MAT349 - INTRODUÇÃO À LÓGICA
HTTP://WWW.IME.USP.BR/MAT/349
SLIDES APRESENTADOS EM AULA

GLÁUCIO TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
IME - USP

1. AULA 1

SLIDE 1.1. *Programa Resumido do Curso*

- *Cálculo Proposicional*
- *Cálculo de Predicados de Primeira Ordem*
- *Noções sobre Teorias Formalizadas*

SLIDE 1.2. *Bibliografia Sugerida*

- *B. Castrucci,* Introdução à Lógica Matemática*, Nobel, 1975.*
- *E. Mendelson,* Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand, 1964.*
- *J. Zimbarg,* Introdução à Lógica Matemática*, Impa, 1973.*

SLIDE 1.3. *Objetivos*

- *Familiarização com o emprego de linguagens formais;*
- *Introdução ao Cálculo de Predicados de 1a. Ordem como base lógica para o tratamento de teorias axiomáticas.*

SLIDE 1.4. *O que é a Lógica?*

A Lógica é a ciência das leis necessárias do entendimento e da razão.

(I. Kant)

SLIDE 1.5. *A Lógica Matemática: é a parte da Lógica que trata do estudo de argumentos*

válidos no discurso matemático.

SLIDE 1.6. *Silogismos*

PREMISSA: *Todos os coelhos gostam de cenouras.*
PREMISSA: *Sócrates é um coelho.*
CONCLUSÃO: *Sócrates gosta de cenouras.*

PREMISSA: *Todos os homens são mortais.*
PREMISSA: *Alguns animais são mortais.*

CONCLUSÃO: *Todos os homens são animais.*

SLIDE 1.7. *Brevíssima Introdução Histórica*

ANTIGÜIDADE GREGA:

Aristóteles(384-322 a.C.):: *silogismos; primórdios do cálculo de predicados.*
Escola dos estóicos e dos megários:: *Euclides de Megara, Zenão, Crisipo.*

LÓGICA MODERNA:

Leibnitz (sec. XVII): *precursor da lógica moderna.*
Séculos XIX e XX:: *Boole, De Morgan, Peirce, Frege, Church, Russel, Whitehead, Hilbert, Gödel, Tarski.*

SLIDE 1.8. *Lógica Objeto versus Lógica do Observador*

LÓGICA OU LINGUAGEM OBJETO: *é a linguagem formal ou o sistema lógico formal que constitui o objeto de estudo.*

LÓGICA OU LINGUAGEM DO OBSERVADOR: *é a lógica, num sentido intuitivo ou informal, que se usa para estudar ou descrever a lógica objeto.*

SLIDE 1.9. *Sintaxe versus Semântica*

SINTAXE: *é o significante lingüístico.*

SEMÂNTICA: *é o significado denotado pela sintaxe.*

2. AULA 2

SLIDE 2.1. *Cálculo Proposicional É a parte do Cálculo de Predicados de Primeira Or-*

dem na qual se estuda a validade de argumentos do ponto de vista das ***conexões*** *entre as sentenças do discurso, sem levar em conta a estrutura interna de cada sentença.*

SLIDE 2.2. *Proposições*

- *Uma* **proposição** *ou* **sentença** *é uma afirmação passível de assumir valor lógico* ***verdadeiro*** *ou* ***falso****;*
- *Toda proposição é verdadeira ou falsa (princípio do terceiro excluído);*
- *Uma proposição não pode ser verdadeira E falsa (princípio da não-contradição).*

SLIDE 2.3. *Exemplos de Proposições*

- $2 > 1$*;*
- $5 = 1$*;*
- *O céu é azul.*

SLIDE 2.4. *Fórmulas*

DEFINIÇÃO 2.1. *Os* ***conectivos proposicionais*** *são* negação *(¬),* conjunção *(∧),* disjunção *(∨),* implicação *(→) e* bi-implicação *(↔).*

DEFINIÇÃO 2.2. *Uma* **linguagem proposicional** *L é um conjunto* $\{p, q, r, \ldots\}$*, cujos elementos chamam-se* **átomos proposicionais** *ou* **fórmulas atômicas***.*

SLIDE 2.5. *Fórmulas*

DEFINIÇÃO 2.3. *O* **conjunto das** ***fórmulas*** *de* L *é definido indutivamente, através das seguintes regras:*

- *se* p *é uma fórmula atômica de* L*, então* p *é uma fórmula;*
- *se* A *é uma fórmula, então* $\neg A$ *é uma fórmula;*
- *se* A *e* B *são fórmulas, então* $A \wedge B$*,* $A \vee B$*,* $A \to B$ *e* $A \leftrightarrow B$ *são fórmulas.*

SLIDE 2.6. *Valoração*

DEFINIÇÃO 2.4. *Os* **valores lógicos** *são* V *(verdadeiro) e* F *(falso).*

DEFINIÇÃO 2.5. *Seja* L *uma linguagem proposicional. Uma* **atribuição** *de* L *é uma aplicação:*

$$M : \{\text{fórmulas atômicas de } L\} \to \{V, F\}$$

SLIDE 2.7. *Valoração*

LEMA 2.1. *Sejam* L *uma linguagem proposicional e* M *uma atribuição de* L*. Então existe uma única aplicação*

$$v_M : \{A \mid A \text{ fórmula de } L\} \to \{V, F\},$$

chamada **valoração** *de* L *induzida por* M*, satisfazendo as seguintes propriedades:*

- $$v_M(\neg A) = \begin{cases} V, & \text{se } v_M(A) = F \\ F, & \text{se } v_M(A) = V \end{cases}$$

SLIDE 2.8. *Valoração*

- $$v_M(A \wedge B) = \begin{cases} V, & \text{se } v_M(A) = V \text{ e } v_M(B) = V \\ F, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- $$v_M(A \vee B) = \begin{cases} V, & \text{se } v_M(A) = V \text{ ou } v_M(B) = V \\ F, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- $v_M(A \to B) = v_M(\neg A \vee B)$
- $v_M(A \leftrightarrow B) = v_M\big((A \to B) \wedge (B \to A)\big)$

SLIDE 2.9. *Fórmulas Tautológicas e Contra-Válidas*

DEFINIÇÃO 2.6. *Seja L uma linguagem proposicional. Diz-se que uma fórmula A de L é* **tautológica** *ou* **logicamente válida** *se, para toda atribuição M de L, tem-se $v_M(A) = V$. Diz-se que A é* **contra-válida** *se $\neg A$ for tautológica, i.e. se para toda atribuição M de L, tem-se $v_M(A) = F$.*

SLIDE 2.10. *Satisfabilidade, Conseqüência Lógica*

DEFINIÇÃO 2.7. *Sejam L uma linguagem proposicional M uma L-atribuição. Diz-se que M* **satisfaz** *uma L-fórmula A se $v_M(A) = V$.*

DEFINIÇÃO 2.8. *Sejam L uma linguagem proposicional S um conjunto de L-fórmulas. Diz-se que S é* **satisfatível** *se existir uma atribuição M que satisfaça todas as fórmulas de L.*

SLIDE 2.11. *Satisfabilidade, Conseqüência Lógica*

DEFINIÇÃO 2.9. *Sejam S um conjunto de fórmulas de uma linguagem proposicional L, e B uma L-fórmula. Diz-se que B é uma***conseqüência lógica** *de S se toda atribuição M que satisfaz S também satisfizer B, i.e. se $v_M(B) = V$ sempre que $v_M(A) = V$ para toda $A \in S$.* NOTAÇÃO: *$S \models B$.*

3. AULA 3

SLIDE 3.1. *Funções Verdade*

DEFINIÇÃO 3.1. *Uma* **função verdade** *de n argumentos é uma função $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.*

DEFINIÇÃO 3.2. *Seja L uma linguagem proposicional e A uma fórmula de L, na qual figuram os átomos $p_1, \ldots, p_n$ (nesta ordem). A* **função verdade de A** *é a função verdade obtida a partir da tabela verdade de $A(p_1, \ldots, p_n)$.*

SLIDE 3.2. *Fórmulas Tautológicas e Contra-Válidas (bis)*

DEFINIÇÃO 3.3. *Uma função verdade diz-se* **tautológica** *se sua imagem for $\{1\}$, e* **contra-válida** *se sua imagem for $\{0\}$.*

PROPOSIÇÃO 3.1. *Sejam L uma linguagem proposicional e A uma L-fórmula; então A é tautológica se, e somente se, sua função verdade o for.*

SLIDE 3.3. *Tautologias*

PROPOSIÇÃO 3.2. *Sejam L uma linguagem proposicional e A, B fórmulas de L. Se A e $A \to B$ são tautológicas, então B é tautológica.*

PROPOSIÇÃO 3.3 (PRINCÍPIO DA SUBSTITUIÇÃO). *Sejam L uma linguagem proposicional e $A(p_1, \ldots, p_n)$ uma L-fórmula na qual figuram os átomos $p_1, \ldots, p_n$. Sejam $A_1, \ldots, A_n$ L-fórmulas, e B a L-fórmula obtida a partir de A por substituição dos átomos p_i por A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Se A é tautológica, então B é tautológica.*

SLIDE 3.4. *Implicação e Equivalência Lógica*

DEFINIÇÃO 3.4. *Sejam L uma linguagem proposicional, A e B L-fórmulas. Diz-se que A* **implica logicamente (ou formalmente)** *B (*NOTAÇÃO: *$A \Rightarrow B$) se $A \to B$ for tautológica.*

