Exame de Admissão. Mestrado em Estatística. IME-USP - Fevereiro 2018.

NOME COMPLETO: ______________________________________

Observações:
1. A prova é INDIVIDUAL e SEM CONSULTA com duração de 3 horas.
2. SEMPRE JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS.
3. Todas as questões têm o mesmo valor. O candidato deve escolher 4 questões entre as 6 para serem corrigidas.
Indique aqui as questões escolhidas (IMPORTANTE!): _________________________.

1. Sejam X, Y e Z variáveis aleatórias independentes com distribuição de Bernoulli com parâmetros $\theta_1, \theta_2, (\theta_1 + \theta_2)/2$, respectivamente. Para estimar $\gamma = (\theta_1 + \theta_2)/2$ dois procedimentos foram propostos:

   (i) selecionar uma amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ de tamanho n de X e calcular $\overline{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$. Selecionar uma amostra aleatória $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de tamanho n de Y e calcular $\overline{Y} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Usar $(\overline{X} + \overline{Y})/2$ para estimar γ.

   (ii) selecionar uma amostra aleatória $(Z_1, \ldots, Z_{2n})$ de tamanho $2n$ de Z e calcular $\overline{Z} = [1/(2n)]\sum_{i=1}^{2n} Z_i$. Usar $\overline{Z}$ para estimar γ.

   (a) (1,0 ponto) Verifique se os estimadores propostos em (i) e (ii) são não viciados.

   (b) (1,5 ponto) Baseando-se no erro quadrático médio, determine qual dos dois estimadores é mais indicado para estimar γ. Por quê?

2. Seja X uma variável aleatória com distribuição geométrica, $X \sim Geo(\theta)$, ou seja, $\mathbb{P}(X = j) = (1-\theta)^j\theta, j = 0, 1, \ldots$. Seja $Y = sen\frac{\pi X}{2}$.

   (a) (1,0 ponto) Obtenha $\mathbb{P}(Y = 0)$.

   (b) (1,5 ponto) Obtenha a distribuição condicional de $\frac{X}{2}$ dado $Y = 0$.

3. Seja (X, Y) um vetor aleatório cuja função de probabilidade é dada por

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \frac{(1/2)^y}{y} \mathbb{I}_{\{1,\ldots,y\}}(x) \cdot \mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(y),$$

em que $\mathbb{I}_A(u)$ é função indicadora, ou seja $\mathbb{I}_A(u) = 1$, se $u \in A$ e $\mathbb{I}_A(x) = 0$ caso contrário.

(a) (1,5 ponto) Obtenha a distribuição condicional de X dado $Y = y, y = 1, 2, \ldots$. Encontre o valor esperado de X dado $Y = y$, $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$. Calcule $\mathbb{P}(\mathbb{E}(X \mid Y) \leq 2)$.

(b) (1,0 ponto) Calcule $\mathbb{P}(\mathbb{V}ar(X \mid Y) = 0)$.

Obs.: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com função densidade de probabilidade

$$f(x;\theta) = \exp^{-(x-\theta)}, \quad \theta < x < \infty; \quad \theta > 0.$$

(a) (1,0 ponto) Defina **quantidade pivotal**. Verifique que $Q = X_{(1)} - \theta$ é uma quantidade pivotal, sendo $X_{(1)} = \text{minimo}(X_1, \ldots, X_n)$.

(b) (1,0 ponto) Utilize a quantidade pivotal Q e mostre que qualquer intervalo da forma $(X_{(1)} - b, X_{(1)} - a)$ com $0 < a < b$ satisfazendo $\exp^{-na} - \exp^{-nb} = 1 - \alpha$ é um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança $1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$.

(c) (0,5 ponto) Use (b) para mostrar que

$$\left(X_{(1)} + \frac{\log(\alpha/2)}{n}; X_{(1)} + \frac{\log(1-\alpha/2)}{n} \right)$$

é um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1/2$.

5. Seja (X, Y) um vetor aleatório com função densidade conjunta

$$f(x,y) = \frac{\Gamma(a_1+a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1-1}(1-x)^{a_2-1} \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1+a_2)} y^{a_1+a_2-1} e^{-by} \mathbb{I}_{(0,1)}(x) \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(y),$$

em que $\mathbb{I}_A(u)$ é função indicadora, ou seja $\mathbb{I}_A(u) = 1$, se $u \in A$ e $\mathbb{I}_A(x) = 0$ caso contrário. Sejam $U = XY, V = (1-X)Y$.

(a) (1,5 ponto) Qual é a densidade conjunta do vetor (U, V)?

(b) (1 ponto) U e V são independentes?

6. Um professor preparou para uma turma de 40 estudantes 10 versões diferentes de uma mesma prova (4 cópias de cada). Sejam X_1 o número da versão (de 1 a 10) que a aluna Maria recebe e X_2 o número da versão que o aluno João recebe, supondo que as provas serão distribuídas ao acaso para os 40 alunos. Seja $\overline{X} = (X_1 + X_2)/2$.

   (a) (1 ponto) X_1 e X_2 são identicamente distribuídas? X_1 e X_2 são independentes? Justifique.

   (b) (1 ponto) Encontre $\mathbb{E}(X_1)$, $\mathbb{V}ar(X_1)$ e $\mathbb{C}ov(X_1, X_2)$.

   (c) (0,5 ponto) Encontre $\mathbb{E}(\overline{X}), \mathbb{V}ar(\overline{X})$.

   Obs.: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.