

MAT0349 - Introdução à Lógica - IME - 2007

Prof. Gláucio Terra

P1

DATA LIMITE PARA ENTREGA: 08/10/2007

1-) Determine quais dos seguintes pares de sentenças de uma linguagem proposicional são logicamente equivalentes:

(a) (1 pts.) $A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$ e $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow C)$

(b) (1 pts.) $A \wedge (B \leftrightarrow C)$ e $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow C)$

2-) (NOTAÇÃO POLONESA) Escreva $\rightarrow \mathcal{BC}$ no lugar de $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, $\wedge \mathcal{BC}$ no lugar de $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$, $\vee \mathcal{BC}$ no lugar de $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ e $\leftrightarrow \mathcal{BC}$ no lugar de $\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C}$. Nesta nova notação, chamada *notação polonesa* ou *posfixa*, as fórmulas do Cálculo Proposicional podem ser escritas sem o uso de parênteses. Por exemplo, a fórmula $(\neg A) \wedge (B \rightarrow (\neg C))$ se escreve, em notação polonesa: $\wedge \neg A \rightarrow B \neg C$.

(a) Escreva as fórmulas abaixo em notação polonesa:

1. (1 pts.) $(C \rightarrow (\neg A)) \vee B$

2. (1 pts.) $C \vee ((B \wedge (\neg D)) \rightarrow C)$

(b) Assuma o seguinte:

LEMA: Conte cada conectivo $\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$ como +1, cada letra proposicional como -1 e cada conectivo $\neg$ como 0. Então uma expressão $\mathcal{B}$ (formada por letras e conectivos proposicionais) é uma fórmula do Cálculo Proposicional em notação polonesa se, e somente se: (i) a soma dos símbolos de $\mathcal{B}$ for -1 e (ii) a soma dos símbolos em qualquer segmento inicial próprio de $\mathcal{B}$ é maior ou igual a 0 (se uma expressão $\mathcal{B}$ pode ser escrita na forma $\mathcal{CA}$, com $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ chama-se um *segmento inicial próprio* de $\mathcal{B}$).

Use o lema para verificar quais das seguintes expressões representam fórmulas do Cálculo Proposicional em notação polonesa; em caso afirmativo, reescreva a fórmula na notação usual (chamada de *notação infixa*).

1. (1 pts.) $\neg \rightarrow ABC \vee AB \neg C$

2. (1 pts.) $\rightarrow \rightarrow AB \rightarrow \rightarrow BC \rightarrow \neg AC$

OBSERVAÇÃO: Se quiser tentar demonstrar o lema, vale um bônus de 2 pontos.

3-) Demonstre que, na teoria formal L do Cálculo Proposicional, definida em aula (onde $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ são fórmulas de L), tem-se:

(a) (1 pts.) $\vdash (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}) \rightarrow ((\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \rightarrow (\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}))$

(b) (1 pts.) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$

(c) (1 pts.) $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$

(d) (1 pts.) $\neg \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{C}, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{C}$