DEFINIÇÃO 3.5. *Sejam L uma linguagem proposicional, A e B L-fórmulas. Diz-se que A é* **logicamente (ou formalmente) equivalente** *a B (*NOTAÇÃO: *$A \Leftrightarrow B$) se $A \leftrightarrow B$ for tautológica. Ou seja, se $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$.*

SLIDE 3.5. *Implicação e Equivalência Lógica*

PROPOSIÇÃO 3.4. *Sejam L uma linguagem proposicional e $\mathcal{F}L$ o conjunto das fórmulas de L. Então $\Leftrightarrow$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}L$ (i.e. uma relação binária reflexiva, simétrica e transitiva).*

PROPOSIÇÃO 3.5 (PRINCÍPIO DA SUBSTITUIÇÃO (BIS)). *Seja L uma linguagem proposicional. Se a L-fórmula B_1 é obtida a partir de A_1 por substituição de uma ou mais ocorrências da L-fórmula A por B, então $(A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1)$ é uma tautologia. Em particular, se $A \Leftrightarrow B$, então $A_1 \Leftrightarrow B_1$.*

SLIDE 3.6. *Exercícios*

(1) $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$
(2) $\overline{p \cdot q} \Leftrightarrow \bar{p} + \bar{q}$
(3) $\overline{p + q} \Leftrightarrow \bar{p} \cdot \bar{q}$
(4) $p \to q \Leftrightarrow \bar{p} + q$
(5) $p \to q \Leftrightarrow \bar{q} \to \bar{p}$
(6) $p \to (q \to r) \Leftrightarrow q \to (p \to r)$

SLIDE 3.7. *Exercícios*

(1) $p + \bar{p}$ *é tautológica*
(2) $p \cdot \bar{p}$ *é contra-válida*
(3) $p \Rightarrow p + q$
(4) $p \cdot q \Rightarrow p$
(5) $p \cdot q \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r)$
(6) $p \to q \Rightarrow (q \to r) \to (p \to s)$
(7) $p \to (r \cdot \bar{r}) \Rightarrow \bar{p}$
(8) $(p \to q) \cdot (r \to s) \Rightarrow p \cdot r \to q \cdot s$

4. AULA 4

SLIDE 4.1. *Convenções para Evitar Parênteses*

(1) *Se na fórmula figuram conectivos binários de um único tipo, omitem-se os parênteses por associação à esquerda.*
(2) *Ordenam-se os conectivos, em ordem decrescente de prioridade, como segue:* $\leftrightarrow, \to, \vee, \wedge, \neg$

SLIDE 4.2. *Propriedades da Conjunção*

(1) $p \cdot q \Leftrightarrow q \cdot p$
(2) $p \cdot (q \cdot r) \Leftrightarrow (p \cdot q) \cdot r$
(3) $p \cdot p \Leftrightarrow p$
(4) $p \cdot V \Leftrightarrow p$
(5) $p \cdot F \Leftrightarrow F$

SLIDE 4.3. *Propriedades da Disjunção*

(1) $p + q \Leftrightarrow q + p$
(2) $p + (q + r) \Leftrightarrow (p + q) + r$
(3) $p + p \Leftrightarrow p$
(4) $p + V \Leftrightarrow V$
(5) $p + F \Leftrightarrow p$

SLIDE 4.4. *Propriedades Distributivas*

(1) $p \cdot (q + r) \Leftrightarrow p \cdot q + q \cdot r$
(2) $p + (q \cdot r) \Leftrightarrow (p + q) \cdot (q + r)$

SLIDE 4.5. *Absorção*

(1) $p \cdot (p + r) \Leftrightarrow p$
(2) $p + (p \cdot r) \Leftrightarrow p$

SLIDE 4.6. *Negação e Regras de De Morgan*

(1) $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$
(2) $\overline{p \cdot q} \Leftrightarrow \bar{p} + \bar{q}$
(3) $\overline{p + q} \Leftrightarrow \bar{p} \cdot \bar{q}$

SLIDE 4.7. *Redução do Número de Conectivos Note que:*

(1) $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
(2) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
(3) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q)$

Conclusão: *Pelo princípio da substituição, toda fórmula proposicional é logicamente a uma fórmula na qual figuram os conectivos* $\neg$ *e* $\vee$*, apenas.*

SLIDE 4.8. *Redução do Número de Conectivos Note que:*

(1) $p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$
(2) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
(3) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$

Conclusão: *Pelo princípio da substituição, toda fórmula proposicional é logicamente a uma fórmula na qual figuram os conectivos* $\neg$ *e* $\wedge$*, apenas.*

SLIDE 4.9. *Redução do Número de Conectivos Note que:*

(1) $p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$
(2) $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$
(3) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg[(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p)]$

Conclusão: *Pelo princípio da substituição, toda fórmula proposicional é logicamente a uma fórmula na qual figuram os conectivos $\neg$ e $\rightarrow$, apenas.*

SLIDE 4.10. *Formas Normais Conjuntiva e Disjuntiva*

DEFINIÇÃO 4.1. *Diz-se que uma fórmula é* **normal conjuntiva** *se for uma conjunção de disjunções de átomos ou negações de átomos.*

DEFINIÇÃO 4.2. *Diz-se que uma fórmula é* **normal disjuntiva** *se for uma disjunção de conjunções de átomos ou negações de átomos.*

SLIDE 4.11. *Exercícios*

Encontre uma forma normal disjuntiva equivalente a:

(1) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
(2) $\neg(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg s \wedge q$

SLIDE 4.12. *Exercícios*

Encontre uma forma normal conjuntiva equivalente a:

(1) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$
(2) $\neg(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r \vee q$

SLIDE 4.13. *O Problema de Post*

Como determinar uma fórmula proposicional que tenha uma função verdade dada?

5. AULA 5

SLIDE 5.1. *Teorias Formais*

Uma **teoria formal** F *consiste de:*

(1) *Um conjunto enumerável de símbolos, chamados* símbolos de F*; uma seqüência finita de tais símbolos chama-se uma* **expressão** *de* F.
(2) *Um subconjunto do conjunto das expressões de* F*, chamado* **fórmulas** *de* F.

SLIDE 5.2. *Teorias Formais*

(3) *Um conjunto de fórmulas de* F*, chamadas* **axiomas** *de* F.
(4) *Um conjunto finito de relações* $R_1, \ldots, R_n$ *no conjunto das fórmulas de* F*, chamadas* **regras de inferência**.

SLIDE 5.3. *Demonstrações e Teoremas*

Seja F *uma teoria formal. Uma* **demonstração** *ou* **prova em** F *é uma seqüência* $A_1, \ldots, A_n$ *de fórmulas de* F *tais que, para* $1 \leqslant i \leqslant n$, A_i *é um axioma de* F *ou é conseqüência das fórmulas anteriores por meio de uma das regras de inferência de* F.

Um **teorema** *de F é uma fórmula A tal que existe uma demonstração em F (chamada* **demonstração de** *A) cujo último termo é A.*

SLIDE 5.4. *Teorias Axiomatizáveis/Não-Axiomatizáveis, Decidíveis/Não-Decidíveis*

- *Uma teoria formal F diz-se* **axiomatizável** *se existir um "procedimento efetivo" para testar se uma dada fórmula é um axioma de F.*
- *Uma teoria formal F diz-se* **decidível** *se existir um "procedimento efetivo" para testar se uma dada fórmula é um teorema de F.*

SLIDE 5.5. *Demonstrações e Teoremas Diz-se que uma fórmula A de F pode ser* **de-**

duzida *ou que é uma* **conseqüência** *de um conjunto M de fórmulas de F se existir uma seqüência $A_1, \ldots, A_n$ de fórmulas de F tal que $A_n = A$ e, para $1 \leqslant i \leqslant n$, uma das seguintes condições é verificada:*

(1) *A_i é um axioma de F;*
(2) *A_i pertence a M;*
(3) *A_i é conseqüência das fórmulas anteriores da seqüência por meio de uma das regras de inferência de F.*

SLIDE 5.6. *Demonstrações e Teoremas*

- *Uma tal seqüência chama-se* **demonstração** *ou* **prova** *de A a partir de M.*
- *As fórmulas de M chamam-se* **hipóteses** *ou* **premissas** *da prova.*
- NOTAÇÃO: $M \vdash A$.

SLIDE 5.7. *Propriedades da Noção de Conseqüência*

(1) *Se $\Gamma \subset \Delta$ e $\Gamma \vdash A$, então $\Delta \vdash A$.*
(2) *$\Gamma \vdash A$ se, e somente se, existe um $\Delta \subset \Gamma$* **finito** *tal que $\Delta \vdash A$.*
(3) *Se $\Delta \vdash A$ e, para cada fórmula B de Δ, $\Gamma \vdash B$, então $\Gamma \vdash A$.*

SLIDE 5.8. *Uma Teoria Axiomática Formal L para o Cálculo Proposicional*

(1) *Os símbolos de L são: $\neg$, $\rightarrow$, (,), e um conjunto enumerável de letras $a_1, a_2, a_3, \ldots$, chamadas* **letras proposicionais***.*
(2) *As* **fórmulas** *de L são definidas indutivamente por:*
  (a) *as letras proposicionais são fórmulas;*
  (b) *se A é uma fórmula, então $\neg A$ é uma fórmula;*
  (c) *se A e B são fórmulas, então $A \rightarrow B$ é uma fórmula.*

SLIDE 5.9. *Uma Teoria Axiomática Formal L para o Cálculo Proposicional*

(1) *Os axiomas de L são (onde A, B, C são fórmulas de L):*
  (I) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;
  (II) $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$
  (III) $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow [(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B]$
(2) *A única regra de inferência de L é a regra* **modus ponens** *(MP):*

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

SLIDE 5.10. *Uma Teoria Axiomática Formal L para o Cálculo Proposicional*

(1) *Os axiomas de L são (onde A, B, C são fórmulas de L):*
  (I) $A \to (B \to A)$;
  (II) $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$
  (III) $(\neg B \to \neg A) \to [(\neg B \to A) \to B]$

(2) *A única regra de inferência de L é a regra* **modus ponens** *(MP):*

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

SLIDE 5.11. *Definições de Novos Conectivos*

(1) $A \vee B \doteq \neg A \to B$.
(2) $A \wedge B \doteq \neg(A \to \neg B)$.
(3) $A \leftrightarrow B \doteq (A \to B) \wedge (B \to A)$.

