Exame de Admissão. Mestrado em Estatística. IME-USP - 10 de Novembro 2015.

Nome do Candidato:

Observações:
1. A prova é INDIVIDUAL e SEM CONSULTA com duração de 3 horas.
2. SEMPRE JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS.
3. Todas as questões têm o mesmo valor. O candidato deve escolher 4 questões entre as 6 para serem corrigidas. Indique aqui as questões escolhidas (IMPORTANTE!): __________________________.

1. Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de média $\theta, \theta > 0$, desconhecida. Sejam X_1 e X_2 uma amostra aleatória de X. Mostre que $T = X_1 + 2X_2$ não é uma estatística suficiente para θ.

2. Suponha que 600 lâmpadas novas (sem uso) são colocadas em funcionamento até falhar. Considere ainda que o tempo de vida de cada uma dessas lâmpadas é distribuído segundo o modelo exponencial de média 1000 horas. Determine a probabilidade aproximada de que ao menos 250 dessas lâmpadas tenham duração superior a 916 horas. Considere $e^{-0.916} = 0.4$. Especifique as suposições da sua solução.

3. Duas urnas contêm bolas brancas e verdes. A urna I contém três bolas brancas e uma bola verde. A urna II possui uma bola branca e oito bolas verdes. Um experimento consiste em escolher uma bola *ao acaso* da urna I e colocá-la na urna II e, em seguida, escolher uma bola *ao acaso* da urna II e depositá-la na urna I. Seja X o número de bolas brancas na urna I após a conclusão do experimento e Y o número de bolas verdes na urna I encerrado o experimento. Determine:

   (a) a distribuição conjunta de X e Y;

   (b) a variância de Y;

   (c) o coeficiente de correlação entre X e Y.

4. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad 0 \leq x \leq \theta,$$

em que $\theta > 0$ é um parâmetro desconhecido. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X.

(a) Encontre o estimador do método dos momentos de θ.

(b) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ.

(c) Algum dos dois estimadores obtidos nos itens acima pode fornecer estimativas não plausíveis para θ?

(d) Calcule os vícios dos dois estimadores. São não-viciados?

5. Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, seja X_n uma variável aleatória com distribuição de probabilidade dada por

$$P(X_n = j) = \frac{2j}{n(n+1)}, \quad j = 1, ..., n.$$

Obtenha:

(a) a função de distribuição acumulada da variável aleatória $Y_n = X_n/n$;

(b) o limite, em distribuição, da sequência $(Y_n)_{n \geq 1}$.

6. Seja Y uma variável aleatória distribuída segundo o modelo Poisson de parâmetro $\theta, \theta > 0$. Suponha ainda que X, dado $Y = y$, tem distribuição geométrica com parâmetro $1/(1+y)$. *(Obs: variável ξ tem distribuição geométrica com parâmetro p, se $P(\xi = n) = (1-p)^{n-1}p, \quad n = 1, 2, \ldots$.)* Determine:

   (a) a probabilidade do evento $X = 1$;

   (b) a distribuição condicional de Y dado $X = 1$;

   (c) a esperança de X.