Exame de Admissão. Mestrado em Estatística. IME-USP - Novembro 2016.

NOME COMPLETO: ______________________________________

Observações:
1. A prova é INDIVIDUAL e SEM CONSULTA com duração de 3 horas.
2. SEMPRE JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS.
3. Todas as questões têm o mesmo valor. O candidato deve escolher 4 questões entre as 6 para serem corrigidas.
Indique aqui as questões escolhidas (IMPORTANTE!): _________________________.

1. Uma seguradora tem 10^4 clientes. Cada cliente paga por ano uma apólice de 12 unidades monetárias (u.m.). A probabilidade de que um cliente sofra sinistro em um ano é $6 \cdot 10^{-3}$. O pagamento da seguradora ao cliente em caso de sinistro é de 10^3 u.m.

   (a) (0,5 ponto) Seja X o número de sinistros em um ano. Qual é a distribuição de X?

   (b) (2,0 pontos) Usando aproximação normal calcule a probabilidade de que o lucro da seguradora exceda $4 \cdot 10^4$ u.m. em um ano.

2. Três pontos são escolhidos aleatoriamente no intervalo $[0, 1]$. Seja X_i o i-ésimo ponto escolhido, $i = 1, 2, 3$.

   (a) (0,5 ponto) Qual é a probabilidade de que o terceiro ponto caia entre os outros dois?

   (b) (1,0 ponto) Mostre que a função distribuição acumulada de $D = |X_1 - X_2|$ é

$$F(d) = \begin{cases} 0, & \text{para } d < 0 \\ 1 - (1-d)^2, & \text{para } 0 \leq d < 1 \\ 1, & \text{para } d \geq 1. \end{cases}$$

   (c) (1,0 ponto) Encontre a média e a variância de D.

3. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_{n_1})$ uma amostra aleatória de tamanho n_1 da variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e seja $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ uma amostra aleatória de tamanho n_2 da variável aleatória $Y \sim N(\mu, \sigma^2/4)$ sendo $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ independentes. Se o interesse é estimar μ (admitindo σ^2 conhecido) responda:

   (a) (0,5 ponto) Qual deve ser a relação entre os tamanhos das amostras n_1 e n_2 para que os estimadores $\overline{X}_{n_1} = (1/n_1)\sum_{i=1}^{n_1} X_i$ e $\overline{Y}_{n_2} = (1/n_2)\sum_{i=1}^{n_2} X_i$ tenham a mesma variância?

   (b) (1,0 ponto) Sendo $n_1 = n_2 = n$, obtenha o estimador de máxima verossimilhança de μ baseado na amostra completa, com $2n$ observações.

   (c) (1,0 ponto) Sendo $n_1 = n_2 = n$, compare o estimador de máxima verossimilhança ($\widehat{\mu}_1$) e o estimador $\widehat{\mu}_2 = (\overline{Y}_n + \overline{X}_n)/2$ sob o ponto de vista de viés e erro quadrático médio. Qual dos dois estimadores é mais indicado? Justifique.

4. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com função densidade de probabilidade

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} x^{-\left(\frac{1}{\theta}+1\right)}, \quad x > 1, \ \ \theta > 0.$$

(a) (1,25 ponto) Mostre que a distribuição de X pertence a uma família exponencial unidimensional e mostre que $\sum_{i=1}^{n} \log X_i$ uma estatística suficiente para θ.

(b) (1,25 ponto) Mostre que $(1/\theta)\sum_{i=1}^{n} \log X_i$ é uma quantidade pivotal e utilize esta quantidade pivotal para construir um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança γ $(0 < \gamma < 1)$.

5. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias contínuas tais que a função densidade de probabilidade de X_n, f_n, é dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}x^n, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{n+1}{2}(2-x)^n, & \text{se } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $Y_n = \min\{X_n, 2 - X_n\}, n \geq 1$.

(a) (1,5 ponto) Obtenha a função de distribuição acumulada de Y_n, F_n, $n \geq 1$, dada por $F_n(y) := P(Y_n \leq y), y \in \mathbb{R}$.

(b) (1,0 ponto) Para cada $y \in \mathbb{R}$ ache o limite $F(y) := \lim_{n\to\infty} F_n(y)$. Exiba a variável aleatória cuja função de distribuição acumulada é $F(y)$.

6. Seja Y uma variável aleatória distribuída segundo o modelo geométrico de parâmetro θ, $0 < \theta < 1$, isto é, $\mathrm{P}(Y = y) = \theta(1-\theta)^{y-1}$, para $y = 1, 2, \ldots$. Suponha ainda que X, dado $Y = y$, é distribuída segundo o modelo binomial de parâmetros y e $1/2$. Determine:

   (a) (1,25 ponto) a probabilidade do evento $\{X = 1\}$;

   (b) (1,25 ponto) a distribuição condicional de Y dado $X = 1$.