SLIDE 5.12. *Um Teorema de L*

TEOREMA 5.1. $\vdash A \to A$

SLIDE 5.13. *Um Teorema de L*

Demonstração. A_1**:** $[A \to ((A \to A) \to A)] \to [(A \to (A \to A)) \to (A \to A)]$, pelo axioma (II)
A_2**:** $A \to ((A \to A) \to A)$, pelo axioma (I)
A_3**:** $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$, por (MP) de A_1 e A_2
A_4**:** $A \to (A \to A)$, pelo axioma (I)
A_5**:** $A \to A$ por (MP) de A_3 e A_4.

$\square$

SLIDE 5.14. *Exercícios*

(1) $\vdash (\neg A \to A) \to A$
(2) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$
(3) $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$
(4) $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

6. AULA 6

SLIDE 6.1. *Extensão do Conceito de Demonstração*

Seja F uma teoria formal. Diz-se que uma fórmula A de F pode ser **deduzida** *ou que é uma* **conseqüência** *de um conjunto M de fórmulas de F se existir uma seqüência $A_1, \ldots, A_n$ de fórmulas de F tal que $A_n = A$ e, para $1 \leqslant i \leqslant n$, uma das seguintes condições é verificada:*

(1) *A_i é um axioma de F, ou A_i pertence a M,* **ou** *A_i* **é um teorema de** *F* **já demonstrado***;*
(2) *A_i é conseqüência das fórmulas anteriores da seqüência por meio de uma das regras de inferência de F.*

SLIDE 6.2. *Teorema da Dedução*

TEOREMA 6.1. *Sejam L a teoria formal do cálculo proposicional, M um conjunto de fórmulas e A, B fórmulas de L. Se $M, A \vdash B$, então $M \vdash A \to B$.*

SLIDE 6.3. *Exercícios*

(1) (SILOGISMO HIPOTÉTICO) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$
(2) $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$
(3) $\vdash \neg\neg A \to A$
(4) $\vdash A \to \neg\neg A$
(5) $\vdash \neg A \to (A \to B)$
(6) (CONTRAPOSIÇÃO) $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
(7) (CONTRAPOSIÇÃO) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

SLIDE 6.4. *Exercícios*

(1) (SILOGISMO DISJUNTIVO) $A \vee B, \neg A \vdash B$
(2) (DILEMA CONSTRUTIVO) $A \to B, C \to D \vdash A \vee C \to B \vee D$
(3) (EXPORTAÇÃO) $A \vee B \to C \vdash A \to (B \to C)$
(4) (EXPORTAÇÃO) $A \to (B \to C) \vdash A \wedge B \to C$

SLIDE 6.5. *Exercícios*

(1) $P \to Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n, \neg Q_1, \ldots, \neg Q_{n-1} \vdash P \to Q_n$
(2) $P_1 \to Q, \ldots, P_n \to Q \vdash P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \to Q$

7. AULA 7

SLIDE 7.1. *Teorema da Completude no Cálculo Proposicional*

TEOREMA 7.1. *Sejam L a teoria formal do Cálculo Proposicional (vide aulas anteriores) e $\bar{L}$ a linguagem proposicional cujos átomos são as letras proposicionais de L. Então todo teorema de L é uma tautologia de $\bar{L}$.*

TEOREMA 7.2. *(da Completude)*
Toda tautologia de $\bar{L}$ é um teorema de L.

SLIDE 7.2. *Teorema da Completude no Cálculo Proposicional*

COROLÁRIO 7.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma expressão na qual figuram os conectivos $\neg, \to, \wedge, \vee, \leftrightarrow$, a qual é uma abreviação de uma fórmula $\mathcal{B}$ de L. Então $\mathcal{C}$ é uma tautologia se, e somente se, $\mathcal{B}$ é um teorema de L.*

COROLÁRIO 7.2. *L é consistente, i.e. não existe fórmula $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B}$ e $\neg\mathcal{B}$ são teoremas de L.*

9. AULA 9

SLIDE 9.1. *Quantificadores*

EXEMPLO (INFERÊNCIAS QUE NÃO "PERTENCEM" AO CÁLCULO PROPOSICIONAL):

(1) Todo amigo de Marta é amigo de Joana. Pedro não é amigo de Joana. Logo, Pedro não é amigo de Marta.
(2) Todos humanos são racionais. Alguns animais são humanos. Logo, alguns animais são racionais.
(3) O sucessor de todo inteiro par é ímpar. 2 é par. Logo, o sucessor de 2 é ímpar.

SLIDE 9.2. *Quantificadores*

EXEMPLO (INFERÊNCIAS QUE NÃO "PERTENCEM" AO CÁLCULO PROPOSICIONAL):

1.: Todo amigo de Marta é amigo de Joana. Pedro não é amigo de Joana. Logo, Pedro não é amigo de Marta.

$$\frac{(\forall\, x)\; \big(A(x,m) \to A(x,j)\big), \quad \neg A(p,j)}{\neg A(p,m)}$$

SLIDE 9.3. *Quantificadores*

EXEMPLO (INFERÊNCIAS QUE NÃO "PERTENCEM" AO CÁLCULO PROPOSICIONAL):

2.: Todos humanos são racionais. Alguns animais são humanos. Logo, alguns animais são racionais.

$$\frac{(\forall\, x)\; \big(H(x) \to R(x)\big), \quad (\exists x)(A(x) \wedge H(x))}{(\exists x)(A(x) \wedge R(x))}$$

SLIDE 9.4. *Quantificadores*

EXEMPLO (INFERÊNCIAS QUE NÃO "PERTENCEM" AO CÁLCULO PROPOSICIONAL):

3.: O sucessor de todo inteiro par é ímpar. 2 é par. Logo, o sucessor de 2 é ímpar.

$$\frac{(\forall\, x)\; \big(Z(x) \wedge P(x) \to I(s(x))\big), \quad I(b) \wedge P(b))}{I(s(b))}$$

SLIDE 9.5. *Linguagens de 1a. Ordem*

Uma **linguagem de 1a. ordem** $\mathcal{L}$ *consiste dos seguintes símbolos:*

(1) *Conectivos proposicionais* $\to, \neg$ *e o quantificador universal* $\forall$.
(2) *Símbolos de Pontuação:* $()$,
(3) *Um conjunto enumerável de símbolos,* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$*, chamados* variáveis.

SLIDE 9.6. *Linguagens de 1a. Ordem*

(4) *Um conjunto enumerável, possivelmente vazio, de* **símbolos funcionais** *de* $\mathcal{L}$*:* $\{f_k^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

(5) *Um conjunto enumerável, possivelmente vazio, de* **constantes individuais** *de* $\mathcal{L}$*:* $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
(6) *Um conjunto enumerável, não-vazio, de* **símbolos predicativos** *de* $\mathcal{L}$*:* $\{P_k^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

SLIDE 9.7. *Linguagens de 1a. Ordem com Igualdade*

Uma linguagem de primeira ordem diz-se uma **linguagem de 1a. ordem com igualdade** *se admitir o símbolo predicativo binário* $=$*.*

SLIDE 9.8. *Exemplos de Linguagens de 1a. Ordem com Igualdade*

L_G**:** *(*LINGUAGEM DA TEORIA DOS GRUPOS*): um símbolo funcional binário (“*$\cdot$*”) e uma constante individual (“*e*”).*
L_K**:** *(*LINGUAGEM DA TEORIA DOS CORPOS*): dois símbolos funcionais binários (“*$+$*”, “*$\cdot$*”) e duas constantes individuais (“*0*”, “*1*”).*
L_{KO}**:** *(*LINGUAGEM DA TEORIA DOS CORPOS ORDENADOS*): é obtida adicionando-se a* L_K *o símbolo predicativo binário “*$<$*”.*

SLIDE 9.9. *Exemplos de Linguagens de 1a. Ordem com Igualdade*

L_C**:** *(*LINGUAGEM DA TEORIA DOS CONJUNTOS*): um símbolo predicativo binário (“*$\in$*”).*
L_N**:** *(*LINGUAGEM DA ARITMÉTICA DE 1A. ORDEM*): é obtida adicionando-se a* L_{KO} *o símbolo funcional unário “*S*” (sucessor).*

SLIDE 9.10. *Termos*

Os **termos** *de uma linguagem de 1a. ordem* $\mathcal{L}$ *são definidos indutivamente por:*

T1: *variáveis e constantes individuais de* $\mathcal{L}$ *são termos;*
T2: *se* f_k^n *é um símbolo funcional de* $\mathcal{L}$ *e* $t_1, \ldots, t_n$ *são termos de* $\mathcal{L}$*, então* $f_k^n(t_1, \ldots, t_n)$ *é um termo de* $\mathcal{L}$*.*

SLIDE 9.11. *Fórmulas As* **fórmulas** *de uma linguagem de 1a. ordem* $\mathcal{L}$ *são definidas*

indutivamente por:

F1: *se* P_k^n *é um símbolo predicativo de* $\mathcal{L}$ *e* $t_1, \ldots, t_n$ *são termos de* $\mathcal{L}$*, então* $P_k^n(t_1, \ldots, t_n)$ *é uma fórmula de* $\mathcal{L}$ *(*FÓRMULA ATÔMICA*)*
F2: *se* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *são fórmulas e* x *é uma variável de* $\mathcal{L}$*, as seguintes expressões são fórmulas de* $\mathcal{L}$*:* $\neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\big((\forall\, x)\, \mathcal{A}\big)$

SLIDE 9.12. *Abreviações*

(1) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ *e* $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ *são definidas como anteriormente;*
(2) $\big((\exists x)\mathcal{B}\big)$ *é uma abreviação para* $\neg\big((\forall x)(\neg\mathcal{B})\big)$.

