Exame de Admissão. Mestrado em Estatística. IME-USP - Novembro 2017.

NOME COMPLETO: ____________________________________

Observações:
1. A prova é INDIVIDUAL e SEM CONSULTA com duração de 3 horas.
2. SEMPRE JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS.
3. Todas as questões têm o mesmo valor. O candidato deve escolher 4 questões entre as 6 para serem corrigidas.
Indique aqui as questões escolhidas (IMPORTANTE!): ________________________.

1. Suponha que n componentes eletrônicos serão colocados em teste e seja T_i o tempo de vida do componente i, para $i = 1, \dots, n$. Admita que $T_1, \dots, T_n$ sejam independentes e que T_i tenha uma distribuição exponencial de média $c_i\lambda$, em que $\lambda > 0$ é desconhecido e $c_i > 0$, para $i = 1, \dots, n$, são números fixados (conhecidos).

   (a) (0,5 ponto) Mostre que a distribuição de $(T_1, \dots, T_n)$ faz parte da família exponencial unidimensional.

   (b) (1,0 ponto) A estatística $\sum_{i=1}^{n} T_i/c_i$ é suficiente? Justifique.

   (c) (1,0 ponto) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de λ e mostre que é não viciado.

   OBS. Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição exponencial de média $\theta > 0$, se sua função densidade de probabilidade é da forma $f(x;\theta) = (1/\theta)\exp(-x/\theta)$, para $x > 0$.

2. Uma urna contém 1 bola branca e 1 bola verde. Uma bola é retirada da urna "ao acaso", registrando-se sua cor. Essa bola é devolvida à urna juntamente com n bolas da mesma cor da bola retirada da urna, $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$. Em seguida, retira-se uma nova bola da urna "ao acaso", registrando-se sua cor. Seja $X_i = 1$, se a i-ésima bola retirada da urna é branca e $X_i = 0$, caso contrário, $i = 1, 2$.

   (a) (1,0 ponto) Obtenha $\mathbb{P}(X_1 \neq X_2)$.

   (b) (1,5 ponto) Obtenha o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2. Qual é o valor desse coeficiente quando $n = 0$? Qual é o valor limite desse coeficiente quando $n \to \infty$?

3. Seja (X_1, X_2) um vetor aleatório contínuo com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{\log x_1 + \log x_2}\mathbb{I}_{(0,1)}(x_1)\mathbb{I}_{(0,1)}(x_2).$$

   Sejam $U_1 = -\log X_1$ e $U_2 = -\log X_1 - \log X_2$.

   (a) (1,5 ponto) Encontre a distribuição conjunta do vetor (U_1, U_2).

   (b) (1,0 ponto) Obtenha distribuição condicional de U_1 dado $U_2 = t, t > 0$.

4. A distribuição de variável aleatória X, que depende do parâmetro θ desconhecido, é dada pela tabela

x	-1	0	2
$P(X = x)$	θ	$2\theta - 0{,}2$	$1{,}2 - 3\theta$

   Temos a amostra $x_1 = 0, x_2 = 2$.

   (a) (0,5 ponto) Qual é o espaço paramétrico mais amplo possível para esse problema?

   (b) (1,0 ponto) Encontre estimativa $\hat{\theta}^{(ML)}$ pelo método de máxima verossimilhança.

   (c) (1,0 ponto) Encontre estimativa $\hat{\theta}^{(MM)}$ pelo método de momentos.

5. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias com função de probabilidade dada por

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \binom{x_1 + x_2}{x_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1+x_2+1}\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(x_1)\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(x_2).$$

   (a) (1,0 ponto) Obtenha a distribuição condicional de X_1 dado $X_1 + X_2 = t, t \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$.

   (b) (1,5 ponto) Obtenha $\mathbb{E}(X_1)$. [Nota: Lembre que $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = 2^n$.]

6. Sejam $X_1, \dots, X_n$ independentes com a mesma distribuição $X_i \sim U[0,1]$. Sejam $m_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ e $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

   (a) (1,0 ponto) Achar a esperança de variável $Y_n = M_n - m_n$

   (b) (1,5 ponto) Encontrar a função distribuição acumulada de variável nm_n, $F_n(x) = \mathbb{P}(nm_n \leq x)$. Obtenha a função distribuição acumulada limite $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$. Existe variável aleatória cuja função distribuição acumulada é F? Se sim, qual é sua média?