, V).

(b) (1,25 pontos) Obtenha a função densidade condicional de U dado $V = v, v \in (0, 1)$. Obtenha $\mathbb{E}(U \mid V = v)$ e $\mathbb{V}ar(U \mid V = v)$.

6. Sejam X e Y variáveis aleatórias tais que $Y \sim Geo(\theta), 0 < \theta < 1$, (isto é $\mathbb{P}(Y = y) = (1-\theta)^{y-1}\theta\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(y)$) e $X \mid Y = y \sim U(\{y, y+1, y+2\}), y \in \mathbb{N}$.

   (a) (1,25 pontos) Obtenha $\mathbb{E}(X)$.

   (b) (1,25 pontos) Calcule a distribuição de $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

Tabela da Distribuição Normal Padrão
$P(Z<z)$

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000