SLIDE 9.13. *Convenções para Eliminar Parêntesis Serão usadas as mesmas convenções*

anteriores; $\forall$ *e* $\exists$ *têm precedência intermediária entre* $\neg, \wedge, \vee$ *e* $\to, \leftrightarrow$.

10. AULA 10

SLIDE 10.1. *Interpretações de uma Linguagem de 1a. Ordem*

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem. Uma **interpretação** M *de $\mathcal{L}$ consiste de:*

(1) *Um conjunto não-vazio D, chamado* **domínio** *ou* **universo** *da interpretação.*
(2) *Para cada símbolo predicativo A_i^n de $\mathcal{L}$, uma relação n-ária $(A_i^n)^M$ em D.*

SLIDE 10.2. *Interpretações de uma Linguagem de 1a. Ordem*

(3) *Para cada símbolo funcional f_i^n de $\mathcal{L}$, uma operação n-ária $(f_i^n)^M$ em D, i.e. uma aplicação $(f_i^n)^M : D^n \to D$.*
(4) *Para cada constante individual a_i de $\mathcal{L}$, um elemento $(a_i)^M$ de D.*

SLIDE 10.3. *Exemplos de Interpretações*

(1) *Em L_N, tomamos a interpretação $\mathcal{N}$ com domínio $\mathbb{N}$ e: $(+)^{\mathcal{N}}$, $(\cdot)^{\mathcal{N}}$, $(<)^{\mathcal{N}}$ a soma, multiplicação e relação de ordem usuais de $\mathbb{N}$; $0^{\mathcal{N}} \doteq 0 \in \mathbb{N}$, $1^{\mathcal{N}} \doteq 1 \in \mathbb{N}$ e $S^{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $n \mapsto n+1$.*
(2) *Em L_G, a interpretação com domínio $\mathbb{N}$ e $(\cdot)^{\mathcal{N}}$ dada por $(a,b) \mapsto \sup\{a,b\}$.*

SLIDE 10.4. *Comprimento de uma Fórmula*

DEFINIÇÃO 10.1. *O comprimento de uma fórmula A de $\mathcal{L}$, $\operatorname{cp}(A)$, define-se indutivamente por:*

(1) *se A é atômica, $\operatorname{cp}(A) \doteq 1$;*
(2) *se A é da forma $B \to C$, $\operatorname{cp}(A) \doteq \operatorname{cp}(B) + \operatorname{cp}(C)$;*
(3) *se A é da forma $\neg B$ ou $(\forall x)B$, $\operatorname{cp}(A) \doteq \operatorname{cp}(B) + 1$.*

SLIDE 10.5. *Variáveis Livres e Ligadas*

DEFINIÇÃO 10.2. *Uma ocorrência de uma variável x numa fórmula A diz-se* **ligada** *se (i) for a ocorrência de x em "$(\forall x)$" ou (ii) ocorrer no escopo de "$(\forall x)$". Caso não seja ligada, a ocorrência diz-se* **livre**.

Exemplo 10.1. (1) $A_1^2(x_1,x_2) \to (\forall x_1)A_1^1(x_1)$
(2) $(\forall x_1)\big(A_1^2(x_1,x_2) \to (\forall x_1)A_1^1(x_1)\big)$

SLIDE 10.6. *A Definição de Verdade de Tarski*

DEFINIÇÃO 10.3. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem e M uma interpretação de $\mathcal{L}$. Uma* **avaliação de variáveis** *é uma aplicação do conjunto das variáveis de $\mathcal{L}$ no conjunto universo de M.* NOTAÇÃO: *as avaliações serão denotadas por $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, etc.*

SLIDE 10.7. *A Definição de Verdade de Tarski*

DEFINIÇÃO 10.4. *Sejam t um termo e $\overrightarrow{a}$ uma avaliação de variáveis de $\mathcal{L}$. Define-se $t(\overrightarrow{a})$ (leia-se: "valor de t em $\overrightarrow{a}$") indutivamente por:*

(1) *se t é a variável x_n, $t(\overrightarrow{a}) \doteq \overrightarrow{a}(x_n)$;*

(2) *se* t *é a constante individual* c, $t(\overrightarrow{a}) \doteq c^M$*;*
(3) *se* t *é da forma* $f(t_1, \ldots, t_n)$, $t(\overrightarrow{a}) \doteq f^M\big(t_1(\overrightarrow{a}), \ldots, t_n(\overrightarrow{a})\big)$.

SLIDE 10.8. *A Definição de Verdade de Tarski*

DEFINIÇÃO 10.5 (**satisfatibilidade**). *Sejam* $\mathcal{L}$ *uma linguagem de 1a. ordem,* M *uma interpretação de* $\mathcal{L}$, $\overrightarrow{a}$ *uma avaliação de variáveis e* A *uma fórmula de* $\mathcal{L}$. *Define-se por indução no comprimento de* A *que* **a avaliação** $\overrightarrow{a}$ **satisfaz** A **em** M *(*NOTAÇÃO: $M \models A[\overrightarrow{a}]$*) por:*

SLIDE 10.9. *A Definição de Verdade de Tarski*

(1) *se* A *é atômica, da forma* $R(t_1, \ldots, t_n)$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ *se* $R^M\big(t_1(\overrightarrow{a}), \ldots, t_n(\overrightarrow{a})\big)$.
(2) *se* A *é da forma* $\neg B$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ *se não se tem que* $M \models B[\overrightarrow{a}]$*;*
(3) *se* A *é da forma* $B \to C$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ *se* $M \models \neg B[\overrightarrow{a}]$ *ou* $M \models C[\overrightarrow{a}]$*;*
(4) *se* A *é da forma* $(\forall x)B$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ *se, para toda avaliação de variáveis* $\overrightarrow{a'}$ *que coincide com* $\overrightarrow{a}$ *exceto (possivelmente) na variável* x, *tem-se* $M \models B[\overrightarrow{a'}]$.

SLIDE 10.10. *Exercícios*

(1) *Mostre que, se duas avaliações* $\overrightarrow{a}$ *e* $\overrightarrow{b}$ *coincidem no conjunto das variáveis de um termo* t, *então* $t(\overrightarrow{a}) = t(\overrightarrow{b})$.
(2) *Sejam* A *uma fórmula de*$\mathcal{L}$, M *uma interpretação,* $\overrightarrow{a}$ *e* $\overrightarrow{b}$ *duas avaliações que coincidem nas variáveis livres de* A. *Então* $M \models A[\overrightarrow{a}]$ *se, e somente se,* $M \models A[\overrightarrow{b}]$.

11. AULA 11

SLIDE 11.1. *Fórmulas Válidas numa Interpretação*

DEFINIÇÃO 11.1. *Sejam* M *uma interpretação de uma linguagem de 1a. ordem* $\mathcal{L}$ *e* A *uma fórmula de* $\mathcal{L}$. *Diz-se que:*

- A *é* **válida em** M *(*NOTAÇÃO*:* $M \models A$*) se, para toda avaliação de variáveis* $\overrightarrow{a}$, *tem-se* $M \models A[\overrightarrow{a}]$.
- A *é* **contra-válida em** M *se, para toda avaliação de variáveis* $\overrightarrow{a}$, *não se tem* $M \models A[\overrightarrow{a}]$.
- M *é um* **modelo** *para um conjunto de* $\mathcal{L}$*-fórmulas* Γ *se toda fórmula de* Γ *for válida em* M.

SLIDE 11.2. *Propriedades das Noções de Satisfatibilidade e Validade*

(1) (a) A *é válida em* M *se, e somente se,* $\neg A$ *é contra-válida em* M*;*
    (b) A *é contra-válida em* M *se, e somente se,* $\neg A$ *é válida em* M.
(2) *Nenhuma fórmula é válida e contra-válida em* M.
(3) *Se* $M \models A$ *e* $M \models A \to B$, *então* $M \models B$.
(4) $A \to B$ *é contra-válida em* M *se, e somente se,* $M \models A$ *e* $M \models \neg B$.

