Exame de Admissão. Mestrado em Estatística. IME-USP - Fevereiro 2019.

NOME COMPLETO: ______________________________________

Observações:
1. A prova é INDIVIDUAL e SEM CONSULTA com duração de 3 horas.
2. SEMPRE JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS.
3. Todas as questões têm o mesmo valor. O candidato deve escolher 4 questões entre as 6 para serem corrigidas.
Indique aqui as questões escolhidas (IMPORTANTE!): _________________________.

1. Seja X uma variável aleatória distribuída segundo o modelo Geométrico de parâmetro $\theta, 0 < \theta < 1$ (isto é, $\mathbb{P}_\theta(X = j) = (1-\theta)^{j-1}, j = 1, 2, \ldots$)
   (a) Mostre que a probabilidade de X assumir valor ímpar é maior que $1/2$, para qualquer $\theta > 0$.
   (b) Seja $Y := (1-\theta)^X$. Obtenha o valor esperado de Y e verifique que $\mathbb{E}_\theta(Y) \neq 1/2$, para cada $\theta > 0$.
   (c) Mostre que $\mathbb{P}_\theta(X > t) = (1-\theta)^t, t \in \mathbb{N}$.

2. Seja X uma variável aleatória distribuída segundo o modelo uniforme no intervalo $[0, 2]$. Seja Y o número inteiro mais próximo de X. Assim, por exemplo, para $X = 0.2, Y(0.2) = 0$; para $X = 0.9, Y(0.9) = 1$; e para $X = 1.4, Y(1.4) = 1$.
   (a) Obtenha a distribuição de Y.
   (b) Seja $Z := |X - Y|$. Obtenha a função densidade de probabilidade de Z.
   (c) Calcule $\mathbb{E}(Z)$ e $\mathbb{V}ar(Z)$.

3. Seja $X = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória simples do modelo Binomial θ e probabilidade de sucesso $1/2$ (isto é, $\mathbb{P}_\theta(X_i = t) = \binom{\theta}{t}\frac{1}{2^\theta}\mathbb{I}_{\{0,\ldots,\theta\}}(t)$, $\theta \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, n$, em que $\mathbb{I}_A(t) = 1$, se $t \in A$ e 0 caso contrário).
   (a) Mostre que $\delta_1^{(n)}(X) := 2\overline{X}_n$ é não-viesado para θ. Mostre que a sequência $(\delta_1^{(n)})_{n\geq 1}$ é consistente para θ. (isto é, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta(|\delta_1^{(n)}(X) - \theta| > \varepsilon) = 0$, para cada $\theta \in \mathbb{N}$ e para qualquer $\varepsilon > 0$).
   (b) Seja $\delta_2^{(n)}(X) := \max\{X_1, \ldots, X_n\} = X_{(n)}$. Mostre que a sequência $(\delta_2^{(n)})_{n\geq 1}$ é consistente para θ. (Dica: calcule $\mathbb{P}_\theta(X_{(n)} = \theta)$).
   (c) Para $n = 3$, $X_1 = 2, X_2 = 15, X_3 = 1$, qual estimador, $\delta_1^{(n)}(X)$ ou $\delta_2^{(n)}(X)$, você prefere para estimar θ? Justifique.

4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_i \sim N(3, \theta i), i = 1, \ldots, n$, em que $\theta > 0$ é o parâmetro do modelo.
   (a) Obtenha $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ estatística suficiente para θ.
   (b) Obtenha um intervalo de confiança (teórico) para θ com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, baseado na estatística T do item anterior.
   (c) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança para θ. Para $n = 3$, $X_1 = 4, X_2 = 3, X_3 = 6, X_4 = -5, X_5 = 8$, qual é a estimativa de máxima verossimilhança para θ?

5. Seja (X, Y) um vetor aleatório discreto com função de probabilidade dada por
$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \frac{1}{2n+1}\frac{\binom{n}{x}\binom{n}{y}}{\binom{2n}{x+y}}\mathbb{I}_{\{0,\ldots,n\}}(x)\mathbb{I}_{\{0,\ldots,n\}}(y),$$
   para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo.
   (a) Obtenha a distribuição condicional de X dado $X + Y = t, t \in \{0, \ldots, 2n\}$. Qual é o valor de $\mathbb{E}(X \mid X + Y = t)$? (Dica: a esperança da hipergeométrica (N_1, N_2, n) é $\frac{nN_1}{N_1+N_2}$.)
   (b) Obtenha $\mathbb{E}(X)$.

6. Seja (X, Y) um vetor aleatório contínuo distribuído uniformemente sobre o quadrado de vértices $A = (0, 2), B = (0, 0), C = (2, 0)$ e $D = (2, 2)$. Sejam D_1, D_2, D_3 e D_4 as distâncias do ponto (X, Y) aos lados AB, BC, CD e AD do quadrado, respectivamente (a distância entre um ponto e uma linha é definida como a menor distância entre um ponto fixo e qualquer ponto da linha). Seja $D := \min\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$.
   (a) Calcule $\mathbb{P}(D > 2/3)$.
   (b) Obtenha a função densidade de probabilidade da variável aleatória D. Qual é o valor esperado de D?