Prova de admissão ao mestrado em Estatística e Probabilidade
IME - USP (04/02/2014)
Instruções
A prova é individual, sem consultas e com duração de 2h30min.
Justifique cuidadosamente suas respostas.
Deixe seu documento de identidade em lugar visível e acessível ao professor.

1. (2 pontos) Sejam A, B e C eventos de um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. Prove, ou dê um contra exemplo, para as afirmações:

   A) Se A e B são independentes, então

   $$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C).$$

   B) Se $P(B|A^c) = P(B|A)$, então A e B são independentes.

2. (2 pontos) Um Capital de vinte (20) unidades monetárias, em milhares de reais, devem ser investidos em quatro (4) tipos de ações. Os investimentos mínimos, em inteiros, para cada tipo de ação são 2, 2, 3 e 4 unidades monetárias. Quantas estratégias de investimentos podemos considerar se:

   A) Todo o capital deve ser investido.

   B) Qualquer quantidade do Capital pode ser investida.

3. (2 pontos) Sejam Z_1, Z_2 e Z_3 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição exponencial padrão. Defina as variáveis aleatórias $X = \min\{Z_1, Z_3\}$ e $Y = \min\{Z_2, Z_3\}$.

   A) Determine $P(X > x, Y > y)$.

   B) Calcule $P(X = Y)$.

   C) Calcule a esperança condicional $E[X|Y = 2]$.

4. (2 pontos) Um ponto é escolhido, casual e uniformemente, sobre o lado de um triângulo equilátero com comprimento igual a uma unidade. Qual a função de distribuição da distância entre o ponto escolhido e o vértice oposto?

5. (2 pontos) Um sistema eletrônico com um grande número de componentes independentes e identicamente distribuidos funciona se, e somente se, o número de componentes funcionando for maior do que 1000. Os estados dos componentes são representados por variáveis aleatórias de Bernoulli, $X_i, 1 \leq i \leq N$, que assumem valores iguais a 1, se o componente i funciona e iguais a 0 se o componente i não funciona, com $P(X_i = 1) = 0,92$.

   Para otimizar a confiabilidade do sistema o número N de componentes pode ser maior do que 1000, permitindo redundâncias, contudo, por limitações no orçamento, o número de componentes do sistema é estimado por

   $$N = \min\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i \geq 1000\}.$$

   Qual a probabilidade aproximada de que N seja maior do que 1100?