SLIDE 11.3. *Propriedades (cont.)*

(5) *Sejam* M *uma interpretação com universo* D *e* $\overrightarrow{a}$ *uma avaliação de variáveis. Tem-se:*

(a) $M \models A \wedge B[\overrightarrow{a}]$ *se, e somente se,* $M \models A[\overrightarrow{a}]$ *e* $M \models B[\overrightarrow{a}]$*;*
(b) $M \models A \vee B[\overrightarrow{a}]$ *se, e somente se,* $M \models A[\overrightarrow{a}]$ *ou* $M \models B[\overrightarrow{a}]$*;*
(c) $M \models A \leftrightarrow B[\overrightarrow{a}]$ *se, e somente se,* $\overrightarrow{a}$ *satisfaz simultaneamente* A *e* B *ou não satisfaz ambas em* M.
(d) $M \models (\exists x)A[\overrightarrow{a}]$ *se, e somente se, existe* $\overrightarrow{a'}$ *que coincide com* $\overrightarrow{a}$ *exceto (possivelmente) em* x *tal que* $M \models A[\overrightarrow{a'}]$.

SLIDE 11.4. *Propriedades (cont.)*

(6) $M \models A$ *se, e somente se,* $M \models (\forall x)A$.
(7) *Toda* **quasi-tautologia** *(i.e. uma fórmula de* $\mathcal{L}$ *obtida a partir de uma tautologia do cálculo proposicional por substituições de fórmulas de* $\mathcal{L}$ *no lugar dos átomos) é válida em qualquer interpretação de* $\mathcal{L}$.

12. AULA 13

SLIDE 12.1. *A Definição de Verdade de Tarski*

DEFINIÇÃO 12.1. *Sejam* $\mathcal{L}$ *uma linguagem de 1a. ordem e* M *uma interpretação de* $\mathcal{L}$ *com universo* D*. Denote por* $A(x_1, \ldots, x_n)$ *uma fórmula de* $\mathcal{L}$ *cujas variáveis livres pertencem ao conjunto* $\{x_1, \ldots, x_n\}$*, e seja* $(a_1, \ldots, a_n) \in D^n$*. Diz-se que* $M \models A[a_1, \ldots, a_n]$ *se, para alguma avaliação de variáveis* $\overrightarrow{a}$ *tal que* $\overrightarrow{a}(x_i) = a_i$ *para* $1 \leqslant i \leqslant n$*, tem-se* $M \models A[\overrightarrow{a}]$.

SLIDE 12.2. *Fórmulas Válidas numa Interpretação*

DEFINIÇÃO 12.2. *Sejam* M *uma interpretação de uma linguagem de 1a. ordem* $\mathcal{L}$ *e* A *uma fórmula de* $\mathcal{L}$*. Diz-se que:*

- A *é* **válida em** M *(*NOTAÇÃO*:* $M \models A$*) se, para toda avaliação de variáveis* $\overrightarrow{a}$*, tem-se* $M \models A[\overrightarrow{a}]$.
- A *é* **satisfatível em** M *se existir uma avaliação de variáveis* $\overrightarrow{a}$*, tal que* $M \models A[\overrightarrow{a}]$.
- A *é* **contra-válida em** M *se, para toda avaliação de variáveis* $\overrightarrow{a}$*, não se tem* $M \models A[\overrightarrow{a}]$.

SLIDE 12.3. *Exercícios*

Estudar a satisfatibilidade das seguintes fórmulas de L_{KO} *na interpretação "standard":*

(1) $x > 0$
(2) $x^2 > 0 \vee x = 0$
(3) $x^2 < 0$
(4) $(\forall x)x < y$
(5) $(\exists x)x < y$
(6) $(\forall x)(\exists y)x = y$
(7) $(\exists y)(\forall x)x = y$

SLIDE 12.4. *Relações Definidas por Fórmulas*

DEFINIÇÃO 12.3. *Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, M uma interpretação de $\mathcal{L}$ com universo D e $A(x)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ na qual figura uma única variável livre, x. O* **conjunto verdade** *ou a* **relação 1-ária** *definida por $A(x)$ na interpretação M é o subconjunto de D dado por $\{a \in D \mid M \models A[a]\}$.*

SLIDE 12.5. *Relações Definidas por Fórmulas*

DEFINIÇÃO 12.4. *Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, M uma interpretação de $\mathcal{L}$ com universo D e $A(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ na qual figuram as variáveis livres $x_1, \ldots, x_n$. A* **relação n-ária** *definida por $A(x_1, \ldots, x_n)$ na interpretação M é o subconjunto de D^n dado por $\{(a_1, \ldots, a_n) \in D^n \mid M \models A[a_1, \ldots, a_n]\}$.*

13. AULA 14

SLIDE 13.1. *A Definição de Verdade de Tarski*

DEFINIÇÃO 13.1 (**satisfatibilidade**). *Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, M uma interpretação de $\mathcal{L}$, $\overrightarrow{a}$ uma avaliação de variáveis e A uma fórmula de $\mathcal{L}$. Define-se por indução no comprimento de A que* **a avaliação $\overrightarrow{a}$ satisfaz A em M** *(NOTAÇÃO: $M \models A[\overrightarrow{a}]$) por:*

SLIDE 13.2. *A Definição de Verdade de Tarski*

(1) *se A é atômica, da forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se $R^M\big(t_1(\overrightarrow{a}), \ldots, t_n(\overrightarrow{a})\big)$.*
(2) *se A é da forma $\neg B$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se não se tem que $M \models B[\overrightarrow{a}]$;*
(3) *se A é da forma $B \to C$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se $M \models \neg B[\overrightarrow{a}]$ ou $M \models C[\overrightarrow{a}]$;*
(4) *se A é da forma $(\forall x)B$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se, para toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a'}$ que coincide com $\overrightarrow{a}$ exceto (possivelmente) na variável x, tem-se $M \models B[\overrightarrow{a'}]$.*

SLIDE 13.3. *Exercícios*

(1) *Mostre que, se duas avaliações $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ coincidem no conjunto das variáveis de um termo t, então $t(\overrightarrow{a}) = t(\overrightarrow{b})$.*
(2) *Sejam A uma fórmula de$\mathcal{L}$, M uma interpretação, $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ duas avaliações que coincidem nas variáveis livres de A. Então $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, $M \models A[\overrightarrow{b}]$.*

SLIDE 13.4. *A Definição de Verdade de Tarski*

DEFINIÇÃO 13.2. *Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem e M uma interpretação de $\mathcal{L}$ com universo D. Denote por $A(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ cujas variáveis livres pertencem ao conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, e seja $(a_1, \ldots, a_n) \in D^n$. Diz-se que $M \models A[a_1, \ldots, a_n]$ se, para alguma avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$ tal que $\overrightarrow{a}(x_i) = a_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, tem-se $M \models A[\overrightarrow{a}]$.*

SLIDE 13.5. *Fórmulas Válidas numa Interpretação*

DEFINIÇÃO 13.3. *Sejam M uma interpretação de uma linguagem de 1a. ordem $\mathcal{L}$ e A uma fórmula de $\mathcal{L}$. Diz-se que:*

- *A é* **válida em** M *(*NOTAÇÃO*: $M \models A$) se, para toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$, tem-se $M \models A[\overrightarrow{a}]$.*
- *A é* **satisfatível em** *M se existir uma avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$, tal que $M \models A[\overrightarrow{a}]$.*
- *A é* **contra-válida em** M *se, para toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$, não se tem $M \models A[\overrightarrow{a}]$.*

SLIDE 13.6. *Exercícios Estudar a satisfatibilidade das seguintes fórmulas de L_{KO} no modelo "standard" dos números reais (onde x e y são variáveis):*

(1) $x > 0$
(2) $x^2 > 0 \vee x = 0$
(3) $x^2 < 0$
(4) $(\forall x) x < y$
(5) $(\exists x) x < y$
(6) $(\forall x)(\exists y) x = y$
(7) $(\exists y)(\forall x) x = y$

SLIDE 13.7. *Relações Definidas por Fórmulas*

DEFINIÇÃO 13.4. *Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, M uma interpretação de $\mathcal{L}$ com universo D e $A(x)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ na qual figura uma única variável livre, x. O* **conjunto verdade** *ou a* **relação 1-ária** *definida por $A(x)$ na interpretação M é o subconjunto de D dado por $\{a \in D \mid M \models A[a]\}$.*

SLIDE 13.8. *Relações Definidas por Fórmulas*

DEFINIÇÃO 13.5. *Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, M uma interpretação de $\mathcal{L}$ com universo D e $A(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ na qual figuram as variáveis livres $x_1, \ldots, x_n$. A* **relação** *n***-ária** *definida por $A(x_1, \ldots, x_n)$ na interpretação M é o subconjunto de D^n dado por $\{(a_1, \ldots, a_n) \in D^n \mid M \models A[a_1, \ldots, a_n]\}$.*

SLIDE 13.9. *Fórmulas Válidas (cont.)*

DEFINIÇÃO 13.6. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem. Diz-se que:*

- *Uma interpretação M é um* **modelo** *para um conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas Γ se toda fórmula de Γ for válida em* M.
- *Uma fórmula A de $\mathcal{L}$ é* **logicamente válida** *se A for válida em toda interpretação de $\mathcal{L}$, e* **contraditória** *ou* **contra-válida** *se $\neg A$ for logicamente válida.* NOTAÇÃO: *$\models A$ para A logicamente válida.*

SLIDE 13.10. *Fórmulas Válidas (cont.)*

- *Uma fórmula A de $\mathcal{L}$ é* **satisfatível** *se existir uma interpretação M de $\mathcal{L}$ e uma avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$ tais que $M \models A[\overrightarrow{a}]$.*
- *Um conjunto Γ de fórmulas de $\mathcal{L}$* **implica logicamente** *uma fórmula A se, para toda interpretação M e toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$ tais que $\overrightarrow{a}$ satisfaz em M toda fórmula de Γ, tem-se $M \models A[\overrightarrow{a}]$.*
- *Duas fórmulas A e B de $\mathcal{L}$ são* **logicamente equivalentes** *se cada uma delas implica logicamente a outra.*

