Exame de Admissão. Mestrado em Estatística.
IME-USP - 02 de Fevereiro 2016.

Observações:
1. A prova é INDIVIDUAL e SEM CONSULTA com duração de 3 horas.
2. SEMPRE JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS.
3. Todas as questões têm o mesmo peso. O candidato deve escolher 4 questões entre as 6 para serem corrigidas.
Indique aqui as questões escolhidas (IMPORTANTE!): __________________________.

1. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma distribuição normal de média zero e variância $\sigma^2 > 0$ desconhecida.
   (a) Mostre que a distribuição de $(X_1, \ldots, X_n)$ faz parte da família exponencial unidimensional e mostre que $\sum_{i=1}^n X_i^2$ é uma estatística suficiente para σ^2.
   (b) Construa um intervalo de confiança para σ^2 com coeficiente de confiança γ $(0 < \gamma < 1)$ que dependa dos dados apenas através da estatística suficiente $\sum_{i=1}^n X_i^2$.

2. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo o modelo Poisson de parâmetro $\theta, \theta > 0$. Para cada $n \geq 1$, seja T_n o produto das variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_n$: $T_n = X_1 X_2 \ldots X_n$.
   (a) Qual é o valor esperado de T_n?
   (b) Qual é a probabilidade do evento $\{T_n = 0\}$?
   (c) Mostre que para ε qualquer positivo $\lim_{n\to\infty} P(T_n > \varepsilon) = 0$.

3. Uma urna contém três bolas brancas e uma bola verde. Uma bola é retirada ao acaso da urna, registrando-se a cor da bola extraída. Em seguida, a bola retirada é devolvida à urna juntamente com c bolas da mesma cor e, então, uma segunda bola é retirada ao acaso da urna e registrada sua cor. Seja $X_i = 1$, se a i-ésima bola extraída da urna é verde e $X_i = 0$, se a i-ésima bola retirada da urna é branca, $i = 1, 2$. Determine:
   (a) a distribuição conjunta de X_1 e X_2;
   (b) o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2. Qual é o limite desse coeficiente de correlação quando $c \to \infty$?

4. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade
$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^2}, \quad \theta \leq x < \infty,$$
   em que $\theta > 0$ é um parâmetro desconhecido. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de X.
   (a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ.
   (b) Obtenha o viés do estimador de máxima verossimilhança. Este estimador é não viciado?

5. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e tais que, para cada n, X_n tem a densidade $n(1-x)^{n-1}$, se $x \in (0,1)$ e 0 caso $x \notin (0,1)$ (isto é, X_n é distribuído segundo o modelo Beta de parâmetros 1 e n). Para cada $n \geq 1$, seja $T_n = (1 - X_n)^n$.
   (a) Para cada $n \geq 1$, obtenha a distribuição de T_n.
   (b) Calcule, aproximadamente, a probabilidade do evento $\{T_1 + T_2 + \ldots + T_{108} > 50\}$.

6. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes tais que X é distribuída segundo o modelo Normal de média 0 e variância 1, e Y é distribuída segundo o modelo Gama de parâmetros $n/2$ e $1/2$, em que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$. Veja nota abaixo. Seja T uma nova variável aleatória dada por $T = X(Y/n)^{-1/2}$.
   (a) Obtenha a esperança e a variância de T.
   (b) Obtenha a função densidade de probabilidade de T.

   Nota: Dizemos que uma variável aleatória tem a distribuição Gama com parâmetros κ e θ, sendo κ e θ números reais positivos, se sua função densidade de probabilidade é $f(x;\kappa,\theta) = \frac{\theta^\kappa x^{\kappa-1} e^{-\theta x}}{\Gamma(\kappa)}$, $x > 0$; em que $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0$.