Exame de Admissão 2015
Mestrado em Estatística e Probabilidade
IME-USP - 03/02/2015

OBSERVAÇÕES :

1) A prova é INDIVIDUAL, SEM CONSULTAS e com duração de 2h30min.

2) SEMPRE JUSTIFIQUE SUAS RESPOSTAS.

1. **Seja** $\mathcal{F}(n,m)$ **o conjunto das funções com domínio** $\{1,...,n\}$ **e contra-domínio** $\{1,...,m\}$, **com** $n,m \in \{3,4,5,...\}$ **fixados tais que** $n < m$. **Uma função** f **é escolhida 'ao acaso' em** $\mathcal{F}(n,m)$. **Determine**

(a) a probabilidade da função escolhida f **satisfazer** $f(1) \leq f(2)$.

(b) a probabilidade da função escolhida f **ser estritamente crescente. NOTA:** $f : A \to B$ **é estritamente crescente se** $\forall x, y \in A$, **com** $x < y$, $f(x) < f(y)$.

2. **Seja** $(X_n)_{n\geq 1}$ **uma sequência de variáveis independentes tais que,** $\forall n \geq 1$, X_{2n-1} **é distribuída segundo o modelo uniforme em** $(0,1)$ **e** X_{2n} **é distribuída segundo o modelo Beta de parâmetros** 2 **e** 1, **isto é, a função densidade de probabilidade de** X_{2n} **é dada por**

$$f(t) = 2t,\ 0 < t < 1, \quad \text{e} \quad f(t) = 0, \quad \text{caso contrário}.$$

(a) Determine a probabilidade do evento $\{X_1 + X_2 > 3/2\}$.

(b) Determine uma aproximação para a probabilidade do evento

$$\{\sum_{i=1}^{380} I_{[3/2,\infty)}(X_{2i-1} + X_{2i}) > 95\} \ ,$$

onde $I_A(.)$ **denota a função indicadora do conjunto** A **(isto é,** $I_A(x) = 1$ **se** $x \in A$ **e** $I_A(x) = 0$, **caso contrário). OBSERVAÇÃO: Você pode exibir a resposta em termos da função de distribuição do modelo Normal** $(0,1)$.

3. **Uma urna contém** N **bolas marcadas com o número** θ **e** N **bolas marcadas com o número** 2θ, $N \geq 3$ **e** $\theta > 0$. **Quatro bolas são extraídas 'ao acaso' desta urna, COM reposição, e são registrados** X: **o menor número observado e** Y: **o maior valor observado. Seja** $S = X + Y$.

(a) Determine o valor de $k > 0$ tal que $E(kS) = \theta$, $\forall \theta > 0$.

(b) Determine a variância de kS.

4. Suponha que X, dado $Y = y$, $y \in \{1, 2, 3, ...\}$, seja distribuída segundo o modelo binomial de parâmetros y e p, $0 < p < 1$. Considere ainda que Y é distribuída segundo o modelo geométrico de parâmetro p.

(a) Obtenha a esperança da variável aleatória X.

(b) Especifique a distribuição condicional de Y dado $X = 0$.

5. Para cada $n \geq 1$, seja X_n uma variável aleatória distribuída segundo o modelo exponencial de média n. Determine F_n: a função de distribuição de $X_n - 10[\frac{X_n}{10}]$, onde $[u]$ denota o maior inteiro menor que ou igual a u. Qual é o limite de F_n quando $n \to +\infty$?