SLIDE 13.11. *Propriedades das Noções de Satisfatibilidade e Validade*
Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem e M uma interpretação de $\mathcal{L}$. Tem-se:

(1) (a) *A é válida em M se, e somente se, $\neg A$ é contra-válida em M;*
(b) *A é contra-válida em M se, e somente se, $\neg A$ é válida em M.*
(2) *Nenhuma fórmula é válida e contra-válida em M.*
(3) *Se $M \models A$ e $M \models A \to B$, então $M \models B$.*
(4) *$A \to B$ é contra-válida em M se, e somente se, $M \models A$ e $M \models \neg B$.*

SLIDE 13.12. *Propriedades (cont.)*

(5) *Sejam M uma interpretação com universo D e $\overrightarrow{a}$ uma avaliação de variáveis. Tem-se:*
(a) *$M \models A \wedge B[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ e $M \models B[\overrightarrow{a}]$;*
(b) *$M \models A \vee B[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ ou $M \models B[\overrightarrow{a}]$;*
(c) *$M \models A \leftrightarrow B[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, $\overrightarrow{a}$ satisfaz simultaneamente A e B ou não satisfaz ambas em M.*
(d) *$M \models (\exists x)A[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, existe $\overrightarrow{a'}$ que coincide com $\overrightarrow{a}$ exceto (possivelmente) em x tal que $M \models A[\overrightarrow{a'}]$.*

SLIDE 13.13. *Propriedades (cont.)*

(6) *$M \models A$ se, e somente se, $M \models (\forall x)A$.*
(7) *Toda* **quasi-tautologia** *(i.e. uma fórmula de $\mathcal{L}$ obtida a partir de uma tautologia do cálculo proposicional por substituições de fórmulas de $\mathcal{L}$ no lugar dos átomos) é válida em qualquer interpretação de $\mathcal{L}$.*

SLIDE 13.14. *Termo Livre para uma Variável*

Notação. Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem e $x_1, \ldots, x_n$ variáveis de $\mathcal{L}$. A notação $A(x_1, \ldots, x_n)$ será usada para denotar uma fórmula A de $\mathcal{L}$ na qual podem ocorrer livres as variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Esta notação é útil para efeito da seguinte:

SLIDE 13.15. *Termo Livre para uma Variável*

DEFINIÇÃO 13.7. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, $A(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$, e $t_1, \ldots, t_n$ termos de $\mathcal{L}$. Denotar-se-á por $A(t_1, \ldots, t_n)$ a fórmula obtida a partir de $A(x_1, \ldots, x_n)$ por substituição de todas as ocorrências* **livres** *de x_i por t_i, para $1 \leqslant i \leqslant n$.*

PERGUNTA: Se $B(x_i)$ for uma fórmula de $\mathcal{L}$, qual a condição a ser colocada sobre um termo t de $\mathcal{L}$ para que a substituição das ocorrências livres de x_i em $B(x_i)$ por t não gere novas variáveis ligadas?

SLIDE 13.16. *Termo Livre para uma Variável*

DEFINIÇÃO 13.8. *Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, t um termo, x_i uma variável e $A(x_i)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$. Diz-se que t* **é livre para** *x_i* **em** *$A(x_i)$ se, para toda variável y que ocorre em t, nenhuma ocorrência livre de x_i em $A(x_i)$ pertence ao escopo de $(\forall y)$.*

SLIDE 13.17. *Termo Livre para uma Variável Decorre imediatamente da última definição que:*

- x_i *é livre para* x_i *em qualquer fórmula;*
- *se* t *é um termo no qual não ocorrem variáveis, ou se nenhuma variável de* t *ocorre quantificada em* $A(x_i)$*, então* t *é livre para* x_i *em* $A(x_i)$*;*
- *se todas as ocorrências de* x_i *em* $A(x_i)$ *são ligadas, então qualquer termo é livre para* x_i *em* $A(x_i)$*.*

SLIDE 13.18. *Exercícios Em* L_{KO}*, sejam* $t_1 = x_1$ *e* $t_2 = (x_1 + 1) \cdot x_2$*. Decida se* t_1 *e* t_2 *são livres para cada uma das variáveis que figuram nas seguintes fórmulas:*

(1) $x_1 < x_2 \cdot x_3$
(2) $(\forall x_1)x_1 < x_2 \cdot x_3$
(3) $(\forall x_1)(\exists x_2)x_1 < x_2 \cdot x_3$

SLIDE 13.19. *Mais Propriedades das Noções de Satisfatibilidade e Validade*
Sejam $\mathcal{L}$ *uma linguagem de 1a. ordem. Tem-se:*

(8) *Se* A *é uma* **sentença fechada** *(i.e. uma fórmula sem variáveis livres), então, dada* M *interpretação de* $\mathcal{L}$*, ou* $M \models A$ *ou* $M \models \neg A$*.*
(9) *Sejam* $B(x_i)$ *uma fórmula e* t *um termo livre para* x_i*. Então* $\models (\forall x_i)B(x_i) \to B(t)$*.*
(10) $\models (\forall x_i)(B \to C) \to \big(B \to (\forall x_i)C\big)$ *se* x_i *não ocorre livre em* B*.*

SLIDE 13.20. *Exercícios Mostre que, numa linguagem de 1a. ordem:*

(1) A *implica logicamente* B *se, e somente se,* $\models A \to B$*.*
(2) A *é logicamente equivalente a* B *se, e somente se,* $\models A \leftrightarrow B$*.*
(3) $\models B(t) \to (\exists x_i)B(x_i)$ *se* t *for um termo livre para* x_i*.*
(4) $\models (\forall x_i)B \to (\exists x_i)B$*.*
(5) $\models (\forall x_i)(\forall x_j)B \leftrightarrow (\forall x_j)(\forall x_i)B$*.*
(6) $\models (\exists x_i)(\exists x_j)B \leftrightarrow (\exists x_j)(\exists x_i)B$*.*
(7) $\models (\forall x_i)(B \to C) \to \big((\forall x_i)B \to (\forall x_i)C\big)$*.*

14. AULA 15

SLIDE 14.1. *Teorias de 1a. Ordem*

DEFINIÇÃO 14.1. *Seja* $\mathcal{L}$ *uma linguagem de 1a. ordem. Uma* **teoria de 1a. ordem** K *na linguagem* L *é uma teoria formal, cujos símbolos e fórmulas são os mesmos de* L*, e cujos axiomas e regras de inferência são especificados conforme abaixo.*

- *Axiomas Lógicos. Para quaisquer fórmulas* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ *de* $\mathcal{L}$*:*
  (A1): $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$
  (A2): $\big(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})\big) \to \big((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})\big)$

SLIDE 14.2. *Teorias de 1a. Ordem*

(A3): $(\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}) \to \big((\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{A}\big)$
(A4): $(\forall x_i)\mathcal{B}(x_i) \to \mathcal{B}(t)$ *se* t *for livre para* x_i *em* $\mathcal{B}(x_i)$
(A5): $(\forall x_i)(\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to \big(\mathcal{B} \to (\forall x_i)\mathcal{C}\big)$ *se* x_i *não ocorrer livre em* $\mathcal{B}$*.*

SLIDE 14.3. *Teorias de 1a. Ordem*

- *Axiomas próprios. São específicos de cada teoria.*
- *Regras de Inferência:*

MP: $\dfrac{\mathcal{A}, \mathcal{A} \to \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$

Gen: $\dfrac{\mathcal{A}}{(\forall x_i)\mathcal{A}}$

SLIDE 14.4. *Cálculo de Predicados de 1a. Ordem, Modelos*

DEFINIÇÃO 14.2. *Uma teoria de 1a. ordem que não possui axiomas próprios (i.e. só tem os 5 esquemas de axiomas lógicos) chama-se um* **cálculo de predicados de 1a. ordem**.

DEFINIÇÃO 14.3. *Seja K uma teoria de 1a. ordem na linguagem $\mathcal{L}$. Um* **modelo** *de K é uma interpretação de K na qual todos os axiomas de K são válidos.*

SLIDE 14.5. *Exemplos de Teorias de 1a. Ordem*

- **Ordem Parcial.** *$\mathcal{L}$: um símbolo predicativo binário $<$. Axiomas próprios:*

O1:: $(\forall x_1)\neg x_1 < x_1$
O2:: $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3 \to x_1 < x_3)$

Um modelo desta teoria chama-se uma **estrutura parcialmente ordenada**.

