MAT0349 - Introdução à Lógica - IME - 2007

Prof. Gláucio Terra

P2

DATA LIMITE PARA ENTREGA: 12/12/2007

Notação. Vide notação fixada na lista 2.

1-) Demonstre que, numa teoria de 1a. ordem K:

(a) (1 pto) $\vdash \neg(\exists y)(\forall x)\big(A_1^2(x,y) \leftrightarrow \neg A_1^2(x,x)\big)$

(b) (1 pto) $\vdash \big[(\forall x)\big(A_1^1(x) \to A_2^1(x) \vee A_3^1(x)\big) \wedge \neg(\forall x)\big(A_1^1(x) \to A_2^1(x)\big)\big] \to (\exists x)\big(A_1^1(x) \wedge A_3^1(x)\big)$

(c) (1 pto) $\vdash (\exists x)(\forall y)\mathcal{B}(x,y) \to (\forall y)(\exists x)\mathcal{B}(x,y)$

2-) Prove que, numa teoria de 1a. ordem com igualdade:

(a) (1 pto) $\vdash (\forall x)\big[\mathcal{B}(x) \leftrightarrow (\forall y)\big(y = x \to \mathcal{B}(y)\big)\big]$ se y não ocorrer em $\mathcal{B}(x)$.

(b) (1 pto) $\vdash x = y \to f(x) = f(y)$, onde f é um símbolo funcional unário.

3-) Numa teoria de 1a. ordem com igualdade, podemos definir sentenças da forma "existe um único x tal que ..." da seguinte maneira:

DEFINIÇÃO 1 *Numa teoria de 1a. ordem com igualdade, usar-se-á a expressão "$(\exists_1 x)\mathcal{B}(x)$" como abreviação de "$(\exists x)\mathcal{B}(x) \wedge (\forall x)(\forall y)\big(\mathcal{B}(x) \wedge \mathcal{B}(y) \to x = y\big)$". Nesta definição, y é a primeira variável que não figura em $\mathcal{B}(x)$ (lembre-se que, ao ser dada uma linguagem de 1a. ordem, consideramos uma enumeração das suas variáveis fixada a priori: $x_1, x_2, \dots$); uma convenção similar será usada em todas as definições subseqüentes onde uma nova variável for introduzida.*

Prove que, numa teoria de 1a. ordem com igualdade:

(a) (1 pto) $\vdash (\forall x)\big(\mathcal{B}(x) \leftrightarrow \mathcal{C}(x)\big) \to \big[(\exists_1 x)\mathcal{B}(x) \leftrightarrow (\exists_1 x)\mathcal{C}(x)\big]$

(b) (1 pto) $\vdash (\exists_1 x)(\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \to \big((\exists_1 x)\mathcal{B}\big) \vee (\exists_1 x)\mathcal{C}$

4-) DEFINIÇÃO 2 *Seja K uma teoria de 1a. ordem com igualdade. Um modelo M de K diz-se* normal *se $(=)^M$ for a relação identidade do universo de M.*

Seja $\mathcal{L}$ a linguagem de 1a. ordem definida por: um símbolo predicativo binário $=$, um símbolo predicativo binário I, um símbolo predicativo unário P, um símbolo predicativo unário R. Leia $u = v$ como "u e v são idênticos", $P(u)$ como "u é um ponto", $R(u)$ como "u é uma reta", $I(u, v)$ como "u e v são incidentes". A *geometria de incidência plana* é a teoria de 1a. ordem com igualdade $\mathbb{G}$, cuja linguagem é $\mathcal{L}$ e cujos axiomas são (A1) a (A7) e mais os seguintes axiomas próprios:

$\mathbb{G}$**1** $P(x) \to \neg R(x)$

$\mathbb{G}$**2** $I(x, y) \to P(x) \wedge R(y)$

$\mathbb{G}$**3** $R(x) \to (\exists y)(\exists z)\big(y \neq z \wedge I(y, x) \wedge I(z, x)\big)$

$\mathbb{G}$4 $P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \to (\exists_1\, z)\big(R(z) \wedge I(x,z) \wedge I(y,z)\big)$

$\mathbb{G}$5 $(\exists x)(\exists y)(\exists z)\big(P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge \neg\mathcal{C}(x,y,z)\big)$

onde $\mathcal{C}(x,y,z)$ é uma abreviação para a fórmula $(\exists u)\big(R(u) \wedge I(x,u) \wedge I(y,u) \wedge I(z,u)\big)$ e lida como "x, y e z são colineares".

(a) (1 pto) Prove $\vdash_{\mathbb{G}} (\forall u)(\forall v)\big[R(u) \wedge R(v) \wedge u \neq v \to (\forall x)(\forall y)\big(I(x,u) \wedge I(x,v) \wedge I(y,u) \wedge I(y,v) \to x = y\big)\big]$. Traduza este teorema para uma linguagem geométrica usual.

(b) (2 ptos) Seja $\mathcal{P}(u,v)$ uma abreviação para a fórmula $R(u) \wedge R(v) \wedge \neg(\exists w)\big(I(w,u) \wedge I(w,v)\big)$, lida como "$u$ e v são retas paralelas distintas".

1. Prove: $\vdash_{\mathbb{G}} \mathcal{P}(u,v) \to u \neq v$.

2. Mostre que existe um modelo normal de $\mathbb{G}$, com universo finito, no qual a seguinte fórmula é válida:

$$(\forall x)(\forall y)\big[R(x) \wedge P(y) \wedge \neg I(y,x) \to (\exists_1\, z)\big(I(y,z) \wedge \mathcal{P}(z,x)\big)\big]$$