Exame de Admissão. Mestrado em Estatística. IME-USP - Fevereiro 2017.

NOME COMPLETO: ______________________________________

Observações:
1. A prova é INDIVIDUAL e SEM CONSULTA com duração de 3 horas.
2. SEMPRE JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS.
3. Todas as questões têm o mesmo valor. O candidato deve escolher 4 questões entre as 6 para serem corrigidas.
Indique aqui as questões escolhidas (IMPORTANTE!): __________________________.

1. Seja X uma variável aleatória com distribuição geométrica, $X \sim Geo_0(\theta)$, ou seja, $\mathbb{P}(X = j) = (1-\theta)^j\theta, j = 0, 1, \ldots$. Seja Y o resto da divisão de X por 3.
   (a) (1,0 ponto) Achar a distribuição de Y.
   (b) (1,5 ponto) Achar a distribuição condicional de $Z = \frac{X-Y}{3}$ dado que $Y = y, y = 0, 1, 2$.

2. (a) (1,0 ponto) Dê a definição de **estatística suficiente**. Interpete do ponto de vista de inferência estatística. Justifique bem sua resposta.
   (b) (1,5 ponto) Considere o problema de se fazer inferência sobre p, a probabilidade desconhecida de ocorrência de cara numa moeda. Um experimento é realizado da seguinte forma: a moeda é lançada até o aparecimento da primeira cara e conta-se o número de coroas obtidas; repete-se o procedimento independentemente n vezes. Seja X_i o número de coroas observadas na i-ésima repetição. A partir da **definição de estatística suficiente**, mostre que a estatística $\sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente.

3. A distribuição conjunta de duas variáveis X, Y é dada pela densidade conjunta

$$f(x,y) = \frac{n2a^2x^{n-1}}{y^{n+3}}\mathbf{1}_{[0,y]}(x)\mathbf{1}_{(a,\infty)}(y),\ a > 0, n \in \{1, 2, \ldots\}.$$

   (a) (1,0 ponto) Obter a função de distribuição acumulada de X dado $Y = y$, $y > a$, isto é, achar $F^{(n)}(t) := \mathbb{P}(X \leq t \mid Y = y),\ t \in \mathbb{R}$.
   (b) (0,5 ponto) Obter $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$.
   (c) (1,0 ponto) Obter limite $\lim_{n\to\infty} F^{(n)}(t), t \in \mathbb{R}$. Exiba uma variável aleatória cuja função de distribuição acumulada coincide com esse limite $\lim_{n\to\infty} F^{(n)}(t), t \in \mathbb{R}$.

4. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X que tem distribuição de Rayleigh com função densidade de probabilidade

$$f(x;\sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\},\ x > 0,$$

   em que $\sigma^2 > 0$ é desconhecido. (Obs. $\mathbb{E}(X) = \sigma\sqrt{\pi/2}$, $\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2(4-\pi)/2$ e $\mathbb{V}ar(X^2) = 4\sigma^4$.)
   (a) (1,0 ponto) Encontre o estimador de máxima verossimilhança e o estimador de método dos momentos (baseado na média de X) de σ^2 e verifique se são não viciados.
   (b) (1,5 ponto) Usando aproximação normal para o estimador de máxima verossimilhança, obtenha um intervalo de confiança para σ^2 com coeficiente de confiança aproximado de 95%.

5. Seja (X, Y) vetor aleatório tal que

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \int_0^1 \theta^{x+y}(1-\theta)^{2-(x+y)}f(\theta)d\theta,$$

   em que $f(\cdot)$ um função da densidade de probabilidade qualquer concentrada em $(0,1)$ e $x, y \in \{0, 1\}$.
   (a) (0,5 ponto) Mostre que $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{E}(\xi^2)$, onde ξ é variável aleatória contínua com a densidade $f(\cdot)$.
   (b) (2,0 pontos) Mostre que $cov(X, Y) \geq 0$.

6. (a) (1,0 ponto) Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f_X e função geradora de momentos $\varphi_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja $Y = e^X$. Provar que o n-ésimo momento de Y vale $\varphi_X(n), n \in \mathbb{N}$.
   (b) (1,5 ponto) Seja U uma v.a. distribuída segundo o modelo log-normal com parâmetros μ e σ^2 (isto é, $\log(U) \sim N(\mu, \sigma^2)$). Obtenha a variância de U. (Dica: se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\varphi_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$).