SLIDE 14.6. *Exemplos de Teorias de 1a. Ordem*

- **Teoria dos Grupos.** *$\mathcal{L}$: um símbolo funcional binário $+$, uma constante individual 0, um símbolo predicativo binário $=$. Axiomas próprios:*

G1:: $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$
G2:: $(\forall x_1)0 + x_1 = x_1$
G3:: $(\forall x_1)(\exists x_2)x_2 + x_1 = 0$

SLIDE 14.7. *Exemplos de Teorias de 1a. Ordem*

=1:: $(\forall x_1)x_1 = x_1$
=2:: $(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1 = x_2 \to x_2 = x_1)$
=3:: $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \to x_1 = x_3)$
=4:: $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_2 = x_3 \to x_1 + x_2 = x_1 + x_3 \wedge x_2 + x_1 = x_3 + x_1)$

Um modelo para esta teoria, na qual a interpretação de "=" é a relação de identidade no universo, chama-se um **grupo**. *O grupo diz-se* **abeliano** *se também satisfizer o axioma (G3) $(\forall x_1)(\forall x_2)x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.*

SLIDE 14.8. *Propriedades das Teorias de 1a. Ordem*

PROPOSIÇÃO 14.1. *Todo teorema de uma teoria de 1a. ordem K é válido em qualquer modelo de K.*

PROPOSIÇÃO 14.2. *Sejam K uma teoria de 1a. ordem e $\mathcal{A}$ uma quasi-tautologia de K. Então $\mathcal{A}$ é um teorema de K e pode ser demonstrada usando-se apenas os esquemas de axiomas (A1) a (A3) e (MP).*

SLIDE 14.9. *Propriedades das Teorias de 1a. Ordem*

PROPOSIÇÃO 14.3. *Todo teorema de um cálculo de predicados de 1a. ordem é logicamente válido.*

DEFINIÇÃO 14.4. *Uma teoria de 1a. ordem K diz-se* **consistente** *se, para qualquer fórmula A de K, se A e $\neg A$ não são ambos teoremas de K.*

COROLÁRIO 14.1. *Todo cálculo de predicados de 1a. ordem é consistente.*

SLIDE 14.10. *Dependência de Fórmulas numa Dedução Formal*

DEFINIÇÃO 14.5. *Sejam K uma teoria de 1a. ordem, $\mathcal{A}$ uma fórmula pertencente a um conjunto Γ de fórmulas de K, e $(A_1, \ldots, A_n)$ uma dedução em K a partir de Γ, com uma justificativa em cada passo da dedução. Diz-se que, nesta dedução, A_i* **depende de** *A, se uma das seguintes condições ocorrer:*

(1) *A_i é A e a justificativa é "A_i pertence a Γ".*
(2) *A_i é obtida por (MP) ou (Gen) de fórmulas anteriores da seqüência, com pelo menos uma das quais depende de A.*

SLIDE 14.11. *Exemplo*

Tome $\Gamma = \{\mathcal{A}, (\forall x_1)\mathcal{A} \to \mathcal{B}\}$, e a seguinte dedução a partir de Γ:

(A1): $\mathcal{A}$ *(hip.)*
(A2): $(\forall x_1)\mathcal{A}$ *(Gen, de A1)*
(A3): $(\forall x_1)\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *(hip.)*
(A4): $\mathcal{B}$ *(MP, de A2 e A3)*
(A5): $(\forall x_1)\mathcal{B}$ *(Gen, de A4)*

A1 depende de $\mathcal{A}$, A2 depende de $\mathcal{A}$, A3 depende de $(\forall x_1)\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, A4 e A5 dependem de ambas.

SLIDE 14.12. *Teorema da Dedução*

PROPOSIÇÃO 14.4. *Sejam K uma teoria de 1a. ordem, Γ um conjunto de fórmulas, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ fórmulas de K. Se, numa dedução mostrando que $\Gamma, \mathcal{A} \vdash_K \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ não depende de $\mathcal{A}$, então $\Gamma \vdash_K \mathcal{B}$.*

TEOREMA 14.1. *Sejam K uma teoria de 1a. ordem, Γ um conjunto de fórmulas, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ fórmulas de K. Se, numa dedução mostrando que $\Gamma, \mathcal{A} \vdash_K \mathcal{B}$ não se aplica (Gen) a uma fórmula que depende de $\mathcal{A}$ com variável quantificada livre em $\mathcal{A}$, então $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.*

SLIDE 14.13. *Teorema da Dedução*

COROLÁRIO 14.2. *Sejam K uma teoria de 1a. ordem, Γ um conjunto de fórmulas, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ fórmulas de K. Se, numa dedução mostrando que $\Gamma, \mathcal{A} \vdash_K \mathcal{B}$ não se aplica (Gen) a uma fórmula com variável quantificada livre em $\mathcal{A}$, então $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.*

SLIDE 14.14. *Teorema da Dedução*

Observação 14.1. *É possível mostrar que, no teorema da dedução (bem como na proposição que o precede), podemos tomar uma dedução de $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (ou de $\Gamma \vdash_K \mathcal{B}$, na proposição) que satisfaz a seguinte propriedade: ocorre nesta dedução uma aplicação de (Gen) a uma fórmula que depende de uma fórmula $\mathcal{C}$ se, e somente se, na dedução original de $\Gamma, \mathcal{A} \vdash_K \mathcal{B}$ já ocorria uma tal aplicação, com a mesma variável quantificada. Esta observação é útil para aplicações do teorema da dedução em "cascata".*

SLIDE 14.15. *Exercícios*

Seja K uma teoria de 1a. ordem. Mostre que:
(1) $\vdash (\forall x_1)(\forall x_2)\mathcal{A} \to (\forall x_2)(\forall x_1)\mathcal{A}$
(2) $\vdash (\forall x)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \big((\forall x)\mathcal{A} \to (\forall x)\mathcal{B}\big)$
(3) $\vdash (\forall x)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \big((\exists x)\mathcal{A} \to (\exists x)\mathcal{B}\big)$
(4) $\vdash (\forall x)(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \leftrightarrow \big((\forall x)\mathcal{A} \wedge (\forall x)\mathcal{B}\big)$
(5) $\vdash (\forall x_1)\dots(\forall x_n)\mathcal{A} \to \mathcal{A}$
(6) $\vdash \neg(\forall x)\mathcal{A} \to (\exists x)\neg\mathcal{A}$

15. AULA 16

SLIDE 15.1. *Teoremas e Regras de Inferências Derivadas Adicionais*

`Particularização:` $(\forall x)\mathcal{A}(x) \vdash A(t)$ *se t livre para x em $\mathcal{A}(x)$.*
`Regra Existencial:` $\mathcal{A}(t,t) \vdash (\exists x)\mathcal{A}(x,t)$ *se t livre para x em $\mathcal{A}(x,t)$.*
`Eliminação de Negação:` $\neg\neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$
`Introdução de Negação:` $\mathcal{A} \vdash \neg\neg\mathcal{A}$

SLIDE 15.2. *Teoremas e Regras de Inferências Derivadas Adicionais*

`Eliminação de Conjunção:` • $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$
- $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \vdash \mathcal{B}$
- $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vdash \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$

`Introdução de Conjunção:` $\mathcal{A}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
`Eliminação de Disjunção:` • $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$
- $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$
- $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vdash \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$
- $\mathcal{A} \to \mathcal{C}, \mathcal{B} \to \mathcal{C}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$

SLIDE 15.3. *Teoremas e Regras de Inferências Derivadas Adicionais*

`Introdução de Disjunção:` • $\mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
- $\mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$

`Eliminação de Condicional:` • $\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$
- $\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$
- $\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$
- $\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$

`Contraposição:` • $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \vdash \neg\mathcal{B} \to \neg\mathcal{A}$
- $\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{A}$

SLIDE 15.4. *Teoremas e Regras de Inferências Derivadas Adicionais*

`Eliminação de Bicondicional:` • $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$

- $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$
- $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \vdash \neg\mathcal{A}$
- $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}, \neg\mathcal{A} \vdash \neg\mathcal{B}$
- $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \vdash (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$

`Introdução de Bicondicional:` $\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$

`Prova por Contradição:` *Se* $\Gamma, \neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{B}$ *e na dedução não se aplica (Gen) com variável quantificada livre em* $\mathcal{A}$*, então* $\Gamma \vdash \mathcal{A}$.

SLIDE 15.5. *Teoremas da Equivalência e da Substituição*

PROPOSIÇÃO 15.1. *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma subfórmula de* $\mathcal{B}$*, e* $\mathcal{B}'$ *a fórmula obtida de* $\mathcal{B}$ *por substituição de uma ou mais ocorrências de* $\mathcal{C}$ *por* $\mathcal{D}$*. Suponha que todas as variáveis livres de* $\mathcal{C}$ *ou* $\mathcal{D}$ *que sejam variáveis ligadas em* $\mathcal{B}$ *estejam na lista* $\{y_1, \ldots, y_k\}$*. Tem-se:*

(1) $\vdash \big((\forall y_1) \ldots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})\big) \to (\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B}')$ *(*TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA*)*

(2) *Se* $\vdash \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D}$*, então* $\vdash \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B}'$ *(*TEOREMA DA SUBSTITUIÇÃO*)*

SLIDE 15.6. *Exercícios*

Verifique que, numa teoria de 1a. ordem:

(1) $\vdash \neg(\exists x)\mathcal{B} \leftrightarrow (\forall x)\neg\mathcal{B}$

(2) $\vdash (\forall x)\mathcal{B} \to (\forall x)(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$

Assuma que x *não ocorre livre em* $\mathcal{B}$*. Então:*

(1) $\vdash \mathcal{B} \to (\forall x)\mathcal{B}$

(2) $\vdash \mathcal{B} \to (\exists x)\mathcal{B}$

(3) $\vdash \big(\mathcal{B} \to (\forall x)\mathcal{C}\big) \leftrightarrow (\forall x)(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$

(4) $\vdash \big((\exists x)\mathcal{C} \to \mathcal{B}\big) \leftrightarrow (\forall x)(\mathcal{C} \to \mathcal{B})$

SLIDE 15.7. *Exercícios(cont.)*

(1) $\vdash (\exists x)\neg\mathcal{B} \leftrightarrow \neg(\forall x)\mathcal{B}$

(2) $\vdash (\exists x)\big(\mathcal{B} \to \neg(\mathcal{C} \vee \mathcal{D})\big) \leftrightarrow (\exists x)(\mathcal{B} \to \neg\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D})$

(3) $\vdash (\forall x)(\exists y)(\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$

SLIDE 15.8. *Regra C* `Motivação:` $(\exists x)\big(\mathcal{B}(x) \to \mathcal{C}(x)\big), (\forall x)\mathcal{B}(x) \vdash (\exists x)\mathcal{C}(x)$

A1: $(\exists x)\big(\mathcal{B}(x) \to \mathcal{C}(x)\big)$ *(hip.)*

A2: $(\forall x)\mathcal{B}(x)$ *(hip.)*

A3: $\mathcal{B}(d) \to \mathcal{C}(d)$ *(de A1, “***escolhendo um** d*”)*

A4: $(\forall x)\mathcal{B}(x) \to \mathcal{B}(d)$ *(axioma IV)*

A5: $\mathcal{B}(d)$ *((MP), de A2 e A4)*

A6: $\mathcal{C}(d)$ *((MP), de A3 e A5)*

A7: $\mathcal{C}(d) \to (\exists x)\mathcal{C}(x)$ *(regra existencial)*

A8: $(\exists x)\mathcal{C}(x)$ *((MP), de A6 e A7)*

SLIDE 15.9. *Regra C*

DEFINIÇÃO 15.1. *Uma* **dedução usando a regra C** *numa teoria de 1a. ordem* K*, de uma fórmula* $\mathcal{B}$ *a partir de um conjunto de fórmulas* Γ *(***NOTAÇÃO:** $\Gamma \vdash_C \mathcal{B}$*), é uma seqüência de fórmulas* $(B_1, \ldots, B_n)$*, com* $B_n = \mathcal{B}$*, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

SLIDE 15.10. *Regra C*

(1) *Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, uma das seguintes condições é satisfeita:*
 (a) *A_i é um axioma de K ou $A_i \in \Gamma$.*
 (b) *A_i é obtida por (MP) ou (Gen) a partir de fórmulas anteriores da seqüência.*
 (c) *existe $j < i$ tal que $A_j = (\exists x)\mathcal{C}(x)$ e $A_i = \mathcal{C}(d)$, onde d é uma nova constante individual (***regra C***).*

SLIDE 15.11. *Regra C*

(2) *Ao ser aplicada a regra C, a constante individual introduzida passa a fazer parte da linguagem, i.e. estamos estendendo a linguagem de K. Portanto, nas fórmulas seguintes da seqüência, esta constante pode ser usada nos esquemas de axiomas.*
(3) *Nenhuma aplicação de (Gen) é feita com variável quantificada livre numa fórmula $(\exists x)\mathcal{C}(x)$ à qual tenha sido aplicada a regra C anteriormente.*
(4) *As constantes individuais novas não figuram em $\mathcal{B}$.*

SLIDE 15.12. *Regra C*

PROPOSIÇÃO 15.2. *Se $\Gamma \vdash_C \mathcal{B}$, então $\Gamma \vdash \mathcal{B}$. Além disso, é possível tomar uma dedução de $\Gamma \vdash \mathcal{B}$ satisfazendo a seguinte propriedade: se, nesta dedução, ocorrer uma aplicação de (Gen) a uma fórmula que dependa de uma fórmula $\mathcal{D}$, com variável quantificada x, então isto já acontecia na dedução original de $\Gamma \vdash_C \mathcal{B}$.*

SLIDE 15.13. *Exercícios*

Verifique que, numa teoria de 1a. ordem:
(1) $\vdash (\forall x)\big(\mathcal{B}(x) \to \mathcal{C}(x)\big) \to \big((\exists x)\mathcal{B}(x) \to (\exists x)\mathcal{C}(x)\big)$
(2) $\vdash (\exists x)\big(\mathcal{B}(x) \to \mathcal{C}(x)\big) \to \big((\forall x)\mathcal{B}(x) \to (\exists x)\mathcal{C}(x)\big)$
(3) $\vdash \neg(\exists y)(\forall x)\big(A_1^2(x,y) \leftrightarrow \neg A_1^2(x,x)\big)$

16. AULA 17

SLIDE 16.1. *Teorias com Igualdade*

DEFINIÇÃO 16.1. *Seja K uma teoria de 1a. ordem que possui um símbolo predicativo binário "$=$". Diz-se que K é uma* **teoria de 1a. ordem com igualdade** *se as seguintes fórmulas forem teoremas de K:*

A6: $(\forall x_1)x_1 = x_1$
A7: $x = y \to \big(\mathcal{B}(x,x) \to \mathcal{B}(x,y)\big)$ *se y livre para x em $\mathcal{B}(x,x)$ e $\mathcal{B}(x,y)$ se obtém de $\mathcal{B}(x,x)$ por substituição de algumas das ocorrências livres de x por y.*

SLIDE 16.2. *Teorias com Igualdade*

PROPOSIÇÃO 16.1. *Em toda teoria com igualdade, tem-se:*
(1) $\vdash t = t$ *(para qualquer termo t)*
(2) $\vdash t = s \to s = t$ *(para quaisquer termos s e t)*
(3) $\vdash t = s \to (s = r \to t = r)$ *(para quaisquer termos r, s e t)*

SLIDE 16.3. *Teorias com Igualdade*

PROPOSIÇÃO 16.2. *Seja K uma teoria de 1a. ordem na qual (A6) é um teorema e (A7) vale para todas as fórmulas atômicas $\mathcal{B}(x,x)$ nas quais não figuram constantes individuais. Então K é uma teoria com igualdade, i.e. (A7) vale para quaisquer fórmulas $\mathcal{B}(x,x)$.*

SLIDE 16.4. *Teorias com Igualdade*

PROPOSIÇÃO 16.3. *Seja K uma teoria de 1a. ordem na qual (A6) é um teorema e as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) *O esquema (A7) vale para todas as fórmulas atômicas $\mathcal{B}(x,x)$ nas quais não figuram símbolos funcionais ou constantes individuais, e $\mathcal{B}(x,y)$ é obtida de $\mathcal{B}(x,x)$ pela substituição de uma única ocorrência de x por y.*
(2) $\vdash x = y \rightarrow f_j^n(z_1,\dots,z_n) = f_j^n(w_1,\dots,w_n)$*, onde f_j^n é um símbolo funcional qualquer, $z_1,\dots,z_n$ são variáveis e $f_j^n(w_1,\dots,w_n)$ é obtida a partir de $f_j^n(z_1,\dots,z_n)$ pela substituição de uma única ocorrência de x por y.*

Então K é uma teoria com igualdade.

SLIDE 16.5. *Exemplos*

- *A teoria elementar dos grupos é uma teoria com igualdade.*
- *Idem para a teoria elementar dos corpos e para a teoria elementar dos corpos ordenados.*

SLIDE 16.6. *Exercícios*

Mostre que, em toda teoria de 1a. ordem com igualdade:

(1) $x = y \rightarrow f(x) = f(y)$ *onde f é qualquer símbolo funcional unário.*
(2) $(\forall x)(\exists y)x = y$
(3) $(\forall x)\big(\mathcal{B}(x) \leftrightarrow (\forall y)(x = y \rightarrow \mathcal{B}(y))\big)$ *se y não ocorre em $\mathcal{B}(x)$*

17. AULA 18

SLIDE 17.1. *Teorema da Completude*

TEOREMA 17.1 (Gödel, 1930). *Toda teoria de 1a. ordem consistente possui um modelo infinito enumerável.*

SLIDE 17.2. *Teorema da Completude*

LEMA 17.1. *Seja K uma teoria de 1a. ordem. Assuma que uma fórmula fechada $\neg\mathcal{B}$ não seja um teorema de K. Denote por K' a teoria de 1a. ordem obtida a partir de K por adição da fórmula $\mathcal{B}$ como axioma. Então, K' é consistente.*

COROLÁRIO 17.1. *Seja K uma teoria de 1a. ordem. Então, toda fórmula logicamente válida $\mathcal{B}$ de K é um teorema de K.*

SLIDE 17.3. *Teorema da Completude*

COROLÁRIO 17.2 (teorema da completude de Gödel, 1930). *Num cálculo de predicados de 1a. ordem, uma fórmula é logicamente válida se, e somente se, for um teorema.*

SLIDE 17.4. *Teorema da Completude*

COROLÁRIO 17.3. *Seja K uma teoria de 1a. ordem.*

(1) *Uma fórmula $\mathcal{B}$ é válida em qualquer modelo infinito enumerável de K se, e somente se, $\vdash_K \mathcal{B}$.*
(2) *Se, em todo modelo de K, toda avaliação de variáveis que satisfaz um dado conjunto Γ de fórmulas também satisfaz uma fórmula $\mathcal{B}$, então $\Gamma \vdash_K \mathcal{B}$.*
(3) *Se uma fórmula $\mathcal{B}$ de K for conseqüência lógica de um conjunto Γ de fórmulas de K, então $\Gamma \vdash_K \mathcal{B}$.*

SLIDE 17.5. *Teorema da Completude*

COROLÁRIO 17.4 (Gödel, 1930). *Toda teoria de 1a. ordem com igualdade consistente possui um modelo normal finito ou infinito enumerável.*

SLIDE 17.6. *Exercício*

Demonstre o teorema da compacidade*: se todos os subconjuntos finitos do conjunto de axiomas próprios de uma teoria de 1a. ordem K admitirem modelos, então K tem um modelo.*